УДК 517.9

А. М. Самойленко, Н. Л. Денисенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ НА ПІВОСІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

Conditions are established under which solutions on the semiaxis for a system of linear differential-functional equations are determined as solutions of some system of ordinary differential equations.

Получены условия, при которых решениями на полуоси системы линейных дифференциально-функциональных уравнений являются решения некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Розглянемо систему диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(\lambda t) + f(t), \tag{1}$$

де $0 < \lambda < 1$, $t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $A(t)$, $B(t)$ — $(n \times n)$-матричні функції, $f(t)$ — вектор-функція розмірності n.

Різні частинні випадки таких рівнянь були об'єктом дослідження багатьох математиків, і на даний час отримано велику кількість результатів щодо вивчення різних задач теорії таких рівнянь. При цьому особливо активно вивчались питання існування різного роду розв'язків, поведінки розв'язків та ін. [3 – 6]. У роботі [1] наведено умови, при яких глобальними розв'язками лінійних систем диференціальних рівнянь з відхиленнями аргументу є розв'язки відповідних систем звичайних диференціальних рівнянь. У даній роботі, використавши підхід, запропонований у [1], встановимо умови, за яких розв'язками на півосі системи диференціально-функціональних рівнянь є розв'язки деякої системи звичайних диференціальних рівнянь.

1. У цьому пункті ми побудуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(t)x(t) + g(t), \tag{2}$$

всі розв'язки якої будуть розв'язками системи рівнянь (1) при $t \in (t_*, +\infty)$ (або при $t \in (-\infty, t_*)$). Під розв'язком рівняння (1) на деякому інтервалі розуміємо неперервно диференційовну вектор-функцію, для якої (1) виконується в кожній точці цього інтервалу.

Будемо припускати, що $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — $(n \times n)$-матричні, $f(t)$, $g(t)$ — векторні функції, визначені і неперервні при $t \in \mathbb{R}$. Тут символом $\|A\|$ позначено норму матриці $A = (a_{ij})$, яка визначається за допомогою співвідношення $\|A\| = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються такі умови*:

1) $A(t)$, $B(t)$ *і* $f(t)$ — *визначені, неперервні при* $t \in (t_*, +\infty)$ *функції, які задовольняють нерівності*

$$\sup_{t\in(t_*,+\infty)} \|A(t)\| \leq a < \infty, \qquad \sup_{t\in(t_*,+\infty)} \|B(t)\| \leq b < \infty,$$

$$\sup_{t\in(t_*,+\infty)} \|f(t)\| \leq f^* < \infty;$$

2) *існують додатні сталі α і a_1 такі, що*

$$\sup_{t\in(0,+\infty)} \|A(t) - \alpha I\| \leq a_1, \tag{3}$$

$$\alpha - a_1 > 2b, \tag{4}$$

де I — одинична матриця.

Тоді всі розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь (2) *є розв'язками диференціально-функціональної системи рівнянь* (1) *на проміжку $[-L,+\infty) \subset \subset (t_*,+\infty)$, де*

$$L = \max\Big\{\tau \in (0,+\infty)\colon \tau b(1-\lambda)e^{\tau a(1-\lambda)+1} < 1\Big\}. \tag{5}$$

Слід зауважити, що твердження про те, що розв'язки системи рівнянь (2) задовольняють систему рівнянь (1) на проміжку $(0,+\infty)$, має місце без додаткових обмежень на величину параметра λ.

2. *Доведення теореми* 1. Доведення розіб'ємо на кілька частин.

2.1. Спочатку з припущення, що всі розв'язки системи (2) є розв'язками на $(t_*,+\infty)$ системи (1), виведемо для $C(t)$ і $g(t)$ рівняння вигляду

$$C(t) = A(t) + B(t)\Omega_t^{\lambda t}(C), \quad t \in (t_*,+\infty),$$

$$g(t) = f(t) + B(t)\int_t^{\lambda t} \Omega_s^{\lambda t}(C)g(s)ds, \quad t \in (t_*,+\infty),$$

а потім встановимо розв'язність цих рівнянь. Тут $\Omega_\tau^t(C)$ – нормована фундаментальна матриця розв'язків однорідної системи рівнянь, яка відповідає системі рівнянь (2) та обчислюється за формулою [2]

$$\Omega_\tau^t(C) = I + \int_\tau^t C(s)ds + \int_\tau^t C(s)\int_\tau^s C(s_1)ds_1 ds + \ldots$$

$$\ldots + \int_\tau^t C(s)\int_\tau^s C(s_1)\ldots\int_\tau^{s_{n-2}} C(s_{n-1})ds_{n-1}\ldots ds_1 ds + \ldots, \tag{6}$$

де I — одинична матриця, $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$. Ряд (6) збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, причому рівномірно по (t,τ) на кожному компакті площини $\mathbb{R}^2$. Загальний розв'язок системи рівнянь (2), як відомо, подається формулою Коші

$$x(t) = \Omega_\tau^t(C)x_0 + \int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds, \tag{7}$$

де $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — довільний сталий вектор.

