УДК 517.956.45

Ж. О. Тахиров, Р. Н. Тураев
(Ин-т математики и информ. технологий АН Республики Узбекистан, Ташкент)

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕ

We investigate the one-phase Florin problem for a parabolic equation with nonlocal condition. Theorems one the existence and uniqueness of a solution are proved, and a priori estimates for the solution are obtained.

Досліджено однофазну задачу Флоріна з нелокальною умовою для параболічного рівняння. Доведено теореми єдиності та існування розв'язку, отримано апріорні оцінки для розв'язку.

Введение. Теория классической разрешимости задач со свободными границами для параболических уравнений построена в работах Л. Рубинштейна [1], А. Фридмана [2], А. Мейрманова [3], И. Данилюка [4], Б. Базалия [5] и др. Результаты исследований в этой области опубликованы в большом количестве работ. Задачи, возникающие в приложениях и приводящие к задачам со свободной границей, служат моделью для выделения новых направлений. Одной из таких задач является задача Флорина (условие для свободной границы задается в неявной для этой границы форме), которая впервые возникла в гидростроительстве при устройстве противофильтрационных завес, когда в породы основания и береговых примыканий плотин нагнетаются глинистые растворы [6]. Сюда также можно отнести класс задач, которые возникли в связи с задачей об ударе вязкопластического стержня о жесткую преграду [7, 8], а также некоторые биологические модели [9, 10].

Нелокальные условия являются естественным обобщением обычных краевых условий, а задачи имеют конкретные приложения (см., например, [11]). Подобные ситуации имеют место, например, при изучении явлений, происходящих в плазме, при распространении тепла, в газогидродинамике, биологии и т. д. Заметим, что в некоторых случаях существует определенная связь между нелокальными или же обратными задачами и локальными краевыми задачами для нагруженных уравнений [12]. Краевые задачи с интегральными условиями относятся к числу нелокальных задач. Приведем некоторые результаты, более близкие к предмету настоящей статьи. В работах [13, 14] рассмотрены задачи для параболических уравнений с неизвестными коэффициентами в областях с подвижными неизвестными границами, а в [15] исследована двухфазная задача со свободной границей в полуограниченной области для параболического уравнения со степенной нелинейностью. В работах [16, 17] некоторые граничные условия заданы в нелокальной форме.

1. Постановка задачи. Требуется найти пару функций $(s(t), u(t,x))$ такую, что непрерывно дифференцируемая функция $s(t)$ определена на отрезке $0 \le t \le T$, $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \le N$, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x)\colon 0 < t \le T,\ 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_{xx}(t,x) = u_t(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

с начальными

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le s_0, \tag{2}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

и граничными

$$\alpha u(t,x_0) = u(t,s(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$u_x(t,s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

условиями.

Условие (5) обеспечивает отсутствие потока через подвижную границу, а нелокальное условие (4) поддерживает согласованность граничного режима на неизвестной границе с процессом внутри области.

Всюду в работе предполагаем, что для заданных функций и постоянных выполнены следующие основные условия:

1) положительные постоянные x_0, α удовлетворяют неравенствам $0 < x_0 < s_0$, $0 < \alpha < 1$;

2) функция $\varphi(x)$ четырежды, а функция $\psi(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы и тождественно не равны нулю;

3) выполнены условия согласования в угловых точках (в том числе в рассматриваемых вспомогательных задачах). В частности,

$$\varphi(0) = \psi(0), \quad \alpha\varphi(x_0) = \varphi(s_0), \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi^{(IV)}(0) = \psi''(0).$$

2. Априорные оценки. Сначала установим некоторые априорные оценки для решений $s(t)$, $u(t,x)$ и их производных. Далее на основе этих оценок исследуем поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, докажем единственность решения и глобальную разрешимость задачи. Для этого задачу (1) – (5) сведем к эквивалентной задаче (типа Стефана) для функций $s(t)$, $u_t(t,x)$.

