УДК 517.982

О. В. Маслюченко, В. В. Михайлюк, М. М. Попов (Чернівец. нац. ун-т)

ТЕОРЕМИ ПРО РОЗКЛАД ОПЕРАТОРІВ В L_1 ТА ЇХ УЗАГАЛЬНЕННЯ НА ВЕКТОРНІ ҐРАТКИ

We generalize the Rosenthal decomposition theorem for operators in L_1 to vector lattices and to regular operators in the vector lattices. The most general version is quite simple, but this approach brings a new emphasis to some known facts which are not related to the Rosenthal theorem immediately. For example, we establish that the set of all narrow operators in L_1 is a projection component. This yields a known fact that a sum of narrow operators in L_1 is a narrow operator. Besides the Rosenthal theorem, we obtain another decompositions of the space of all operators in L_1, in particular, the Liu decomposition.

Узагальнено теорему Розенталя про розклад операторів у L_1 на векторні ґратки та на регулярні оператори у векторних ґратках. Найбільш загальний варіант виявляється відносно простим, однак цей підхід дозволяє по-новому дивитись на деякі відомі факти, не пов'язані безпосередньо з теоремою Розенталя. Наприклад, встановлено, що множина вузьких операторів у L_1 є проекційною компонентою, звідки випливає відомий факт, що сума вузьких операторів у L_1 є вузьким оператором. Крім теореми Розенталя одержано інші розклади простору операторів у L_1, зокрема розклад Ліу.

1. Попередні відомості. Будемо використовувати стандартну термінологію теорії класичних банахових просторів [1, 2] та векторних ґраток і додатних операторів [3]. Через $\mathcal{L}(X, Y)$ позначимо множину всіх лінійних обмежених операторів, які діють із банахового простору X у банахів простір Y, символ $\mathcal{L}(X)$ є скороченням для $\mathcal{L}(X, X)$. Слово „підпростір" у банаховому просторі означає замкнений підпростір.

Через Σ позначимо множину всіх вимірних за Лебегом підмножин [0, 1], через μ — міру Лебега на Σ, через $\chi(A)$ — характеристичну функцію множини A. Крім цього, будемо використовувати такі скорочення: $\Sigma^+ = \{A \in \Sigma : \mu(A) > 0\}$, $\Sigma|_A = \{B \in \Sigma : B \subseteq A\}$, $\Sigma|_A^+ = \{B \in \Sigma|_A : \mu(B) > 0\}$.

Сформулюємо теорему Калтона про зображення лінійних обмежених операторів, які діють із L_1 у L_1 [4].

Теорема 1 (теорема Калтона про зображення). *Для довільного $T \in \mathcal{L}(L_1)$ існує слабко*-вимірна функція μ_t з відрізка $[0, 1]$ у множину $M[0, 1]$ усіх регулярних борелівських мір на $[0, 1]$ така, що для будь-якого $x \in L_1$*

$$Tx(t) = \int x(\tau)\, d\mu_t(\tau) \tag{1}$$

майже скрізь. Навпаки, кожна слабко-вимірна функція $\mu_t : [0, 1] \to M[0, 1]$ визначає деякий оператор $T \in \mathcal{L}(L_1)$ за допомогою* (1).

Якщо міру μ_t записати у вигляді суми атомної $\mu_t^a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\delta_{\sigma_n(t)}$ (де δ_τ — міра Дірака) і неперервної (тобто безатомної) μ_t^c частин, то отримаємо таке зображення оператора T:

$$Tx(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, x(\sigma_n(t)) + \int x(\tau)\, d\nu_t(\tau) \tag{2}$$

(див.[5]).

Розенталь в [6] формулює і використовує при доведенні основного результату теорему, яку він називає переформулюванням теореми Калтона про зображення. Вона, без сумніву, є більш прозорою та зручною для застосувань, ніж теорема 1.

Теорема 2 (версія Розенталя теореми Калтона про зображення). *Довільний оператор $T \in \mathcal{L}(L_1)$ єдиним чином розкладається в суму $T = T_{pa} + T_c$, де $T_{pa} \in \mathcal{L}(L_1)$ — чисто атомний і $T_c \in \mathcal{L}(L_1)$ — чисто неперервний оператори.*

Означення чисто атомного і чисто неперервного операторів ми наведемо нижче (див. п. 3).

Розенталь в [6] зауважив, що його теорему можна формально одержати як наслідок теореми Калтона, нічого не зазначивши, правда, про зворотний зв'язок між цими результатами. Але він пообіцяв у майбутньому опублікувати її безпосереднє доведення, не використовуючи теорему 1. Наскільки нам відомо, доведення теореми 2 досі не опубліковано.

У п. 2 наведено необхідні відомості з теорії векторних ґраток. Ми доводимо версію Розенталя теореми Калтона про зображення в загальному випадку векторних ґраток (теорема 3). Доведення є простим, хоча отримання подальших аналогів теореми 3 для випадку простору регулярних операторів на векторних ґратках (п. 3), а також згаданої теореми Розенталя для операторів у L_1 (п. 4) потребує деяких додаткових зусиль. Насправді ми даємо своє, на наш погляд, більш природне означення чисто атомного оператора. При цьому доведення версії Розенталя в п. 4 зводиться лише до доведення еквівалентності нашого означення чисто атомного оператора з означенням, даним Розенталем у [6]. Усвідомлення того факту, що множина всіх чисто неперервних операторів (вона ж — множина всіх вузьких операторів) є компонентою (це не випливає ні з теореми Калтона, ні з її версії Розенталя), яке стає тривіальним завдяки новому підходу, дає нове доведення того, що сума вузьких операторів у L_1 є вузьким оператором. У п. 5 теорему 4 застосовано до знаходження інших цікавих розкладів простору $\mathcal{L}(L_1)$, зокрема відомого розкладу Ліу.

