УДК 515.174

С. Є. Самохвалов (Дніпродзерж. техн. ун-т)

ТЕОРЕТИКО-ГРУПОВИЙ ОПИС РІМАНОВИХ ПРОСТОРІВ

We show that a locally geometric structure of arbitrary curved Riemannian space is determined by a deformed group of its diffeomorphisms.

Показано, що локально геометрична структура довільно викривленого ріманового простору задається деформованою групою його дифеоморфізмів.

До останнього часу вважалося, що для геометричних структур з довільною змінною кривизною неможливо реалізувати ерлангенську програму Ф. Клейна [1], і подолати цей, за образним висловом Е. Картана [2], ріман-клейнівський антагонізм можливо лише ціною її модифікації з відмовою від групової структури перетворень, що використовуються. Так, в [3] для цього залучаються категорії, а в [4] — квазігрупи, і навіть стверджується, що квазігрупи є алгебраїчним еквівалентом геометричного поняття кривизни.

У роботі [5] показано, що теоретико-груповий опис зв'язностей в розшаруваннях з довільною змінною кривизною можна здійснити за допомогою деформованих нескінченних груп Лі, введених з фізичних міркувань у роботі [6], причому структурне рівняння випливає з групових аксіом і є необхідною умовою існування групи, що задає дану геометричну структуру. Цим для зв'язностей у розшаруваннях було реалізовано програму Ф. Клейна.

Структура (псевдо)ріманового простору M є окремим випадком структури афінної зв'язності в дотичному розшаруванні, і тому її можна задавати тим самим способом, що і довільну зв'язність [5]. При цьому необхідно накладати додаткові умови відсутності скруту і узгодженості зв'язності з метрикою. Група, яка здійснює такий опис, діє в дотичному розшаруванні простору M і є нескінченною спеціальним чином деформованою групою, що має структуру напівпрямого добутку групи дифеоморфізмів $\Gamma_T = \mathrm{Diff}\, M$ на калібровочну групу $SO(m, n-m)^g$, де n — розмірність простору M [6].

У роботі [6] показано, що для (псевдо)ріманових просторів існує більш природний спосіб теоретико-групового опису за допомогою більш вузької групи, а саме деформованої групи Γ_T^H дифеоморфізмів простору M. Генератори такої групи задають на M (локально, в межах координатної області) поле афінних реперів, а закон множення в ній — правило паралельного перенесення векторів, причому скрут автоматично зануляється внаслідок групових аксіом, компоненти поля реперів у координатному базисі, а також коефіцієнти неголономності і зв'язності виражаються через допоміжні функції деформації, за допомогою яких будується група Γ_T^H. Локально будь-який простір афінної зв'язності без скруту можна описати таким чином. При додатковому припущенні, що поле реперів, яке задається дією групи Γ_T^H, (псевдо)ортонормоване, а при паралельному перенесенні векторів вони лише обертаються, коефіцієнти афінної зв'язності в координатному базисі автоматично стають символами Крістоффеля, тобто певним чином виражаються через метрику, отже, постулювати цей вираз немає потреби.

Стаття [6] мала фізичну направленість і теоретико-групові та геометричні аспекти зачіпалися в ній лише побіжно, а деякі важливі геометричні співвідношення взагалі не розглядалися. У даній роботі заповнюється ця прогалина. Зокрема, показано, що вираз тензора кривизни (який в нашому підході стає характеристикою групи Γ_T^H) через коефіцієнти зв'язності випливає з рівняння, яке, в свою чергу, випливає з групових аксіом і є необхідною умовою існування групи Γ_T^H.

За допомогою груп Γ_T^H ерлангенська програма Ф. Клейна реалізується для (псевдо)ріманових просторів довільної змінної кривизни, причому найбільш раціональним способом. Групи Γ_T^H діють на M, і їх перетворення інтерпретуються як калібровочні трансляції в викривлених (псевдо)ріманових просторах. Саме через це теоретико-груповий опис (псевдо)ріманових просторів групами Γ_T^H є важливим для теорії гравітації, оскільки гравітація при цьому отримує інтерпретацію калібровочної теорії групи трансляцій [7].

У роботі не розглядаються глобальнотопологічні питання і всі співвідношення одержуються в межах однієї координатної області. Крім того, під групами ми розумітимемо відповідні локальні групи.

1. Конкретизуємо загальну методику побудови деформованих нескінченних груп Лі [5] для випадку деформованої групи дифеоморфізмів Γ_T^H. При цьому, на відміну від [5], будемо використовувати координатний підхід.

Нехай O — координатна область на многовиді M з координатами x^μ (координатні індекси позначатимемо грецькими літерами). Координати будемо вважати фіксованими і далі змінювати не будемо.