Обозначим $u_t(t,x) = v(t,x)$, тогда из задачи (1) – (5) получим

$$v_{xx}(t,x) = v_t(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{6}$$

$$v(0,x) = \varphi''(x), \quad 0 \le x \le s_0, \tag{7}$$

$$v(t,0) = \psi'(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$\alpha v(t,x_0) = v(t,s(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{9}$$

$$v(t,s(t))\dot{s}(t) = -v_x(t,s(t)), \quad 0 \le t \le T. \tag{10}$$

Лемма 1. *Пусть* $\varphi(x) \ge 0$, $\varphi''(x) > 0$, $\psi(t) \ge 0$, $\psi'(t) > 0$ *и выполнены условия* 1 – 3. *Тогда* $0 \le u(t,x) \le M_1$, $0 < \varphi''(s_0) \le u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) = v(t,x) \le M_2$, $u_x(t,x) \le 0$ *в* $\overline{D}$, *где*

$$M_1 = \left\{ \max_x |\varphi(x)|, \max_t |\psi(t)| \right\},$$

$$M_2 = \left\{ \max_x |\varphi''(x)|, \max_t |\psi'(t)| \right\}.$$

Доказательство леммы 1 получается из задач (1) – (4) и (6) – (9) соответственно с помощью принципа экстремума.

3. Единственность решения.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда решение задачи* (1) – (5) *единственно.*

Доказательство. Пусть существуют два решения задачи (1) – (5): $s_1(t)$ на отрезке $[0, T_1]$, $u_1(t,x)$ в области $\{(t,x)\colon 0 < t \le T_1,\ 0 < x < s_1(t)\}$ и $s_2(t)$ на отрезке $[0, T_2]$, $u_2(t,x)$ в области $\{(t,x)\colon 0 < t \le T_2,\ 0 < x < s_2(t)\}$. Пусть $T = \min[T_1, T_2]$, $h(t) = \min\{s_1(t), s_2(t)\}$ и $\Omega = \{(t,x)\colon 0 < t \le T, 0 < x < h(t)\}$.

Рассмотрим в области $\bar{\Omega}$ функцию

$$W(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x).$$

Тогда для $W(t,x)$ получим следующую задачу:

$$W_{xx}(t,x) = W_t(t,x), \quad (t,x) \in \Omega, \tag{11}$$

$$W(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le s_0, \tag{12}$$

$$W(t,0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{13}$$

$$\alpha W(t,x_0) = u_1(t, s_1(t)) - u_2(t, s_2(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{14}$$

$$W_x(t, s(t)) = u_{1x}(t, h(t)) - u_{2x}(t, h(t)), \quad 0 \le t \le T. \tag{15}$$

Пусть P — точка максимума функции $W(t,x)$ в $\bar{\Omega}$ и $W(P) > 0$. Учитывая (12), (13), можно утверждать, что точка P должна лежать на кривой $x = h(t)$, т. е. $P = (t_0, h(t_0))$, $t_0 \in [0, T]$. Сначала пусть, для определенности, $s_1(t_0) < s_2(t_0)$, тогда $h(t_0) = s_1(t_0)$.

В силу неравенства $u_x(t,x) < 0$ и условия (14) имеем

$$0 < W(t_0, s_1(t_0)) = u_1(t_0, s_1(t_0)) - u_2(t_0, s_1(t_0)) < u_1(t_0, s_1(t_0)) -$$

$$- u_2(t_0, s_2(t_0)) = \alpha W(t_0, x_0) < W(t_0, x_0).$$

Получили противоречие. Значит, в этом случае нет положительного максимума. Теперь докажем, что в этом случае нет и отрицательного минимума. Пусть $W(t,x)$ в точке $P(t_0, s_1(t_0))$ достигает своего отрицательного минимума. Тогда по известному свойству решений уравнения параболического типа $W_x(P) < 0$ [2].

Учитывая, что $u_x(t,x) < 0$ в D, и условие (5), имеем

$$0 > W_x(t_0, s_1(t_0)) = u_{1x}(t_0, s_1(t_0)) - u_{2x}(t_0, s_1(t_0)) = -u_{2x}(t_0, s_1(t_0)) > 0.$$

Получили противоречие.

