УДК 517.91

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ КНЕЗЕРА ПРО НУЛІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ $y'' + p(t)y = 0$

We obtain conditions of the oscillation of solutions of the equation $y'' + p(t)Ay = 0$ in the Banach space, where A is a bounded linear operator and $p\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ is a continuous function.

Получены условия осцилляции решений уравнения $y'' + p(t)Ay = 0$ в банаховом пространстве, где A — ограниченный линейный оператор и $p\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция.

У теорії диференціальних рівнянь важливе значення має встановлена Кнезером теорема.

Теорема 1 [1, 2]. *Якщо в рівнянні*

$$y'' + p(t)y = 0 \tag{1}$$

коефіцієнт $p(t)$ *задовольняє умову*

$$0 < p(t) \leq \frac{1}{4t^2}, \quad t \geq t_0 > 0,$$

то його ненульовий розв'язок не може мати нескінченне число нулів в інтервалі $(t_0, +\infty)$. *Якщо*

$$p(t) > \frac{1+\alpha}{4t^2}, \qquad \alpha > 0, \quad t \geq t_1 > 0,$$

то кожний ненульовий розв'язок має нескінченну множину нулів в інтервалі $(t_1, +\infty)$.

Хілл [3] і Ф. Хартман [4] звернули увагу на те, що теорема Кнезера зберігається, якщо в цій теоремі функції

$$p_1(t,0) = \frac{1}{4t^2} \qquad \text{і} \qquad p_1(t,\alpha) = \frac{1+\alpha}{4t^2}$$

замінити відповідно функціями $p_n(t,0)$ і $p_n(t,\alpha)$, $n \geq 2$, де

$$p_n(t,\alpha) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{4} + p_{n-1}(\ln t, \alpha)\right), \quad n \geq 2$$

(див. також [5, 6]).

Автором статті було показано, що перша частина твердження теореми Кнезера зберігається, якщо функцію $p_1(t,0)$ замінити функцією $K(t)$, що є сумою функціонального ряду

$$\frac{1}{4(e-1+t)^2} + \frac{1}{4(e-1+t)^2(e-1+\ln(e-1+t))^2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{4e^{2n}(Q_{n-1}(t))^2} + \ldots,$$

де

$$Q_k(t) = \prod_{n=0}^{k} v_n(t)$$

і

$$v_0(t) = \frac{e - 1 + t}{e},$$

$$v_n(t) = \frac{e - 1 + \ln(ev_{n-1}(t))}{e}, \quad n \geq 1.$$

Теорема 2 [7]. *Якщо в рівнянні* (1) *коефіцієнт* $p(t)$ *задовольняє умову*

$$0 < p(t) \leq K(t), \quad t \geq t_0 \geq 1, \tag{2}$$

то його ненульовий розв'язок не може мати нескінченне число нулів в інтервалі $(t_0, +\infty)$. *Якщо для деякого* $n \in \mathbb{N}$

$$\varliminf_{t \to +\infty} (p(t) - K(t))(Q_n(t))^2 > 0, \tag{3}$$

то кожний ненульовий розв'язок рівняння (1) *має нескінченну множину нулів в кожному інтервалі* $(t_1, +\infty)$ *(*t_1 *— досить велике додатне число*).

Зазначимо, що для кожного цілого $n \geq 0$ справджується співвідношення $K(t) > p_n(t, 0)$ для всіх досить великих t.

Метою цієї статті є узагальнення теореми 2 на випадок диференціального рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)Ay = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4}$$

де $A\colon E \longrightarrow E$ — обмежений лінійний оператор (E — дійсний банахів простір) і $p\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ — неперервна функція ($\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$).

Нехай E_1 — підпростір банахового простору E, ковимірність $\operatorname{codim} E_1$ якого дорівнює 1. Позначимо через φ ненульовий лінійний функціонал на E, ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ якого збігається з E_1.

Означення 1. *Розв'язок* $x(t)$ *рівняння* (4) *називається осцилюючим* (*коливним*) *відносно* E_1, *якщо для кожного числа* $a > 0$ *існують такі числа* $t_1, t_2 \in (a, +\infty)$, *що*

$$\varphi(x(t_1))\varphi(x(t_2)) < 0.$$

Означення 2. *Розв'язок* $x(t)$ *рівняння* (4) *називається осцилюючим відносно* E_1, *якщо*

$$\{x(t) \in E\colon t > a\} \setminus E_1 \neq \varnothing$$

і

$$\{t\colon x(t) \in E_1, t > a\} \neq \varnothing$$

для кожного числа $a > 0$.

Очевидно, що означення 1 і 2 не рівносильні.

Зазначимо, що осциляція відносно E_1 розв'язків різних класів еволюційних рівнянь досліджувалась у роботах [8 – 15].