Функція (7) задовольняє рівняння (1) при $t \in (t_*, +\infty)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{dx}{dt} = C(t)\left[\Omega_\tau^t(C)x_0 + \int\limits_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds\right] + g(t) =$$

$$= A(t)\left[\Omega_\tau^t(C)x_0 + \int\limits_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds\right] +$$

$$+B(t)\left[\Omega_\tau^{\lambda t}(C)x_0 + \int\limits_\tau^{\lambda t} \Omega_s^{\lambda t}(C)g(s)ds\right] + f(t). \tag{8}$$

При $x_0 = 0$ з тотожності (8) маємо

$$C(t)\int\limits_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds + g(t) = A(t)\int\limits_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds +$$

$$+B(t)\int\limits_\tau^{\lambda t} \Omega_s^{\lambda t}(C)g(s)ds + f(t), \quad t \in (t_*, +\infty), \tag{9}$$

і тому із (8), (9) отримуємо рівняння

$$C(t)\Omega_\tau^t(C) = A(t)\Omega_\tau^t(C) + B(t)\Omega_\tau^{\lambda t}(C).$$

Із властивостей матриці $\Omega_\tau^t(C)$ відомо, що $\Omega_\tau^t(C)\Omega_t^\tau(C) = \Omega_t^t(C) = I$ і $\Omega_\tau^{\lambda t}(C)\Omega_t^\tau(C) = \Omega_t^{\lambda t}(C)$. Звідси випливає, що останнє рівняння для функції C виконується лише тоді, коли

$$C(t) = A(t) + B(t)\Omega_t^{\lambda t}(C), \quad t \in (t_*, +\infty). \tag{10}$$

Підставляючи (10) в (9), робимо висновок, що тотожність виконується в тому і лише в тому випадку, коли для $t \in (t_*, +\infty)$

$$\big(A(t) + B(t)\Omega_t^{\lambda t}(C)\big)\int\limits_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds + g(t) =$$

$$= A(t)\int\limits_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds + B(t)\int\limits_\tau^{\lambda t} \Omega_s^{\lambda t}(C)g(s)ds + f(t),$$

тобто

$$g(t) = f(t) + B(t)\left[\int\limits_\tau^{\lambda t} \Omega_s^{\lambda t}(C)g(s)ds - \Omega_t^{\lambda t}(C)\int\limits_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds\right] =$$

$$= f(t) + B(t)\left[\int\limits_\tau^{\lambda t} \Omega_s^{\lambda t}(C)g(s)ds - \int\limits_\tau^t \Omega_s^{\lambda t}(C)g(s)ds\right] =$$

$$= f(t) + B(t) \int_{t}^{\lambda t} \Omega_s^{\lambda t}(C) g(s) ds.$$

Таким чином, якщо всі розв'язки системи рівнянь (2) є розв'язками системи рівнянь (1) на $(t_*, +\infty)$, то матриця $C(t)$ задовольняє рівняння (10), а вектор-функція $g(t)$ — рівняння

$$g(t) = f(t) + B(t) \int_{t}^{\lambda t} \Omega_s^{\lambda t}(C) g(s) ds, \quad t \in (t_*, +\infty). \tag{11}$$

Очевидним є і зворотне. Якщо C, g — неперервні на $(t_*, +\infty)$ функції, які задовольняють рівняння (10), (11), то вектор-функція (7) є розв'язком системи рівнянь (1) на $(t_*, +\infty)$.

Отже, розв'язність рівнянь (10), (11) у просторі неперервних на $(t_*, +\infty)$ функцій є необхідною і достатньою умовою для того, щоб всі розв'язки системи рівнянь (2) були на $(t_*, +\infty)$ розв'язками системи рівнянь (1).