В O діє абелева група трансляцій $T = \{\tilde{t}\}$ за формулою

$$x'^\mu = x^\mu + \tilde{t}^\mu.$$

У множині $C_\infty(O, T)$ гладких відображень O в T виділимо підмножину $\Gamma_T = \{\tilde{t}(x)\}$ умовою $\det\{\delta_\nu^\mu + \partial_\nu \tilde{t}^\mu(x)\} \neq 0 \ \ \forall x \in O$, де $\partial_\nu := \partial / \partial x^\nu$, і задамо в ній закон множення $\tilde{t}'' = \tilde{t} \times \tilde{t}'$:

$$\tilde{t}''^\mu(x) = \tilde{t}^\mu(x) + \tilde{t}'^\mu(x'), \tag{1}$$

де

$$x'^\mu = x^\mu + \tilde{t}^\mu(x). \tag{2}$$

З ним множина Γ_T стає локальною групою. Група Γ_T гладко діє в області O за формулою (2) і є локальною групою дифеоморфізмів області O в адитивній параметризації. За означенням 1 з [5] група Γ_T є *групою недеформованої області* O, або *недеформованою групою*.

Деформуємо групу Γ_T за допомогою *деформації* H, що задається відображенням $H: O \times T \to T$ з властивостями, які в даному випадку записуються у вигляді:

1H) $H \in C_\infty(O \times T)$;

2H) $H(x, 0) = 0 \ \ \forall x \in O$;

3H) існує відображення $K: O \times T \to T$ таке, що

$$K(x, H(x, \tilde{t})) = \tilde{t} \quad \forall x \in O, \quad \tilde{t} \in T.$$

Група $\Gamma_T^H = \{t(x)\}$ одержується з групи Γ_T ізоморфізмом, який задається деформацією H згідно з формулою

$$t^m(x) = H^m(x, \tilde{t}(x)). \tag{3}$$

Функції $t^m(x)$, що параметризують групу Γ_T^H (для них індекси позначатимемо латинськими літерами), задовольняють умову $\det\left\{\delta^\mu_\nu + d_\nu K^\mu(x, t(x))\right\} \neq 0$ $\forall x \in O$, де $d_\nu := d/dx^\nu$, а закон множення в ній $t'' = t * t'$ визначається ізоморфізмом (3):

$$t''^m(x) = \varphi^m(x, t(x), t'(x')) := H^m(x, K(x, t(x)) + K(x', t'(x'))), \tag{4}$$

де

$$x'^\mu = f^\mu(x, t(x)) := x^\mu + K^\mu(x, t(x)). \tag{5}$$

Група Γ^H_T гладко діє в області O за формулою (5). За означенням 3 з [5] група Γ^H_T *є групою деформованої області* O, або *деформованою групою*.

Закон множення (4) деформованої групи Γ^H_T явно залежить від x, і тому аналогом структурних констант для груп Γ^H_T є *структурні функції* $F(x)^n_{kl}$, які означаються формулою

$$F(x)^n_{kl} := \left(\partial^2_{k,l'} - \partial^2_{l,k'}\right)\varphi^n(x, t, t')\Big|_{t=t'=0} \tag{6}$$

(тут і далі $\partial_k := \partial/\partial t^k$, індекс зі штрихом означає диференціювання по t').

2. Введемо допоміжні функції $h(x)^m_\mu = \partial H^m(x, \bar{t})/\partial \bar{t}^\mu\big|_{\bar{t}=0}$. Властивість 3Н забезпечує виконання умови

$$\det\left\{h(x)^m_\mu\right\} \neq 0 \quad \forall x \in O, \tag{7}$$

звідки випливає існування функцій $h(x)^\mu_m$ таких, що $h(x)^\mu_n h(x)^m_\mu = \delta^m_n$ $\forall x \in O$. Очевидно, $h(x)^\mu_m = \partial_m K^\mu(x, t)\big|_{t=0}$. За допомогою цих функцій будемо замінювати грецькі індекси латинськими і навпаки.

Вважаючи в законі множення групи Γ^H_T параметри постійними, означимо функції

$$\mu(x, t)^m_n := \partial_{n'}\varphi^m(x, t', t)\Big|_{t'=0}, \tag{8}$$

$$\lambda(x, t)^m_n := \partial_{n'}\varphi^m(x, t, t')\Big|_{t'=0}. \tag{9}$$

Умова асоціативності закону множення в групі Γ^H_T : $(t * t') * t'' = t * (t' * t'')$ виконується автоматично для будь-якої деформації H на підставі асоціативності закону множення (1) в групі дифеоморфізмів. Запишемо цю умову для постійних параметрів групи Γ^H_T:

$$\varphi^m(x, \varphi(x, t, t'), t'') = \varphi^m(x, t, \varphi(x', t', t'')). \tag{10}$$

Диференціюючи її по t в нулі, одержуємо рівняння

$$h(x)^\mu_k \partial_\mu \varphi^m(x, t, t') - \mu(x, t)^n_k \partial_n \varphi^m(x, t, t') =$$
$$= -\mu(x, \varphi(x, t, t'))^m_k, \tag{11}$$

а при диференціюванні по t'' в нулі — рівняння

$$\lambda(x', t')^n_k \partial_{n'}\varphi^m(x, t, t') = \lambda(x, \varphi(x, t, t'))^m_k. \tag{12}$$

Умовою їх інтегровності є рівняння

$$h(x)_k^\nu \partial_\nu \mu(x,t)_l^m - \mu(x,t)_k^n \partial_n \mu(x,t)_l^m -$$
$$- h(x)_l^\nu \partial_\nu \mu(x,t)_k^m + \mu(x,t)_l^n \partial_n \mu(x,t)_k^m =$$
$$= F(x)_{kl}^n \mu(x,t)_n^m \tag{13}$$

і

$$\lambda(x,t)_k^n \partial_n \lambda(x,t)_l^m - \lambda(x,t)_l^n \partial_n \lambda(x,t)_k^m =$$
$$= F(x')_{kl}^n \lambda(x,t)_n^m \tag{14}$$

відповідно.