Пусть теперь $s_1(t_0) > s_2(t_0)$, тогда $(h(t_0) = s_2(t_0))$. Пусть функция $W(t,x)$ в точке $P = (t_0, s_2(t_0))$ достигает своего положительного максимума. Тогда должно быть $W_x(P) > 0$ [2]. Из условия (15) имеем

$$0 < W_x(t_0, s_2(t_0)) = u_{1x}(t_0, s_2(t_0)) - u_{2x}(t_0, s_2(t_0)) = u_{1x}(t_0, s_2(t_0)) < 0,$$

т. е. в этом случае нет максимума.

Теперь докажем отсутствие отрицательного минимума.

Как и в первом случае, имеем

$$0 > W(t_0, s_2(t_0)) = u_1(t_0, s_2(t_0)) - u_2(t_0, s_2(t_0)) > u_1(t_0, s_1(t_0)) - u_2(t_0, s_2(t_0)) = \alpha W(t_0, x_0).$$

Опять пришли к противоречию. Отсутствие экстремума в случае $s_1(t_0) = s_2(t_0)$ следует из равенства

$$W_x(t_0, s_1(t_0)) = u_{1x}(t_0, s_1(t_0)) - u_{2x}(t_0, s_1(t_0)) = u_{1x}(t_0, s_1(t_0)) - u_{2x}(t_0, s_2(t_0)) = 0,$$

т. е. $W(t, x) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

Теперь докажем, что $s_1(t) = s_2(t), 0 \le t \le T$. Пусть в некоторой точке $t = t_0$ $s_1(t_0) < s_2(t_0)$. Имеем

$$\alpha u_1(t_0, x_0) = u_1(t_0, s_1(t_0)) = u_2(t_0, s_1(t_0)) > u_2(t_0, s_2(t_0)) = \alpha u_2(t_0, x_0) = \alpha u_1(t_0, x_0).$$

Пришли к противоречию.

Теорема 1 доказана.

4. Поведение свободной границы.

Теорема 2. *Пусть выполнены неравенства* $\varphi'''(x) \le 0$, $\varphi^{IV}(x) \ge 0$, $\psi''(t) \ge 0$, $\varphi''(s_0) - \alpha\psi'(T) \ge 0$. *Тогда существует такая постоянная* N, *зависящая от заданных функций, что имеют место неравенства*

$$0 < \dot{s}(t) \le N, \quad 0 \le t \le T.$$

Доказательство. Сначала докажем, что $v_t(t, x) > 0$ в D. Для этого в задаче (6) – (9) выполним замену $v_t(t, x) = V(t, x)$ и получим

$$V_{xx}(t, x) = V_t(t, x), \quad (t, x) \in D, \tag{16}$$

$$V(0, x) = \varphi^{IV}(x) \ge 0, \quad 0 \le x \le s_0, \tag{17}$$

$$V(t, 0) = \psi''(t) \ge 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{18}$$

$$\alpha V(t, x_0) = V(t, s(t)) - v(t, s(t)) \cdot \dot{s}^2(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{19}$$

Если докажем, что на правой границе функция $V(t, x)$ неотрицательна, то по принципу экстремума получим необходимое неравенство.

Действительно, пусть функция $V(t, x)$ на правой границе принимает отрицательные значения и $P = (t_0, (s(t_0))$ — точка отрицательного минимума. С учетом неравенств $v(t, s(t)) > 0$, $0 < \alpha < 1$ из (19) получаем, что отрицательный минимум достигается во внутренней точке (t_0, x_0). А это невозможно. Тогда по принципу экстремума

$$V(t, x) = v_t(t, x) = u_{tt}(t, x) > 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{20}$$