2.2. Визначимо додатне число L за формулою (5). Введемо простір $C(m; J)$ (де J — деякий проміжок) неперервних на J вектор-функцій $z = z(t)$, які задовольняють умову

$$\|z\|_0 = \sup_{t \in J} \|z(t)\| \leq m,$$

$m = \text{const} > 0$. Відстань $\rho(x, y)$ між елементами x, y з простору $C(m; J)$ означимо за допомогою співвідношення

$$\rho(x, y) = \|x - y\|_0 = \sup_{t \in J} \big\| x(t) - y(t) \big\|. \tag{12}$$

Відносно такої відстані простір $C(m; J)$ є повним метричним простором. Аналогічно визначається простір $C(m; J)$ матричних функцій $Z = Z(t)$, неперервних на J (далі позначаємо його одним і тим самим символом).

Має місце наступна лема про розв'язність рівняння (10).

Лема 1. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді рівняння* (10) *має єдиний неперервний при* $t \in [-L, +\infty)$ *розв'язок, причому цей розв'язок задовольняє нерівність*

$$\sup_{t \in [-L, +\infty)} \|C(t)\| \leq M_1,$$

де M_1 *— певна стала, яка залежить від* α, λ, a, b, a_1.

Доведення. Виконаємо в рівнянні (10) заміну змінних

$$C = A + BY.$$

В результаті отримаємо рівняння

$$B\big[Y - \Omega_t^{\lambda t}(A + BY)\big] = O,$$

звідки

$$Y = \Omega_t^{\lambda t}(A + BY) + B_0(t), \tag{13}$$

де B_0 — матриця, яка визначається умовою $B(t)B_0(t) = O$ (тут символом O позначено нульову матрицю). Відносно змінної

$$Z = Y - B_0$$

рівняння (13) набирає вигляду

$$Z(t) = \Omega_t^{\lambda t}\big(A + BZ\big), \quad t \in (t_*, +\infty). \tag{14}$$

При цьому всі розв'язки рівняння (14) є неперервними функціями. І навпаки, від рівняння (14) заміною змінних

$$C = A + BZ$$

можна повернутися до рівняння (10). Розглянемо два випадки.

Перший випадок. Розглянемо проміжок $[-L, L] \subset (t_*, +\infty)$. У просторі $C(m; [-L, L])$ матричних функцій $Z = Z(t)$ розглянемо оператор S:

$$SZ(t) = \Omega_t^{\lambda t}\big(A + BZ\big), \tag{15}$$

$t \in [-L, L]$. Матриця SZ є неперервною на $[-L, L]$ матрицею.

Спочатку покажемо, що оператор S переводить $C(m; [-L, L])$ в себе. На підставі (6) для SZ справджується оцінка

$$\big\|SZ(t)\big\| = \big\|\Omega_t^{\lambda t}(A + BZ)\big\| \leq \Big|\Omega_t^{\lambda t}\big(\|A\| + \|B\|\|Z\|\big)\Big| \leq e^{(a+bm)(1-\lambda)|t|}$$

при $t \in [-L, L]$ і, отже,

$$\|SZ\|_0 \leq e^{(a+bm)(1-\lambda)L}.$$

Тому, якщо виконується нерівність

$$e^{(a+bm)(1-\lambda)L} \leq m, \tag{16}$$

то оператор S: $C(m; [-L, L]) \to C(m; [-L, L])$.

Покажемо, що оператор S є оператором стиску. Для матриць Z_1 і Z_2, які належать простору $C(m; [-L, L])$, оцінимо різницю

$$SZ_1(t) - SZ_2(t) = \Omega_t^{\lambda t}(A + BZ_1) - \Omega_t^{\lambda t}(A + BZ_2).$$

Позначивши $P_1 = A + BZ_1$, $P_2 = A + BZ_2$, при $t \in [-L, L]$ отримаємо

$$\left\| \int_t^{\lambda t} P_1(s)ds - \int_t^{\lambda t} P_2(s)ds \right\| \leq \left| \int_t^{\lambda t} \|P_1(s) - P_2(s)\| ds \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_t^{\lambda t} \|B(s)\| \|Z_1(s) - Z_2(s)\| ds \right| \leq b(1-\lambda)|t| \|Z_1 - Z_2\|_0,$$

$$\left\| \int\limits_t^{\lambda t} P_1(s) \int\limits_t^{s} P_1(s_1) ds_1 ds - \int\limits_t^{\lambda t} P_2(s) \int\limits_t^{s} P_2(s_1) ds_1 ds \right\| \le$$

$$\le \left\| \int\limits_t^{\lambda t} \big[P_1(s) - P_2(s)\big] \int\limits_t^{s} P_1(s_1) ds_1 ds + \int\limits_t^{\lambda t} P_2(s) \int\limits_t^{s} \big[P_1(s_1) - P_2(s_1)\big] ds_1 ds \right\| \le$$