Рівняння (11) і (12) будемо називати *лівим і правим рівняннями Лі для груп* Γ_T^H, а рівняння (13) і (14) — *лівим і правим рівняннями Маурера – Картана для груп* Γ_T^H.

Якщо умову асоціативності (10) безпосередньо продиференціювати по t і t'' в нулі в різній послідовності, то одержимо рівняння

$$h(x)_k^\nu \partial_\nu \lambda(x,t)_l^m - \mu(x,t)_k^n \partial_n \lambda(x,t)_l^m +$$
$$+ \lambda(x,t)_l^n \partial_n \mu(x,t)_k^m = 0. \tag{15}$$

Виконаємо послідовно два Γ_T^H-перетворення з постійними параметрами t і t'. Композиційний закон перетворень приводить до рівності

$$f^\mu(f(x,t),t') = f^\mu(x, \varphi(x,t,t')),$$

яка виконується автоматично для будь-якої деформації H внаслідок виконання композиційного закону в групі дифеоморфізмів Γ_T. Диференціюючи її по t в нулі, одержуємо рівняння

$$h(x)_k^\nu \partial_\nu f^\mu(x,t) - \mu(x,t)_k^n \partial_n f^\mu(x,t) = 0, \tag{16}$$

а при диференціюванні по t' в нулі — рівняння

$$h(x')_k^\mu - \lambda(x,t)_k^n \partial_n f^\mu(x,t) = 0. \tag{17}$$

Умовою інтегровності цих рівнянь при виконанні рівнянь (13) і (14) є рівняння

$$h(x)_k^\nu \partial_\nu h(x)_l^\mu - h(x)_l^\nu \partial_\nu h(x)_k^\mu = F(x)_{kl}^n h(x)_n^\mu. \tag{18}$$

Рівняння (16) і (17) будемо називати *лівим і правим рівняннями Лі для груп* Γ_T^H*-перетворень*, а рівняння (18) — *рівнянням Маурера – Картана для груп* Γ_T^H*-перетворень*.

3. Введемо диференціальні оператори

$$X_k^\tau = h(x)_k^\nu \partial_\nu - \mu(x,t)_k^n \partial_n,$$
$$X_k^\upsilon = \lambda(x,t)_k^n \partial_n,$$

які будемо називати *генераторами лівих і правих зсувів*, або *горизонтальними і вертикальними генераторами* групи Γ_T^H відповідно, а також

$$X_k = h(x)_k^\nu \partial_\nu$$

— *генератори дії групи* Γ_T^H *на* O. У термінах генераторів рівняння (13) – (15), а також рівняння (18) записуються у вигляді

$$\left[X^{\tau}_k, X^{\tau}_l \right] = F(x)^n_{kl} X^{\tau}_n, \tag{19}$$

$$\left[X^{\upsilon}_k, X^{\upsilon}_l \right] = F(x')^n_{kl} X^{\upsilon}_n, \tag{20}$$

$$\left[X^{\tau}_k, X^{\upsilon}_l \right] = 0, \tag{21}$$

$$\left[X_k, X_l \right] = F(x)^n_{kl} X_n, \tag{22}$$

де квадратні дужки означають комутатор операторів. Ці рівняння є наслідком асоціативності закону множення в групі Γ^H_T, але через її нескінченність комутатори генераторів розкладаються по генераторах не за допомогою структурних констант, як в скінченнопараметричних групах Лі, а за допомогою залежних від x структурних функцій.

Умовою інтегровності рівнянь (19) – (22) є рівняння для структурних функцій групи Γ^H_T

$$h(x)^{\nu}_k \partial_{\nu} F(x)^n_{lm} + F(x)^n_{kp} F(x)^p_{lm} + \text{cycle}(klm) = 0, \tag{23}$$

яке одержується з тотожності Якобі для подвійного комутатора генераторів.