Далее, в задаче (6) – (10) введем новую функцию

$$W(t,x) = v(t,x) - \alpha v(t,x_0) + K, \quad K < 0.$$

Тогда для $W(t,x)$ получим следующую задачу:

$$W_{xx} - W_t = \alpha V(t,x_0) \ge 0, \tag{21}$$

$$W(0,x) = \varphi''(x) - \alpha\varphi''(x_0) + K \le 0, \tag{22}$$

$$W(t,0) = \psi'(t) - \alpha v(t,x_0) + K \le 0, \tag{23}$$

$$W(t,s(t)) = K < 0, \tag{24}$$

$$v(t,s(t))\dot{s}(t) = -W_x(t,s(t)). \tag{25}$$

Неравенство в условиях обеспечивается за счет выбора K. С учетом условий на заданные функции и в силу ограниченности функции $v(t,x)$ в $\bar{D}$ по принципу экстремума имеем $W(t,x) \ge K$ в $\bar{D}$, т. е. $W(t,s(t)) = K$ — минимум для $W(t,x)$ в D. Тогда по известному свойству решения параболического уравнения $W_x(t,s(t)) < 0$ [2]. Следовательно, из (25) получаем $\dot{s}(t) > 0$, $0 \le t \le T$.

Теперь $\dot{s}(t)$ оценим сверху.

Введя новую функцию

$$U(t,x) = v(t,x) - \alpha v(t,x_0) + N_0(x - s(t)), \tag{26}$$

в задаче (6) – (10) для $U(t,x)$ получим следующую задачу:

$$U_{xx}(t,x) - U_t(t,x) = \alpha v_t(t,x_0) + N_0\dot{s}(t) > 0, \quad (t,x) \in D, \tag{27}$$

$$U(0,x) = \varphi''(x) - \alpha\varphi''(x_0) + N_0(x - s_0) \le 0, \quad 0 \le x \le s_0, \tag{28}$$

$$U(t,0) = \psi'(t) - \alpha v(t,x_0) - N_0 s(t) \le 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{29}$$

$$U(t,s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{30}$$

Неравенство в условиях обеспечивается за счет выбора N_0. Из задачи (27) – (30) согласно принципу экстремума следует, что $U(t,x) < 0$ в $\bar{D}$, а из условий (30) имеем $U(t,s(t)) = 0$. Значит, функция $U(t,x)$ не неизвестной границе достигает максимума. Тогда по известному свойству решения параболического уравнения $U_x(t,s(t)) > 0$. Из (26) получаем

$$U_x(t,s(t)) = v_x(t,s(t)) + N_0 > 0.$$

Таким образом, из условий (10) имеем

$$\dot{s}(t) < \frac{N_0}{\varphi''(s_0)} \le N.$$

Тогда

$$0 < \dot{s}(t) \leq N, \quad t \in (0, T]. \tag{31}$$

Теорема 2 доказана.

5. Существование решения. Сначала доказывается эквивалентность задач (6) – (10) и (1) – (5), а затем устанавливается существование решения задачи (6) – (10).

Теорема 3. *Пусть пара функций* $(s(t), v(t,x))$ *является решением задачи* (6) – (10). *Тогда пара* $(s(t), u(t,x))$, *где*

$$u(t,x) = \psi(t) + \int\limits_0^x d\xi \int\limits_{s(t)}^{\xi} v(t,\eta)d\eta, \tag{32}$$

является решением задачи (1) – (5).

Доказательство. Из (32) следует, что

$$u_x(t,x) = \int\limits_{s(t)}^{x} v(t,\eta)d\eta, \qquad u_{xx}(t,x) = v(t,x). \tag{33}$$

Учитывая условия задачи (6) – (10), получаем

$$u_t(t,x) = \psi'(t) - \int\limits_0^x v(t,s(t))\dot{s}(t)d\xi + \int\limits_0^x d\xi \int\limits_{s(t)}^{\xi} v_t(t,\eta)d\eta =$$

$$= \psi'(t) - \int\limits_0^x v(t,s(t))\dot{s}(t)d\xi + \int\limits_0^x [v_\xi(t,\xi) - v_\xi(t,s(t))]d\xi =$$

$$= \psi'(t) - \int\limits_0^x v(t,s(t))\dot{s}(t)d\xi + \int\limits_0^x v_\xi(t,\xi)d\xi + \int\limits_0^x v(t,s(t))\dot{s}(t)d\xi =$$

$$= \psi'(t) + \int\limits_0^x v_\xi(t,\xi) = \psi'(t) + v(t,x) - v(t,0) = v(t,x). \tag{34}$$