$$\le b \left[\left| \int\limits_t^{\lambda t} \int\limits_t^{s} \big\|P_1(s_1)\big\| ds_1 ds \right| + \left| \int\limits_t^{\lambda t} \big\|P_2(s)\big\| \int\limits_t^{s} ds_1 ds \right| \right] \|Z_1 - Z_2\|_0 \le$$

$$\le b(a+bm) \left[2 \left| \int\limits_t^{\lambda t} (s-t) ds \right| \right] \|Z_1 - Z_2\|_0 =$$

$$= b(a+bm)|t|^2(1-\lambda)^2 \|Z_1 - Z_2\|_0 =$$

$$= (1-\lambda) b |t| \frac{|t|(1-\lambda)(a+bm)}{1!} \|Z_1 - Z_2\|_0,$$

$$\left\| \int\limits_t^{\lambda t} P_1(s) \int\limits_t^{s} P_1(s_1) \ldots \int\limits_t^{s_{n-2}} P_1(s_{n-1}) ds_{n-1} \ldots ds_1 ds - \right.$$

$$\left. - \int\limits_t^{\lambda t} P_2(s) \int\limits_t^{s} P_2(s_1) \ldots \int\limits_t^{s_{n-2}} P_2(s_{n-1}) ds_{n-1} \ldots ds_1 ds \right\| \le$$

$$\le bn(a+bm)^{n-1} \left| \int\limits_t^{\lambda t} \int\limits_t^{s} \ldots \int\limits_t^{s_{n-2}} ds_{n-1} \ldots ds_1 ds \right| \|Z_1 - Z_2\|_0 =$$

$$= bn \frac{|t|^n (1-\lambda)^n (a+bm)^{n-1}}{n!} \|Z_1 - Z_2\|_0 =$$

$$= (1-\lambda) b |t| \frac{|t|^{n-1} (1-\lambda)^{n-1} (a+bm)^{n-1}}{(n-1)!} \|Z_1 - Z_2\|_0.$$

Тому виконується оцінка

$$\big\|SZ_1(t) - SZ_2(t)\big\| = \Big\|\Omega_t^{\lambda t}(A + BZ_1) - \Omega_t^{\lambda t}(A + BZ_2)\Big\| \le$$

$$\le |t|(1-\lambda) b \left[1 + \frac{|t|(1-\lambda)(a+bm)}{1!} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{|t|^{n-1}(1-\lambda)^{n-1}(a+bm)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots \right] \|Z_1 - Z_2\|_0 =$$

$$= |t|(1-\lambda) b e^{|t|(1-\lambda)(a+bm)} \|Z_1 - Z_2\|_0. \qquad (17)$$

Отже, при $t \in [-L, L]$

$$\|SZ_1 - SZ_2\|_0 \leq L(1-\lambda)be^{L(1-\lambda)(a+bm)}\|Z_1 - Z_2\|_0$$

і, якщо виконується нерівність

$$L(1-\lambda)be^{L(1-\lambda)(a+bm)} < 1, \tag{18}$$

оператор S є оператором стиску на $C(m;[-L,L])$.

Знайдемо m, при яких нерівності (16) і (18) виконуються одночасно. Нехай

$$L(1-\lambda)be^{aL(1-\lambda)+1} < 1, \tag{19}$$

тоді рівняння $e^{L(1-\lambda)(a+bm)} = m$ має 2 розв'язки m_1 і m_2 такі, що $b(1-\lambda)Lm_1 < < 1 < b(1-\lambda)Lm_2$. Звідси випливає, що за умови

$$m_1 \leq m \leq \frac{1}{b(1-\lambda)L} \tag{20}$$

будуть виконуватись одночасно нерівності (16) і (18).

Отже, при виконанні нерівності (19) для значень m, які задовольняють нерівність (20), оператор S відображає $C(m;[-L,L])$ в себе і є оператором стиску. Таким чином, у просторі $C(m;[-L,L])$ оператор S має єдину нерухому точку. Ця нерухома точка і є єдиним неперервним на $[-L,L]$ розв'язком рівняння (14).

Другий випадок. Розглянемо проміжок $(0,+\infty) \subset (t_*,+\infty)$ і оператор S, який визначено формулою (15) у повному метричному просторі $C(1;(0,+\infty))$ з метрикою (12). Матриця SZ є неперервною на $(0,+\infty)$ матрицею.