4. Розглянемо розклад функцій, означених формулами (8), (9), за груповими параметрами з точністю до другого порядку включно:

$$\mu(x,t)^m_n = \delta^m_n + \gamma^m_{nk} t^k + \frac{1}{2} \rho^m_{lkn} t^l t^k, \tag{24}$$

$$\lambda(x,t)^m_n = \delta^m_n + \gamma^m_{kn} t^k + \frac{1}{2} \sigma^m_{lkn} t^l t^k. \tag{25}$$

Коефіцієнти цих розкладів γ^m_{nk}, ρ^m_{nkl} та σ^m_{nkl} в загальному випадку залежать від x, але цю залежність, що визначається функціями деформації, конкретизуємо трохи нижче і для скорочення запису явно показувати не будемо ні для самих коефіцієнтів, ні для функцій, які через них визначаються. Підставляючи розклади (24) і (25) в формули (13) і (14), одержуємо, що в нульовому порядку по t структурні функції групи Γ^H_T визначаються антисиметричною частиною коефіцієнтів γ^m_{kn}:

$$F^m_{kn} = \gamma^m_{kn} - \gamma^m_{nk}. \tag{26}$$

Ця формула безпосередньо випливає з означення (6) для структурних функцій групи Γ^H_T і, фактично, може розглядатись, як їх означення. Введемо функції

$$R^m_{lkn} := \rho^m_{lkn} - \rho^m_{lnk}, \tag{27}$$

$$S^m_{lkn} := \sigma^m_{lkn} - \sigma^m_{lnk}, \tag{28}$$

які будемо називати *тензорами лівої і правої кривизни* групи Γ^H_T відповідно. У першому порядку по t з формули (13) одержуємо

$$R^m_{lkn} = -\gamma^m_{sl} F^s_{kn} + h^{\sigma}_k \partial_{\sigma} \gamma^m_{nl} - h^{\sigma}_n \partial_{\sigma} \gamma^m_{kl} + \\ + \gamma^m_{ks} \gamma^s_{nl} - \gamma^m_{ns} \gamma^s_{kl}, \tag{29}$$

а з формули (14) —

$$S^m_{lkn} = \gamma^m_{ls} F^s_{kn} + h^{\sigma}_l \partial_{\sigma} F^m_{kn} + \gamma^m_{sk} \gamma^s_{ln} - \gamma^m_{sn} \gamma^s_{lk}. \tag{30}$$

Із співвідношення (15) маємо

$$\sigma^m_{lkn} - \rho^m_{lnk} = h^\sigma_k \partial_\sigma \gamma^m_{ln} + \gamma^m_{ks}\gamma^s_{ln} - \gamma^m_{sn}\gamma^s_{kl},$$

звідки випливає

$$R^m_{lkn} + S^m_{lkn} = h^\sigma_k \partial_\sigma \gamma^m_{ln} - h^\sigma_n \partial_\sigma \gamma^m_{lk} +$$
$$+ \gamma^m_{ks}\gamma^s_{ln} - \gamma^m_{sn}\gamma^s_{kl} + \gamma^m_{sk}\gamma^s_{nl} - \gamma^m_{ns}\gamma^s_{lk}. \tag{31}$$

Враховуючи формули (26), (29) і (30), легко переконатися, що вираз (31) є наслідком умови (23).

5. Співвідношення, одержані вище, випливали виключно із групових аксіом без урахування деформаційного способу побудови групи Γ^H_T, який і забезпечує їх виконання. Проте як сам закон множення (4), так і дія (5) деформованої групи Γ^H_T в області O визначаються деформацією H, за допомогою якої вона побудована. Виразимо допоміжні функції групи Γ^H_T через функції деформації. Для цього введемо матриці $H(x,t)^m_\mu = \partial H^m(x,\bar t)/\partial \bar t^\mu \big|_{\bar t = K(x,t)}$. Зворотними до них будуть матриці $H(x,t)^\mu_m = \partial_m K^\mu(x,t)$. Безпосередньо використовуючи другу рівність із (4), в означеннях (8) і (9), отримуємо

$$\mu(x,t)^m_n = H(x,t)^m_\mu\left(\delta^\mu_\nu + \partial_\nu K^\mu(x,t)\right)h(x)^\nu_n, \tag{32}$$

$$\lambda(x,t)^m_n = H(x,t)^m_\mu h(x + K(x,t))^\mu_n, \tag{33}$$

або в залежності від $\bar t$

$$\mu(x,\bar t)^m_n = \frac{\partial}{\partial \bar t^\mu} H^m(x,\bar t)\left(\delta^\mu_\nu + \partial_\nu \bar t^\mu\right)h(x)^\nu_n,$$

$$\lambda(x,\bar t)^m_n = \frac{\partial}{\partial \bar t^\mu} H^m(x,\bar t)h(x+\bar t)^\mu_n. \tag{34}$$

Розглянемо розклад функцій деформації H по $\bar t$ до третього порядку включно:

$$H^m(x,\bar t) = h^m_\mu\left(\bar t^\mu + \frac{1}{2}\Gamma^\mu_{\nu\rho}\bar t^\nu \bar t^\rho + \frac{1}{6}\Delta^\mu_{\nu\rho\sigma}\bar t^\nu \bar t^\rho \bar t^\sigma\right). \tag{35}$$

Коефіцієнти h^m_μ задовольняють умову (7), а $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ і $\Delta^\mu_{\nu\rho\sigma}$ — симетричні за нижніми індексами. При виконанні цих умов коефіцієнти розкладу (35) — довільні гладкі функції від x. Використовуючи їх, з точністю до другого порядку по t одержуємо

$$K^\mu(x,t) = h^\mu_k t^k - \frac{1}{2}\Gamma^\mu_{kl}t^k t^l,$$

$$H(x,t)^m_\mu = h^m_\mu + \Gamma^m_{\mu k}t^k + \frac{1}{2}\left(\Delta^m_{\mu kl} - \Gamma^m_{\mu s}\Gamma^s_{kl}\right)t^k t^l.$$