Розглянемо множини

$$E_2 = \{x \in E\colon \varphi(x) < 0\},$$

$$E_3 = \{x \in E\colon \varphi(x) > 0\}.$$

Теорема 3. *Нехай* $AE_k \subset E_k$, $k = \overline{2,3}$.

Якщо для всіх $x \in E_3$

$$\varphi(Ax) \le \varphi(x) \tag{5}$$

і в рівнянні (4) *коефіцієнт* $p(t)$ *задовольняє умову*

$$0 < p(t) \le K(t), \quad t \ge t_0 \ge 1,$$

то кожний розв'язок цього рівняння не є осцилюючим у сенсі означення 2.

Якщо для всіх $x \in E_3$

$$\varphi(Ax) \ge \varphi(x) \tag{6}$$

і для деякого натурального числа n

$$\varliminf_{t\to+\infty} \big(p(t) - K(t)\big)(Q_n(t))^2 > 0,$$

то кожний розв'язок $y(t)$ *рівняння* (4), *для якого*

$$\varphi(y(t)) \not\equiv 0,$$

є осцилюючим у сенсі означення 1.

Доведення. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{7}$$

розв'язками якого є векторні функції зі значеннями в банаховому просторі E.

Нехай y_1 і y_2 — довільні розв'язки відповідно рівнянь (4) і (7), для яких

$$\varphi(y_k(t)) \not\equiv 0, \quad k = \overline{1,2}. \tag{8}$$

Тоді

$$\frac{d^2\varphi(y_1(t))}{dt^2} + p(t)\varphi(Ay_1(t)) \equiv 0 \tag{9}$$

і

$$\frac{d^2\varphi(y_2(t))}{dt^2} + p(t)\varphi(y_2(t)) \equiv 0. \tag{10}$$

Оскільки $\varphi(y_2(t)) \not\equiv 0$, то на підставі теореми 2 існує таке число $T > 0$, що

$$\varphi(y_2(t)) \neq 0 \quad \text{для всіх} \quad t \geq T.$$

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що

$$\varphi(y_2(t)) > 0 \quad \text{для всіх} \quad t \geq T. \tag{11}$$

Припустимо, що функція $\varphi(y_1(t))$ є осцилюючою. Тоді для деяких точок t_1, $t_2 \in [T, +\infty)$, $t_1 < t_2$,

$$\varphi\big(y_1(t_1)\big) = \varphi\big(y_1(t_2)\big) = 0 \tag{12}$$

і

$$\varphi(y_1(t)) \neq 0 \quad \text{для всіх} \quad t \in (t_1, t_2). \tag{13}$$

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що

$$\varphi(y_1(t)) > 0 \quad \text{для всіх} \quad t \in (t_1, t_2).$$

Також

$$\varphi(Ay_1(t)) > 0 \quad \text{для всіх} \quad t \in (t_1, t_2) \tag{14}$$

і

$$\varphi(Ay_1(t_1)) = \varphi(Ay_1(t_2)) = 0. \tag{15}$$

Тут враховано співвідношення $AE_k \subset E_k$, $k = \overline{2,3}$. Тому завдяки (9) функція $\varphi(y_1(t))$ є вгнутою на відрізку $[t_1, t_2]$ [16]. Звідси та з неперервної диференційовності функції $\varphi(y_1(t))$ на $[t_1, t_2]$ випливає, що існують такі числа $\alpha_1 > 0$ і $\alpha_2 < 0$, що

$$\varphi(y_1(t)) = \alpha_1(t - t_1) + o(t - t_1) \quad \text{при} \quad t \to t_1 + 0 \tag{16}$$

і

$$\varphi(y_1(t)) = \alpha_2(t_2 - t) + o(t_2 - t) \quad \text{при} \quad t \to t_2 - 0. \tag{17}$$

Із співвідношень (14), (15) та неперервної диференційовності функції $\varphi(Ay_1(t))$ на $[t_1, t_2]$ випливає, що для деяких чисел $\beta_1 \geq 0$ і $\beta_2 \leq 0$

$$\varphi(Ay_1(t)) = \beta_1(t - t_1) + o(t - t_1) \quad \text{при} \quad t \to t_1 + 0$$

і

$$\varphi(Ay_1(t)) = \beta_2(t_2 - t) + o(t_2 - t) \quad \text{при} \quad t \to t_2 - 0.$$

Тому

$$\lim_{t \to t_1 + 0} \frac{\varphi(Ay_1(t))}{\varphi(y_1(t))} = \frac{\beta_1}{\alpha_1},$$

$$\lim_{t \to t_2 - 0} \frac{\varphi(Ay_1(t))}{\varphi(y_1(t))} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$$