Покажемо, що оператор S переводить простір $C(1;(0,+\infty))$ в себе і є оператором стиску. Повернемося до рівняння (14). Використовуючи властивість матриціанта [2]

$$\Omega_\tau^t(P+Q) = \Omega_\tau^t(P)\Omega_\tau^t(R),$$

де $R = \left[\Omega_\tau^t(P)\right]^{-1}Q\Omega_\tau^t(P)$, $t,\tau \in (0,+\infty)$, виконуємо такі перетворення:

$$Z(t) = \Omega_t^{\lambda t}\big(A+BZ\big) = \Omega_t^{\lambda t}\big(\alpha I + A - \alpha I + BZ\big) =$$

$$= e^{-\alpha(1-\lambda)t}\Omega_t^{\lambda t}\big(A - \alpha I + BZ\big) = e^{-\alpha(1-\lambda)t}\Omega_t^{\lambda t}\big(A_1 + BZ\big),$$

де $A_1 = A - \alpha I$. Звідси

$$SZ(t) = e^{-\alpha(1-\lambda)t}\Omega_t^{\lambda t}\big(A_1 + BZ\big), \quad t \in (0,+\infty).$$

На підставі (3) при $t \in (0,+\infty)$ справджується оцінка

$$\big\|SZ(t)\big\| = \Big\|e^{-\alpha(1-\lambda)t}\Omega_t^{\lambda t}\big(A_1+BZ\big)\Big\| \leq e^{-\alpha(1-\lambda)t}\left|\Omega_t^{\lambda t}\big(\|A_1\| + \|B\|\|Z\|\big)\right| \leq$$

$$\leq e^{-\alpha(1-\lambda)t}e^{(a_1+b)(1-\lambda)t} = e^{(-\alpha+a_1+b)(1-\lambda)t}.$$

Звідси випливає, що при виконанні умови

$$-\alpha + a_1 + b < 0 \tag{21}$$

для довільної неперервної на $(0,+\infty)$ матричної функції Z виконується нерівність

$$\|SZ\|_0 \leq 1$$

і, отже, S: $C\big(1;(0,+\infty)\big) \to C\big(1;(0,+\infty)\big)$.

Тепер оцінимо різницю $SZ_1 - SZ_2$, де матриці Z_1 і Z_2 належать простору $C\big(1;(0,+\infty)\big)$. Тоді

$$SZ_1(t) - SZ_2(t) = e^{-\alpha(1-\lambda)t}\Big[\Omega_t^{\lambda t}(A_1 + BZ_1) - \Omega_t^{\lambda t}(A_1 + BZ_2)\Big]$$

при $t \in (0,+\infty)$. Аналогічно до оцінки (17) отримуємо

$$\big\|\Omega_t^{\lambda t}(A_1 + BZ_1) - \Omega_t^{\lambda t}(A_1 + BZ_2)\big\| \leq$$

$$\leq |t|(1-\lambda)b\Bigg[1 + \frac{|t|(1-\lambda)(a_1+b)}{1!} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{|t|^{n-1}(1-\lambda)^{n-1}(a_1+b)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\Bigg]\|Z_1 - Z_2\|_0 =$$

$$= |t|(1-\lambda)be^{|t|(1-\lambda)(a_1+b)}\|Z_1 - Z_2\|_0, \quad t \in (0,+\infty).$$

Отже, при $t \in (0,+\infty)$ маємо

$$\big\|SZ_1(t) - SZ_2(t)\big\| \leq t(1-\lambda)be^{t(1-\lambda)(-\alpha+a_1+b)}\|Z_1 - Z_2\|_0.$$

Будемо вимагати, щоб нерівність

$$t(1-\lambda)be^{t(1-\lambda)(-\alpha+a_1+b)} < 1 \tag{22}$$

виконувалась при всіх значеннях $t \in (0,+\infty)$.

Розглянемо функцію $v(t) = t(1-\lambda)be^{t(1-\lambda)(-\alpha+a_1+b)}$ і знайдемо умови, при яких нерівність $v(t) < 1$ виконується для всіх значень $t \in (0,+\infty)$. Для цього достатньо виконання умови $v(t_{\max}) < 1$. Оскільки

$$v'(t) = (1-\lambda)be^{(1-\lambda)(-\alpha+a_1+b)t}\big(1 + (1-\lambda)(-\alpha+a_1+b)t\big),$$

то

$$t_{\max} = \frac{1}{(1-\lambda)(\alpha - a_1 - b)},$$

$$\max_{t\in(0,+\infty)} v(t) = v(t_{\max}) = \frac{b}{(\alpha - a_1 - b)e}.$$

Тому $v(t_{\max}) < 1$, якщо виконується умова

$$b < e(\alpha - a_1 - b). \tag{23}$$

Очевидно, що з (4), зокрема, випливає (21) і (23). Отже, якщо має місце (4), то нерівність (22) виконується при всіх $t \in (0,+\infty)$.