З урахуванням цих розкладів формули (32) та (33) приводять до виразів для коефіцієнтів розкладів (24) і (25) через коефіцієнти розкладу (35):

$$\gamma^m_{kn} = h^m_\mu\left(\Gamma^\mu_{kn} + h^\nu_k \partial_\nu h^\mu_n\right), \tag{36}$$

$$\rho^m_{lkn} = h^m_\mu\left(\Delta^\mu_{lkn} - \Gamma^\mu_{ns}\Gamma^s_{kl} - h^\nu_n \partial_\nu \Gamma^\mu_{\kappa\lambda}h^\kappa_k h^\lambda_l\right), \tag{37}$$

$$\sigma^m_{lkn} = h^m_\mu\left(\Delta^\mu_{lkn} - \Gamma^\mu_{ns}\Gamma^s_{kl} + h^\kappa_k h^\lambda_l \partial^2_{\kappa\lambda} h^\mu_n - \Gamma^\nu_{kl}\partial_\nu h^\mu_n + \left(\Gamma^\mu_{k\sigma}h^\nu_l + \Gamma^\mu_{l\sigma}h^\nu_k\right)\partial_\nu h^\sigma_n\right).$$

Підставляючи ці вирази в означення (26) – (28) і зважаючи на симетричність за нижніми індексами коефіцієнтів Γ^{μ}_{kn} і Δ^{μ}_{lkn}, для структурних функцій групи Γ^{H}_{T} одержуємо формулу (18), а для її тензорів кривизни — формули

$$R^{m}_{lkn} = h^{m}_{\mu}\left(\partial_{\kappa}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\kappa\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\kappa\lambda}\right)h^{\lambda}_{l}h^{\kappa}_{k}h^{\nu}_{n}, \tag{38}$$

$$S^{m}_{lkn} = h^{m}_{\mu}\Big(\Gamma^{\mu}_{l\sigma}F^{\sigma}_{kn} + h^{\sigma}_{l}\partial_{\sigma}F^{\mu}_{kn} + \Gamma^{\mu}_{k\sigma}\Gamma^{\sigma}_{nl} - \Gamma^{\mu}_{n\sigma}\Gamma^{\sigma}_{kl} + \Gamma^{\sigma}_{nl}\partial_{\sigma}h^{\mu}_{k} - \Gamma^{\sigma}_{kl}\partial_{\sigma}h^{\mu}_{n} +$$
$$+ h^{\lambda}_{l}\left(\Gamma^{\mu}_{k\sigma}\partial_{\lambda}h^{\sigma}_{n} - \Gamma^{\mu}_{n\sigma}\partial_{\lambda}h^{\sigma}_{k} + \partial_{\lambda}h^{\sigma}_{n}\partial_{\sigma}h^{\mu}_{k} - \partial_{\lambda}h^{\sigma}_{k}\partial_{\sigma}h^{\mu}_{n}\right)\Big).$$

Ці формули можна було б одержати і безпосередньо з формул (29), (30), підставивши в них вирази (36) і (18). Причина цього полягає в тому, що умова асоціативності закону множення в групах Γ^{H}_{T}, яка приводить до рівнянь (13) і (14), з яких одержано формули (29) та (30), виконується автоматично через деформаційний спосіб побудови груп Γ^{H}_{T}, який ми використовуємо.

6. Вигляд тензора лівої кривизни групи Γ^{H}_{T} (формули (29) або (38)), як і інших її характеристик, свідчить про те, що групи Γ^{H}_{T} містять в собі багату геометричну інформацію, до розгляду якої і переходимо.

Генератори $X_m = h^{\mu}_{m}\partial_{\mu}$ дії групи Γ^{H}_{T} задають на *O поле афінних реперів*, причому допоміжні функції деформації h^{μ}_{m} здійснюють перехід між координатним і афінним базисами. Елементи t групи Γ^{H}_{T} задають на *O векторні поля* $t = t^{m}X_{m}$, причому параметри t^{m} групи Γ^{H}_{T} є компонентами цих полів у базисі X_m.

Структурні функції групи Γ^{H}_{T} з нижніми координатними індексами внаслідок формули (18) можна подати у вигляді

$$F^{k}_{\mu\nu} = \partial_{\nu}h^{k}_{\mu} - \partial_{\mu}h^{k}_{\nu},$$

отже, вони мають геометричний зміст (з точністю до множника -2) *об'єкта неголономності*.