і на підставі (16) і (17) функція

$$p_1(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(Ay_1(t))}{\varphi(y_1(t))}, & \text{якщо} \;\; t \in (t_1, t_2), \\ \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}, & \text{якщо} \;\; t = t_1, \\ \dfrac{\beta_2}{\alpha_2}, & \text{якщо} \;\; t = t_2, \end{cases}$$

є неперервною на відрізку $[t_1, t_2]$. Звідси та з тотожності (9) випливає, що функція $\varphi(y_1(t))$ є розв'язком рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p_1(t)x = 0$$

на проміжку $[t_1, t_2]$. Завдяки (5)

$$p_1(t) \leq p(t) \quad \text{для всіх} \quad t \in [t_1, t_2].$$

Тому за теоремою Штурма про розподіл нулів [17] функція $\varphi(y_2(t))$ має хоча б один нуль на $[t_1, t_2]$, що суперечить (11).

Отже, припущення про виконання співвідношень (12) і (13) є хибним, і першу частину твердження теореми обґрунтовано.

Обґрунтуємо другу частину твердження теореми.

Нехай y_1 і y_2 — довільні розв'язки відповідно рівнянь (4) і (7), для яких справджуються співвідношення (9), (10) і (8). Тоді за теоремою 2 функція $\varphi(y_2(t))$ є осцилюючим розв'язком рівняння

$$\frac{d^2z}{dt^2} + p_1(t)z = 0. \tag{18}$$

Припустимо, що для деякого $T > 0$

$$\varphi(y_1(t)) \neq 0 \quad \text{для всіх} \quad t \geq T. \tag{19}$$

Тоді завдяки (9)

$$\frac{d^2\varphi(y_1(t))}{dt^2} + p_2(t)\varphi(y_1(t)) = 0 \quad \text{для всіх} \quad t \geq T,$$

де

$$p_2(t) = p(t)\frac{\varphi(Ay_1(t))}{\varphi(y_1(t))}.$$

Оскільки завдяки (6)

$$p_2(t) \geq p(t) \quad \text{для всіх} \quad t \geq T,$$

то на підставі теореми Штурма про розподіл нулів та осциляції розв'язку $\varphi(y_2(t))$ рівняння (18) функція $\varphi(y_1(t))$ також є осцилюючою, що суперечить (19).

Отже, другу частину твердження теореми також обґрунтовано.

Теорему 3 доведено.

1. *Kneser A.* Untersuchung über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen // Math. Ann. – 1893. – **42**. – S. 409 – 435.
2. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйш. шк., 1974. – 768 с.
3. *Hille E.* Nonoscilation theorems // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – **64**. – P. 234 – 252.
4. *Hartman P.* On the linear logarithmico-exponential equation of the second order // Amer. J. Math. – 1948. – **70**. – P. 764 – 779.
5. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1954. – 216 с.
6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
7. *Слюсарчук В. Е.* Усиление теоремы Кнезера о нулях решений уравнения $y'' + p(x)y = 0$ // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 4. – С. 520 – 524.
8. *Слюсарчук В. Ю.* Осциляція розв'язків диференціальних і диференціально-різницевих рівнянь в банаховому просторі // Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1993. – С. 66 – 70.
9. *Слюсарчук В. Ю.* Осциляція розв'язків диференціальних рівнянь з імпульсною дією в банаховому просторі // Конструктивні методи дослідження диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1993. – С. 174 – 178.
10. *Слюсарчук В. Ю.* Достатні умови осциляції траєкторій імпульсних систем з нефіксованими моментами імпульсної дії // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1994. – С. 192 – 197.
11. *Слюсарчук В. Ю.* Осциляція розв'язків різницевого рівняння $\triangle^2 x(n) + \sum_{k=1}^{m} p_k(n) g_k(x(n)) = 0$ в банаховому просторі // Системи еволюційних рівнянь з післядією: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – С. 98 – 102.
12. *Слюсарчук В. Ю.* Осциляція розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Мат. міжнар. мат. конф., присв. пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С. 269 – 275.
13. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия осцилляции решений нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 1. – С. 98 – 109.
14. *Перестюк М. О., Слюсарчук В. Ю.* Умови існування неколивних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсним збуренням у банаховому просторі // Там же. – 2003. – **55**, № 6. – С. 790 – 798.
15. *Perestyuk N. A., Slyusarchuk V. Yu.* Oscillation of nonlinear differential-integral equation in a Banach space with respect to its subspace // Math. Notes (Publ. Univ. Miskolc). – 2003. – **4**, № 1. – P. 53 – 64.
16. *Ушаков Р. П., Хацет В. І.* Опуклі функції та нерівності. – Київ: Вища шк., 1986. – 112 с.
17. *Sturm C.* Sur les équations différentielles linéaires du second order // J. math. pures et appl. – 1963. – **5**. – P. 128 – 130.

Одержано 22.09.2006