Таким чином, оператор S відображає $C\big(1;(0,+\infty)\big)$ в себе і є оператором стиску в $C\big(1;(0,+\infty)\big)$, тому в просторі $C(1;(0,+\infty))$ він має єдину нерухому точку, яка і є єдиним неперервним на $(0,+\infty)$ розв'язком рівняння (14).

Отже, якщо виконуються умови леми, то рівняння (14) має єдиний при $t \in \in [-L,+\infty)$ розв'язок.

Лему 1 доведено.

Перейдемо до розгляду рівняння (11).

Лема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді рівняння* (11) *має єдиний неперервний при* $t \in [-L,+\infty)$ *розв'язок, причому цей розв'язок задовольняє нерівність*

$$\sup_{t\in[-L,+\infty)} \|g(t)\| \le M_2,$$

де M_2 *— певна стала, яка залежить від* α, λ, a, b, a_1.

Доведення. Виконуючи в (11) заміну змінних

$$g = f + Bz,$$

отримуємо відносно z рівняння

$$z(t) = \int\limits_t^{\lambda t} \Omega_s^{\lambda t}(C) f(s) ds + \int\limits_t^{\lambda t} \Omega_s^{\lambda t}(C) B(s) z(s) ds \tag{24}$$

при $t \in (0,+\infty)$. Розглянемо два випадки.

Перший випадок. Розглянемо проміжок $[-L,L] \subset (t_*,+\infty)$, де L — число, визначене формулою (5). У просторі $C\big(M;[-L,L]\big)$ векторних функцій $z=z(t)$ розглянемо оператор S_1:

$$S_1 z(t) = \int\limits_t^{\lambda t} \Omega_s^{\lambda t}(C) f(s) ds + \int\limits_t^{\lambda t} \Omega_s^{\lambda t}(C) B(s) z(s) ds. \tag{25}$$

Вектор-функція $S_1 z$ є неперервною на $[-L,L]$. Спочатку покажемо, що оператор S_1 переводить $C\big(M;[-L,L]\big)$ в себе. Дійсно, для $S_1 z$ справджується оцінка

$$\big\|S_1 z(t)\big\| = \left\| \int\limits_t^{\lambda t} \Omega_s^{\lambda t}(C)\big(f(s) + B(s) z(s)\big) ds \right\| \le$$

$$\le \left| \int\limits_t^{\lambda t} \|\Omega_s^{\lambda t}(C)\| \big(\|f(s)\| + \|B(s)\| \|z(s)\|\big) ds \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_t^{\lambda t} e^{(a+bm)|\lambda t - s|} ds \right| (f^* + bM) \le$$

$$\le (f^* + bM) \left[\frac{e^{(a+bm)(1-\lambda)|t|} - 1}{a+bm} \right] \le$$

$$\leq (f^* + bM)(1-\lambda)|t|e^{(a+bm)(1-\lambda)|t|}.$$

Звідси при $t \in [-L, L]$ одержуємо

$$\|S_1 z\|_0 \leq (f^* + bM)(1-\lambda)Le^{(a+bm)(1-\lambda)L},$$

а тому, якщо виконується нерівність

$$(f^* + bM)(1-\lambda)Le^{(a+bm)(1-\lambda)L} \leq M, \tag{26}$$

то $S_1\colon C\big(M;[-L,L]\big) \to C\big(M;[-L,L]\big)$.

Покажемо, що оператор S_1 є оператором стиску. Для довільних векторних функцій z_1, z_2 з $C\big(M;[-L,L]\big)$ оцінимо різницю

$$S_1z_1(t) - S_1z_2(t) = \int\limits_t^{\lambda t} \Omega_s^{\lambda t}(C)f(s)ds + \int\limits_t^{\lambda t} \Omega_s^{\lambda t}(C)B(s)z_1(s)ds -$$

$$- \int\limits_t^{\lambda t} \Omega_s^{\lambda t}(C)f(s)ds - \int\limits_t^{\lambda t} \Omega_s^{\lambda t}(C)B(s)z_2(s)ds =$$

$$= \int\limits_t^{\lambda t} \Omega_s^{\lambda t}(C)B(s)\big(z_1(s) - z_2(s)\big)ds. \tag{27}$$