Значит согласно (32) и (34) функция $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению (1) в $\bar{D}$. Из первой формулы (33) находим $u_x(t,s(t)) = 0$, т. е. условие (5) выполняется. Проверим выполнение начального условия:

$$u(0,x) = \psi(0) + \int\limits_0^x d\xi \int\limits_{s_0}^{\xi} v(0,\eta)d\eta = \psi(0) + \int\limits_0^x d\xi \int\limits_{s_0}^{\xi} \varphi''(\eta)d\eta =$$

$$= \psi(0) + \int\limits_0^x \big[\varphi'(\xi) - \varphi'(s_0)\big]d\xi = \psi(0) + \varphi(x) - \varphi(0) = \varphi(x).$$

Выполнение условия (3) получается непосредственно из (32), а выполнение условия (4) — из тождества

$$u(t, s(t)) = u(0, s(0)) + \int_0^t \frac{d}{d\tau} u(\tau, s(\tau)) d\tau =$$

$$= \alpha\varphi(x_0) + \int_0^t [u_\tau(\tau, s(\tau)) + u_x(\tau, s(\tau))\dot{s}(\tau)] d\tau = \alpha\varphi(x_0) + \int_0^t v(\eta, s(\eta)) d\tau =$$

$$= \alpha\varphi(x_0) + \alpha \int_0^t v(t, x_0) d\tau = \alpha\varphi(x_0) + \alpha \int_0^t u_\tau(\tau, x_0) d\tau =$$

$$= \alpha\varphi(x_0) + \alpha u(t, x_0) - \alpha u(0, x_0) = \alpha u(t, x_0). \tag{35}$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теорем* 2 *и* 3. *Тогда решение* (1) – (5) *задачи существует.*

Доказательство. Задача (1) – (5) эквивалентным образом сведена к задаче (6) – (10) типа Стефана. Теперь установим априорные оценки, которые используются при доказательстве глобальной разрешимости задачи.

В лемме 1 установлена оценка $u_x(t, x) \leq 0$. Оценим эту функцию снизу. Для этого используем оценку, установленную для $u_{xx}(t, x)$. Интегрируя по x в пределах от x до $s(t)$ выражение $0 \leq u_{xx}(t, x) \leq M_2$, находим

$$0 \leq u_x(t, s(t)) - u_x(t, x) \leq \int_x^{s(t)} M_2 d\xi.$$

Отсюда с учетом (5) и (31), (16) имеем

$$0 \geq u_x(t, x) \geq -(s(t) - x)M_2 \qquad \text{или} \qquad u_x(t, x) \geq -M_2 NT. \tag{36}$$

Оценка для $u_{xxx}(t, x)$ устанавливается следующим образом. Используя теорему 2 [8], оцениваем $u_x(t, x)$ в левой половине области D вплоть до $x = 0$, т. е. справедлива оценка

$$|v_x(t, x)| \leq C(M_2, ||\psi''||) = M_3, \quad 0 \leq x \leq x_0. \tag{37}$$

Далее, обозначая $v_x(t, x) = Z(t, x)$, из задачи (6) – (8), (10) имеем

$$Z_{xx}(t, x) = Z_t(t, x), \quad (t, x) \in D, \tag{38}$$

$$Z(0, x) = \varphi'''(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \tag{39}$$

$$|Z(t, 0)| \leq M_3, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{40}$$

$$Z(t,s(t)) = -v(t,s(t))\cdot \dot{s}(t) \quad 0 \le t \le T. \tag{41}$$

Отсюда в силу установленных оценок имеем

$$|Z(t,x)| \le C(||\varphi'''||, M_3, N) = M_4 \quad \text{в} \quad \bar{D}. \tag{42}$$

После того как оценена $\dot{s}(t)$, из задачи (16)–(19) можем оценить

$$u_{xxxx}(t,x) = V(t,x) > 0$$

сверху. По принципу экстремума внутри области D нет экстремума. Если оценим $V(t,x)$ на правой границе, то получим желаемый результат.