Розглянемо закон множення $t * \tau$ у групі Γ^{H}_{T} для випадку інфінітезимального другого множника:

$$(t * \tau)^{m}(x) = t^{m}(x) + \lambda(x, t(x))^{m}_{n}\tau^{n}(x'),$$

де $x'^{\mu} = f^{\mu}(x, t(x))$. Отже, цей закон дає правило додавання векторів, заданих у різних точках, або *правило паралельного перенесення* векторного поля τ з точки x' у точку x:

$$\tau^{m}_{\parallel}(x) = \lambda(x, t(x))^{m}_{n}\tau^{n}(x'). \tag{39}$$

Вважаючи інфінітезимальним також і t і враховуючи розклад (25), одержуємо

$$\tau^{m}_{\parallel}(x) = \tau^{m}(x) + t^{n}(x)\nabla_{n}\tau^{m}(x), \tag{40}$$

де

$$\nabla_{n}\tau^{m}(x) = h^{\sigma}_{n}\partial_{\sigma}\tau^{m}(x) + \gamma^{m}_{nk}\tau^{k}(x),$$

за означенням, — *коваріантна похідна* векторного поля τ в напрямку X_n. Таким чином, функції γ^{m}_{nk}, що визначають другий за параметрами порядок закону множення в групі Γ_T^H, набувають геометричного змісту *коефіцієнтів афінної зв'язності в базисі* X_n.

У координатному базисі співвідношення (39) з урахуванням (34) набирає вигляду

$$\tau_{\|}^{\mu}(x) = \frac{\partial}{\partial \bar{t}^{\nu}} H^{\mu}(x, \bar{t}) \tau^{\nu}(x + \bar{t}),$$

або при інфінітезимальному $\bar{t}$

$$\tau_{\|}^{\mu}(x) = \tau^{\mu}(x) + \bar{t}^{\nu}(x) \nabla_{\nu} \tau^{\mu}(x),$$

причому

$$\nabla_{\nu} \tau^{\mu}(x) = \partial_{\nu} \tau^{\mu}(x) + \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} \tau^{\sigma}(x).$$

Таким чином, коефіцієнти $\Gamma_{\sigma\nu}^{\mu}$, які визначають другий порядок розкладу (35) функцій деформації, набувають геометричного змісту *коефіцієнтів афінної зв'язності в координатному базисі.* Вони є довільними симетричними за нижніми індексами гладкими функціями, що відповідає довільній афінній зв'язності без скруту. Для недеформованої групи Γ_T коваріантна похідна, очевидно, збігається зі звичайною.

Саме в цьому розумінні, задаючи своїм законом множення (який визначається деформацією H) правило паралельного перенесення векторів, деформовані групи дифеоморфізмів Γ_T^H задають своєю дією в дотичному розшаруванні області O структуру афінної зв'язності без скруту, причому довільна афінна зв'язність без скруту може бути задана над O таким чином.

Одну й ту саму зв'язність задають всі групи $\Gamma_T^{H'}$, для яких збігаються коефіцієнти $\Gamma_{\sigma\nu}^{\mu}$ в другому порядку розкладу (35) їх функцій деформації H', зокрема якщо

$$H'^{m}(x, \bar{t}) = L(x)_n^m H^n(x, \bar{t}), \tag{41}$$

де залежні від x матриці $L(x)_n^m$ належать калібровочній групі $GL(n)^g$. При перетворенні (41) змінюється поле афінних реперів на $O: X'_m = L^{-1}(x)_m^n X_n$. Третій і більш високі порядки розкладу за параметрами функцій деформації на зв'язність не впливають і можуть бути довільними. Це пов'язано з тим, що означення (39) дозволяє виконувати паралельне перенесення векторного поля з точки x' у точку x на *скінченну* відстань $\bar{t}(x) = x' - x = K(x, t(x))$, хоча для задання зв'язності достатньо нескінченно малих зсувів. Проте існують цілком природні додаткові вимоги до функцій деформації, які випливають з геометричних міркувань і дозволяють фіксувати функції деформації повністю за першими двома порядками розкладу (35), тобто за полем афінних реперів і за коефіцієнтами афінної зв'язності. Вони пов'язані з генерацією скінченних паралельних перенесень (39) за допомогою інтегральної послідовності інфінітезимальних перенесень (40), і для структури афінної зв'язності це питання розглядатиметься в наступній публікації.

Виберемо точки $x_1 = x + \bar{t}_1$, $x_2 = x + \bar{t}_2$, $x_3 = x + \bar{t}_1 + \bar{t}_2$ ($\bar{t}_1$ і $\bar{t}_2$ вважатимемо постійними) і виконаємо, згідно з формулою (39), паралельне перенесення векторного поля $\tau(x)$ з точки x_3 в точку x_1, а потім у точку x (перший варіант), а також з точки x_3 в точку x_2, а потім у точку x (другий варіант). Запишемо різницю одержаних результатів:

$$\tau_{\parallel}^{m}(x)_1 - \tau_{\parallel}^{m}(x)_2 = \left(\lambda(x,\tilde{t}_1)_k^m \lambda(x_1,\tilde{t}_2)_n^k - \lambda(x,\tilde{t}_2)_k^m \lambda(x_2,\tilde{t}_1)_n^k\right)\tau^n(x_3).$$

Для інфінітезимальних $\tilde{t}_1$ і $\tilde{t}_2$, використовуючи формули (34), (35), а також (38), одержуємо

$$\tau_{\parallel}^{m}(x)_1 - \tau_{\parallel}^{m}(x)_2 = R_{n\rho\sigma}^{m}\tau^n(x)\tilde{t}_1^{\rho}\tilde{t}_2^{\sigma}.$$

Таким чином, тензор $R_{n\rho\sigma}^{m}$ лівої кривизни групи Γ_T^H, який згідно з формулою (27) є антисиметричною частиною коефіцієнтів $\rho_{n\rho\sigma}^{m}$, що (частково) визначають третій за параметрами порядок закону множення в групі Γ_T^H, набуває геометричного змісту *тензора кривизни* структури афінної зв'язності, яка задається в O дією групи Γ_T^H.