При $t \in [-L, L]$ маємо

$$\big\|S_1z_1(t) - S_1z_2(t)\big\| \leq \left|\int\limits_t^{\lambda t} \|\Omega_s^{\lambda t}(C)\|\|B(s)\|ds\right| \|z_1 - z_2\|_0 \leq$$

$$\leq b\left|\int\limits_t^{\lambda t} \|\Omega_s^{\lambda t}(C)\|ds\right| \|z_1 - z_2\|_0 \leq b(1-\lambda)|t|e^{(a+bm)(1-\lambda)|t|}\|z_1 - z_2\|_0.$$

Таким чином, звідси випливає

$$\|S_1z_1 - S_1z_2\|_0 \leq (1-\lambda)bLe^{(a+bm)(1-\lambda)L}\|z_1 - z_2\|_0$$

і, якщо виконується нерівність

$$(1-\lambda)bLe^{(a+bm)(1-\lambda)L} < 1, \tag{28}$$

оператор S_1 є оператором стиску в $C\big(M;[-L,L]\big)$. Будемо вимагати, щоб одночасно виконувалися нерівності (26) і (28). Враховуючи (28), із (26) одержуємо

$$(1-\lambda)f^*Le^{(a+bm)(1-\lambda)L} \leq M\left(1 - (1-\lambda)bLe^{(a+bm)(1-\lambda)L}\right),$$

тобто при

$$M \geq \frac{(1-\lambda)f^*Le^{(a+bm)(1-\lambda)L}}{\big(1 - (1-\lambda)bLe^{(a+bm)(1-\lambda)L}\big)}$$

для значень $m,$ які задовольняють (20), оператор S_1 при виконанні умови (19) відображає $C\big(M;[-L,L]\big)$ в себе і є оператором стиску. Отже, у просторі $C\big(M;[-L,L]\big)$ оператор S_1 має єдину нерухому точку, яка і є єдиним неперервним на $[-L,L]$ розв'язком рівняння (24).

Другий випадок. Розглянемо в повному метричному просторі $C\big(M;(0,+\infty)\big)$ оператор S_1, визначений формулою (25). Вектор-функція S_1z є неперервною на $(0,+\infty)$ функцією. Мають місце такі оцінки:

$$\big\|S_1z(t)\big\| \le \left|\int\limits_t^{\lambda t} \|\Omega_s^{\lambda t}(C)\|\big(\|f(s)\| + \|B(s)\|\|z(s)\|\big)ds\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_t^{\lambda t} \|\Omega_s^{\lambda t}(C)\|ds\right|(f^* + bM) \le (f^* + bM)\int\limits_{\lambda t}^{t} e^{(-\alpha+a_1+b)(s-\lambda t)}ds =$$

$$= \frac{e^{(-\alpha+a_1+bm)(1-\lambda)t} - 1}{-\alpha + a_1 + b}(f^* + bM) < \frac{1}{\alpha - a_1 - b}(f^* + bM)$$

при $t \in (0,+\infty)$. Будемо вимагати, щоб виконувалась нерівність

$$\frac{f^* + bM}{\alpha - a_1 - b} \le M. \tag{29}$$

Очевидно, що із (29) випливає (21) і, отже, при виконанні умови (29) оператор S_1 переводить простір $C\big(M;(0,+\infty)\big)$ в себе.

Покажемо, що S_1 — оператор стиску в $C\big(M;(0,+\infty)\big)$. Нехай z_1, z_2 — довільні функції з $C\big(M;(0,+\infty)\big)$, тоді із (27) при $t \in (0,+\infty)$ маємо

$$\big\|S_1z_1(t) - S_1z_2(t)\big\| \le \left|\int\limits_t^{\lambda t} \|\Omega_s^{\lambda t}(C)\|\|B(s)\|ds\right| \|z_1 - z_2\|_0 \le$$

$$\le b\left|\int\limits_t^{\lambda t} \big\|\Omega_s^{\lambda t}(C)\big\|ds\right| \|z_1 - z_2\|_0 < b\frac{1}{\alpha - a_1 - b}\|z_1 - z_2\|_0.$$

Тому на підставі (4) оператор S_1 є оператором стиску в $C\big(M;(0,+\infty)\big)$. Очевидно, що з (4) випливає (29).

При одночасному виконанні умов (29), (4) маємо, що при

$$M \ge \frac{f^*}{\alpha - a_1 - 2b}$$

оператор S_1 відображає $C\big(M;(0,+\infty)\big)$ в себе і є оператором стиску в просторі $C\big(M;(0,+\infty)\big)$. Тому в просторі $C\big(M;(0,+\infty)\big)$ оператор S_1 має єдиний неперервний на $(0,+\infty)$ розв'язок рівняння (24).