Пусть в некоторой точке $P = (t_0, s(t_0))$ функция $V(t,x)$ достигает положительного максимума $V(P) = \tilde{M}$. Из (19) имеем

$$V(t_0, s(t_0)) \le v(t_0, s(t_0))\dot{s}^2(t_0) + \alpha V(t_0, x_0).$$

Отсюда

$$\tilde{M} \le M_2\, N^2 + \alpha\tilde{M}, \quad N > 1,$$

или

$$\tilde{M}(1-\alpha) \le M_2\, N^2,$$

$$\tilde{M} \le \frac{M_2 N^2}{1-\alpha}.$$

Тогда можно утверждать, что

$$|u_{xxxx}(t,x)| \le \max\left\{\max_x \varphi^{(IV)}(x),\ \max_t \psi(t), \tilde{M}\right\} \quad \text{в} \quad \bar{D}. \tag{43}$$

Теперь сведем задачу к системе интегральных уравнений. Интегрируя тождество Грина

$$(Gv_\xi - vG_\xi)_\xi - (Gv)_\eta = 0$$

по области $0 < \xi < s(\eta)$, $0 < \varepsilon < \eta < t - \varepsilon$, и устремляя ε к нулю, с учетом условий (7), (9) и (10) получаем

$$v(t,x) = \int\limits_0^{s_0} G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi - \int\limits_0^t G_\xi(t,x;\eta,s(\eta))\tau(\eta)d\eta + \int\limits_0^t G_\xi(t,x;\eta,0)\psi'(\eta)d\eta, \tag{44}$$

где

$$G(x,t;\eta,\xi) = \Gamma(x,t;\eta,\xi) - \Gamma(x,t;\eta,-\xi)$$

— функция Грина первой краевой задачи для полуплоскости $x > 0$ и

$$\Gamma(t,x;\eta,\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}\right],$$

$$\tau(t) = v(t, s(t)).$$

Переходя в (44) к пределу при $x \to x_0$ и учитывая (9), получаем интегральное уравнение относительно $\tau(t)$:

$$\tau(t) = \alpha \left\{ \int_0^{s_0} G(t, x_0; \eta, \xi)\varphi''(\xi)d\xi - \int_0^t G_\xi(t, x_0; \eta, s(\eta))\tau(\eta)d\eta + \int_0^t G_\xi(t, x_0; \eta, 0)\psi'(\eta)d\eta \right\}. \tag{45}$$

Дифференцируя (44) по x и переходя после несложных преобразований к пределу при $x \to \to s(t) - 0$, имеем

$$\nu(t) = \frac{2}{3}\int_0^{s_0} N(t, s(t); 0, \xi)\varphi'''(\xi)d\xi + \frac{2}{3}\int_0^t N(t, s(t); \eta, s(\eta))\tau'(\eta))d\eta -$$

$$-\frac{2}{3}\int_0^t N(t, s(t); \eta, 0)\psi''(\eta)d\eta - \frac{2}{3}\int_0^t \nu(\eta)N(t, s(t); \eta, s(\eta))d\eta, \tag{46}$$