Підсумуємо одержані результати.

Теорема 1. *Деформована група Γ_T^H дифеоморфізмів області O задає своєю дією на O поле афінних реперів та структуру афінної зв'язності без скруту в дотичному розшаруванні над O. Геометричні характеристики простору O такі, як об'єкт неголономності, коефіцієнти афінної зв'язності, тензор кривизни, визначаються законом множення в групі Γ_T^H, який, в свою чергу, визначається деформацією H, за допомогою якої будується група Γ_T^H.*

Довільну афінну зв'язність без скруту можна задати над O таким чином.

Отже, про геометричну структуру афінної зв'язності без скруту з довільною змінною кривизною можна вести мову виключно в термінах деформованих груп Γ_T^H дифеоморфізмів, чим для такої структури реалізується ерлангенська програма Ф. Клейна, причому умова відсутності скруту (26) виконується внаслідок групових аксіом і додатково її накладати немає потреби.

7. Припустимо тепер, що матриці $\lambda(x,t)_n^m$ належать калібровочній групі $SO(m, n-m)^g$, отже, задовольняють рівняння

$$\lambda(x,t)_m^k \lambda(x,t)_n^l \eta_{kl} = \eta_{mn}, \tag{42}$$

де η_{mn} — плоска метрика (за допомогою якої будемо опускати індекси). Це означає, що поле реперів X_m, яке задається дією групи Γ_T^H, (псевдо)ортонормоване, і при паралельному перенесенні векторів (39) вони лише (псевдо)обертаються. Отже, дією групи Γ_T^H в O задається структура (псевдо)ріманового простору з метрикою $g_{\mu\nu} = h_\mu^m h_\nu^n \eta_{mn}$.

У першому порядку по t з рівняння (42) отримуємо

$$\gamma_{ksl} + \gamma_{lsk} = 0,$$

що дозволяє з використанням означення (26) виразити коефіцієнти афінної зв'язності в реперному базисі через структурні функції групи Γ_T^H:

$$\gamma_{slk} = \frac{1}{2}\left(F_{slk} + F_{ksl} + F_{lsk}\right). \tag{43}$$

Згадуючи геометричне тлумачення стуктурних функцій, бачимо, що коефіцієнти γ_{lk}^{s} в даному випадку стають *коефіцієнтами обертання Річчі*.

З використанням формули (34) рівняння (42) набирає вигляду рівняння безпосередньо для функцій деформації:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}^{\mu}} H^{m}(x, \bar{t}) \frac{\partial}{\partial \bar{t}^{\nu}} H^{n}(x, \bar{t}) \eta_{mn} = g(x+\bar{t})_{\mu\nu}. \tag{44}$$

Крім того, для функцій H маємо співвідношення 2Н:

$$H^{m}(x, 0) = 0, \tag{45}$$

яке будемо розглядати як граничну умову для диференціального рівняння (44). Розв'язок задачі (44), (45) дозволяє знайти функції деформації $H^m(x, \bar{t})$, за допомогою яких одержується група Γ_T^H, що задає в O структуру (псевдо)ріманового простору, причому довільну (псевдо)ріманову структуру можна задати в O таким чином.

Рівняння (44) інваріантне відносно перетворень:

$$H'^{m}(x, \bar{t}) = \Lambda(x)_{n}^{m} H^{n}(x, \bar{t}), \tag{46}$$

де залежні від x матриці $\Lambda(x)_n^m$ належать калібровочній групі $SO(m, n-m)^g$, тобто задовольняють співвідношення $\Lambda(x)_m^k \Lambda(x)_n^l \eta_{kl} = \eta_{mn}$. Отже, якщо функції деформації $H^m(x, \bar{t})$ задовольняють рівняння (44), його задовольняють і функції $H'^m(x, \bar{t})$, які визначаються формулою (46) з довільними $\Lambda(x)_n^m$ з групи $SO(m, n-m)^g$. Всі такі групи $\Gamma_T^{H'}$ задають на O одну й ту саму (псевдо)ріманову структуру.

З геометричної точки зору при перетвореннях (46) змінюється поле (псевдо)-ортонормованих реперів: $X'_m = \Lambda^{-1}(x)_m^n X_n$. За полем (псевдо)ортонормованих реперів X_m з рівняння (44) функції деформації визначаються *однозначно* (нагадаємо, що координати в O ми вважаємо фіксованими).