Таким чином, якщо виконуються умови леми 2, то при $t \in [-L,+\infty)$ існує єдиний неперервний розв'язок рівняння (24). Це і доводить лему 2.

3. Згідно з пп. 2.1, для встановлення теореми 1 необхідно і достатньо довести, що кожне рівняння (10), (11) має єдиний неперервний на $[-L,+\infty)$ розв'язок. Враховуючи леми 1, 2, завершуємо доведення теореми 1.

3. Як і в п. 1, зазначимо, що з використанням аналогічних міркувань можна довести наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови*:

1) $A(t)$, $B(t)$ *і* $f(t)$ — *визначені, неперервні при* $t \in (-\infty, t_*)$ *функції, які задовольняють нерівності*

$$\sup_{t\in(-\infty,t_*)} \|A(t)\| \le a < \infty, \qquad \sup_{t\in(-\infty,t_*)} \|B(t)\| \le b < \infty,$$

$$\sup_{t\in(-\infty,t_*)} \|f(t)\| \le f^* < \infty;$$

2) *існують сталі* $\beta < 0$ *і* $a_1 > 0$ *такі, що*

$$\sup_{t\in(-\infty,0)} \|A(t) - \beta I\| \le a_1, \qquad -\beta - a_1 > 2b.$$

Тоді всі розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь (2) *є розв'язками диференціально-функціональної системи рівнянь* (1) *на проміжку* $(-\infty, L] \subset (-\infty, t_*)$, *де* L — *стала, визначена формулою* (5).

Зауважимо, що твердження про те, що розв'язки системи рівнянь (2) задовольняють систему рівнянь (1) на $(-\infty, 0)$, має місце без додаткових обмежень на величину параметра λ.

При доведенні теореми 2 використовується наступна лема.

Лема 3. *Нехай виконуються умови теореми* 2. *Тоді кожне з рівнянь* (10), (11) *має єдиний неперервний на* $(-\infty, L]$ *розв'язок, причому ці розв'язки задовольняють нерівності*

$$\sup_{t\in(-\infty,L]} \|C(t)\| \le N_1, \qquad \sup_{t\in(-\infty,L]} \|g(t)\| \le N_2,$$

де N_1, N_2 — *деякі сталі, які залежать від* β, λ, a, b, a_1.

***Наслідок лем* 1, 2, 3.** *Нехай виконуються умови теореми* 1 (*або теореми* 2) *і* A, B *і* f *є* r *разів неперервно диференційовними на* $(t_*, +\infty)$ (*або на* $(-\infty, t_*)$) *функціями. Тоді розв'язки* C, g *рівнянь* (10), (11) *є* r *разів неперервно диференційовними на проміжку* $[-L, +\infty)$ (*або на* $(-\infty, L]$) *функціями.*

Доведення. З рівнянь (14), (24) випливає, що їх розв'язки мають гладкість на одиницю більшу, ніж гладкість функцій A, B і f. Тому функції C і g, які визначені відповідно до формул (14), (24), мають гладкість функцій A, B, f.

З огляду на даний наслідок можемо стверджувати, що має місце наступна теорема про гладкість розв'язків системи рівнянь (1).

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми* 1 (*або теореми* 2) *і* A, B *і* f *є* r *разів неперервно диференційовними на* $(t_*, +\infty)$ (*або на* $(-\infty, t_*)$) *функціями. Тоді розв'язки системи рівнянь* (1) *будуть* $r+1$ *раз неперервно диференційовними на проміжку* $[-L, +\infty)$ (*або на* $(-\infty, L]$) *функціями.*

Доведення даної теореми випливає з наведеного вище наслідку. Оскільки функції C і g є r разів неперервно диференційовними на $[-L, +\infty)$ (або на $(-\infty, L]$) функціями, то будь-який розв'язок системи рівнянь (2) має неперервні похідні по t до $(r+1)$-го порядку. А оскільки, за припущенням, всі розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь (2) є розв'язками системи рівнянь (1), то ці розв'язки будуть $r+1$ раз неперервно диференційовними на $[-L,+\infty)$ (або на $(-\infty, L]$) функціями.

1. *Самойленко А. М.* Об одной задаче исследования глобальных решений линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 5. – С. 631 – 640.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
3. *Kato T., McLeod J.B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – **77**. – P. 891 – 937.
4. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 737 – 747.
5. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 216 с.
6. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 412 с.

Одержано 29.11.2006