где

$$\nu(t) = v_x(t, s(t)),$$

$$N(t, x; \eta, \xi) = \Gamma(t, x; \eta, \xi) + \Gamma(t, x; \eta, -\xi)$$

— функция Грина второй краевой задачи для полуплоскости $x > 0$. Теперь (45) дифференцируем по t и после некоторых преобразований получаем интегральное уравнение относительно $\tau'(t)$:

$$\tau'(t) = \alpha \Big\{ \varphi''(s_0)N_\xi(t, x_0; 0, s_0) - \varphi''(0)N_\xi(t, x_0; 0, 0) -$$

$$-\varphi'''(s_0)N(t, x_0; 0, s_0) + \varphi'''(0)N(t, x_0; 0, 0) + \int_0^{s_0} N(t, x_0; 0, \xi)\varphi^{(IV)}(\xi)d\xi -$$

$$-\int_0^t \varphi''(s_0)G_{\xi t}(t, x_0; \eta, s(\eta))d\eta - \int_0^t \tau'(y)dy \int_y^t G_{\xi t}(t, x_0; \eta, s(\eta))d\eta +$$

$$+\int_0^t G_{\xi t}(t, x_0; \eta, 0)\psi'(\eta)d\eta \Big\}. \tag{47}$$

Интегрируя (10) по t от 0 до t, находим

$$s(t) = s_0 - \int_0^t \frac{\nu(\eta)d\eta}{\int_0^\eta \tau(y)dy + \varphi''(s_0)}. \tag{48}$$

Получили систему нелинейных интегральных уравнений (46) – (48). Разрешимость этой системы с учетом полученных априорных оценок устанавливается с помощью принципа сжатых отображений.

1. *Рубинштейн Л. И.* Проблема Стефана. – Рига: Звайзгне, 1967. – 468 с.
2. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 428 с.
3. *Мейрманов А. М.* Задача Стефана. – Новосибирск: Наука, 1986. – 239 с.
4. *Данилюк И. И.* О задаче Стефана // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, вып. 5(245). – С. 133 – 185.
5. *Базалий Б. В., Дегтярев С. П.* О классической разрешимости многомерной задачи при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости // Мат. сб. – 1987. – **132(174)**, № 1. – С. 3 – 19.
6. *Флорин В. А.* Уплотнение земляной среды и фильтрация при переменной пористой с учетом влияния связанной воды // Изв. АН СССР. ОТН. – 1951. – **11**, № 11. – С. 1625 – 1649.
7. *Баренблатт Г. И, Ишлинский А. Ю.* Об ударе вязкопластического стержня о жесткую преграду // Прикл. математика и механика. – 1962. – **26**, вып 3. – С. 497 – 502.
8. *Кружков С. Н.* О некоторых задачах с неизвестной границей для уравнения теплопроводности // Прикл. математика и механика. – 1967. – **31**, вып 6. – С. 1009 – 1020.
9. *Cohen N., Rubinov S. J.* Some mathematical topics in Biology // Proc. Symp. System Theory. – New York: Polytech. Press, 1965. – P. 321 – 337.
10. *Fasano A., Primicerio M.* New results on some classical parabolic free-boundary problems // Quart. appl. math. – 1981. – **38**, № 4. – P. 439 – 460.
11. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
12. *Cannon J. R., Hong-Ming Yin.* Non-classical parabolic equations // J. Different. Equat. – 1989. – **79**. – P. 266 – 288.
13. *Іванчов М. І., Снітко Г. А.* Визначення залежних від часу коефіцієнтів параболічного рівняння в області з вільною межею // Нелинейные граничные задачи. – 2011. – **20**. – С. 28 – 44.
14. *Баранська І. Є., Іванчов М. І.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільними межами // Укр. мат. вісн. – 2007. – **4**, № 4. – С. 457 – 484.
15. *De Lillo S., Salvatori M.* A two-phase free boundary problem for the nonlinear heat equation // J. Nonlinear Math. Phys. – 2004. – **1**, № 1. – P. 134 – 140.
16. *Джураев Т. Д., Тахиров Ж. О.* Нелокальная задача Флорина для квазилинейного параболического уравнения // Докл. АН Республики Узбекистан. – 1998. – **1**. – С. 3 – 7.
17. *Тахиров Ж. О.* Задача с внутреннеграничными нелокальными условиями для квазилинейного параболического уравнения // Узб. мат. журн. – 1998. – **6**. – С. 61 – 64.

Получено 07.06.11,
после доработки — 19.12.11