Зазначимо, що в даному підході в (псевдо)рімановому просторі за полем (псевдо)ортонормованих реперів X_m однозначно визначається і правило паралельного перенесення векторів на скінченну відстань $\bar{t}(x) = x' - x = K(x, t(x))$. З іншого боку, у загальному випадку кривого простору результат паралельного перенесення залежить від кривої, вздовж якої воно виконується. Тож виникає питання: вздовж якої кривої, що з'єднує точки x' та x, в загальному випадку кривого (псевдо)ріманового простору при виконанні інтегральної послідовності інфінітезимальних перенесень (40) одержимо результат, який задається формулою (39)? Це питання буде розглянуто в наступній публікації.

У першому порядку по $\bar{t}$ з рівняння (44) отримуємо

$$\Gamma'_{\mu\nu\sigma} + \Gamma'_{\nu\mu\sigma} = \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}, \tag{47}$$

що з урахуванням симетричності коефіцієнтів $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ за нижніми індексами приводить до формули

$$\Gamma'_{\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}\right), \tag{48}$$

яку, звичайно, можна було б одержати і як наслідок формули (43) з урахуванням співвідношення (36). Формула (48) свідчить про те, що величини $\Gamma'_{\sigma\mu\nu}$ та $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ в даному випадку стають *символами Крістоффеля* I *і* II *роду* відповідно.

У другому порядку по $\bar{t}$ з рівняння (44) випливає

$$\Delta'_{\mu\nu\sigma\rho} + \Delta'_{\nu\mu\sigma\rho} = \partial^{2}_{\sigma\rho} g_{\mu\nu} - \Gamma'_{\tau\mu\sigma} \Gamma^{\tau}_{\nu\rho} - \Gamma'_{\tau\nu\sigma} \Gamma^{\tau}_{\mu\rho},$$

звідки з урахуванням симетричності коефіцієнтів $\Delta^{\sigma}_{\mu\nu\rho}$ за нижніми індексами та співвідношення (47) маємо

$$\Delta^{\sigma}_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{3}\left(\partial_{\rho}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} + \partial_{\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} + \Gamma^{\sigma}_{\tau\rho}\Gamma^{\tau}_{\mu\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\tau\nu}\Gamma^{\tau}_{\mu\rho} + \Gamma^{\sigma}_{\tau\mu}\Gamma^{\tau}_{\nu\rho}\right).$$

Підставляючи цей вираз у формулу (37) і враховуючи формулу (38), одержуємо вираз

$$\rho^{\sigma}_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{3}\left(R^{\sigma}_{\mu\nu\rho} + R^{\sigma}_{\nu\mu\rho}\right),$$

підстановка якого в означення (27) дає тотожність для тензора кривизни:

$$R^{\sigma}_{\mu\nu\rho} + R^{\sigma}_{\nu\rho\mu} + R^{\sigma}_{\rho\mu\nu} = 0.$$

Отже, доведено таку теорему.

Теорема 2. *Деформована група* Γ^{H}_{T} *дифеоморфізмів області* O, *одержана за допомогою деформації, функції якої задовольняють рівняння* (44), *задає своєю дією на* O *поле (псевдо)ортонормованих реперів та структуру (псевдо)ріманового простору. Зокрема, коефіцієнти афінної зв'язності в координатному базисі стають рівними символам Крістоффеля. Одну й ту саму структуру (псевдо)ріманового простору задають на* O *всі групи* $\Gamma^{H'}_{T}$, *функції деформації яких пов'язані перетвореннями* (46) *з калібровочної групи* $SO(m, n-m)^{g}$.

Довільну (псевдо)ріманову структуру на O *можна задати таким чином.*

Цією теоремою ерлангенська програма Ф. Клейна реалізується для геометричної структури (псевдо)ріманового простору.

У даній роботі виконано теоретико-груповий опис геометричних структур афінної зв'язності без скруту і (псевдо)ріманового простору локально в межах однієї координатної області. Зняти це обмеження можна шляхом розгляду псевдогруп Лі.

Той факт, що співвідношення, одержані з умов існування певних груп, мають глибокий геометричний зміст, є ще одним підтвердженням фундаментальності ідей ерлангенської програми Ф. Клейна про те, що геометрія цілком визначається групою конгруенцій.

1. *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований („Эрлангенская программа") // Об основаниях геометрии. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – С. 399 – 434.
2. *Картан Э.* Теория групп и геометрия // Об основаниях геометрии. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – С. 483 – 507.
3. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия. – М.: Мир, 1975. – 352 с.
4. *Сабинин Л. В.* Методы неассоциативной алгебры в дифференциальной геометрии // Основы дифференциальной геометрии / Под ред. Ш. Кобояси, К. Номидзу: В 2 т. – М.: Наука, 1981. – Т. 1. – С. 293 – 334.
5. *Самохвалов С. Е.* О задании связностей в расслоениях действием бесконечных групп Ли // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 12. – С. 1599 – 1603.
6. *Самохвалов С. Е.* Теоретико-групповое описание калибровочных полей // Теорет. и мат. физика. – 1988. – **76**, № 1. – С. 66 – 77.
7. *Samokhvalov S. E., Vanyashin V. S.* Group theory approach to unification of gravity with internal symmetry gauge interaction // Class. Quantum Grav. – 1991. – **8**. – P. 2277 – 2282.

Одержано 24.07.2002