2. Розклад векторних ґраток. Нижче ми дотримуємось [3]. Частково впорядкований лінійний простір E над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ називається *векторною ґраткою,* якщо:

i) для довільних $x, y, z \in E$ з умови $x \le y$ випливає $x + z \le y + z$;

ii) для довільних $x, y \in E$ та $\lambda \in [0, +\infty)$ з умови $x \le y$ випливає $\lambda x \le \lambda y$;

iii) для довільних $x, y \in E$ існують *точна нижня* $x \wedge y$ і *точна верхня* $x \vee y$ *межі* елементів x та y.

Векторна ґратка називається *порядково повною,* якщо кожна порядково обмежена множина має точну верхню межу. Як і в означенні векторної ґратки достатньо вимагати для iii) існування хоча б однієї з точних меж, так і в порядково повній ґратці можна показати, що порядково обмежена множина має і точну нижню межу. Підмножина F векторної ґратки E називається *порядково замкненою,* якщо для довільної підмножини $G \subseteq F$ з існування $y = \sup G \in E$ (або $y = \inf G \in E$) випливає, що $y \in F$.

Нехай E — векторна ґратка. Елемент $x \in E$ називається *додатним,* якщо $x \ge 0$, а множина всіх додатних елементів з E позначається через E^+. Для кожного елемента $x \in E$ додатна, від'ємна частини та модуль визначаються таким чином: $x^+ = x \vee 0$, $x^- = (-x) \vee 0$, $|x| = x \vee (-x)$. Два елементи $x, y \in E$ називаються диз'юнктними (або ортогональними), якщо $|x| \wedge |y| = 0$, і цей факт позначається так: $x \perp y$. Кажуть, що підмножини $A, B \subseteq E$ є диз'юнктними, якщо $x \perp y$ для довільних $x \in A$ та $y \in B$. Для довільної множини $A \subseteq E$ через $A^\perp$ позначатимемо множину $A^\perp = \{ x \in E : A$ та $\{x\}$ — диз'юнктні $\}$.

Означення 1. *Нехай E — порядково повна векторна ґратка. На E будемо розглядати порядкову збіжність, а саме, напрямленість $(x_s)_{s \in S} \subseteq E$ будемо* *вважати збіжною до елемента* $x \in E$ (*позначаємо* $x = \lim_{s \in S} x_s$), *якщо існує* $s_0 \in S$ *таке, що*

$$x = \inf_{s \geq s_0} \sup_{t \geq s} x_t = \sup_{s \geq s_0} \inf_{t \geq s} x_t. \tag{3}$$

Зауважимо, що формула (3) залишається правильною, якщо s_0 замінити на довільне $s_1 \geq s_0$.

Означення 2. *Для довільної множини* J *ряд* $\sum_{j \in J} x_j$, *складений з елементів* $x_j \in E$, *називатимемо збіжним, а сім'ю* $(x_j)_{j \in J}$ — *сумовною, якщо напрямленість* $(y_s)_{s \in J^{<\omega}}$, $y_s = \sum_{j \in s} x_j$ *порядково збігається до деякого* $y_0 \in E$, *де* $J^{<\omega}$ — *напрямлена за включенням* $\subseteq$ *система всіх скінченних підмножин* $s \subseteq J$. *При цьому* y_0 *називатимемо сумою ряду* $\sum_{j \in J} x_j$ *і записуватимемо* $y_0 = \sum_{j \in J} x_j$. *Ряд* $\sum_{j \in J} x_j$ *будемо називати абсолютно збіжним, а сім'ю* $(x_j)_{j \in J}$ — *абсолютно сумовною, якщо збігається ряд* $\sum_{j \in J} |x_j|$.

Нам потрібні деякі властивості введених понять, які, швидше за все, є відомими.

Лема 1. *Нехай* E — *порядково повна векторна ґратка,* $x_j \in E^+$, $j \in J$. *Тоді*:

i) *збіжність ряду* $\sum_{j \in J} x_j$ *рівносильна порядковій обмеженості множини* $\left\{\sum_{j \in t} x_j : t \in J^{<\omega}\right\}$, *при цьому* $\sum_{j \in J} x_j = \sup_{t \in J^{<\omega}} \sum_{j \in t} x_j$;

ii) *якщо ряд* $\sum_{j \in J} x_j$ *є збіжним і* $y_j \in E$ — *такі елементи, що* $|y_j| \leq x_j$ *при* $j \in J$, *то ряд* $\sum_{j \in J} y_j$ *також є збіжним, причому* $\left|\sum_{j \in J} y_j\right| \leq \sum_{j \in J} x_j$.

Доведення. Для доведення твердження i) достатньо зазначити, що оскільки $x_j \geq 0$, то для довільного $s \in J^{<\omega}$ маємо

$$\sup_{t \geq s} \sum_{j \in t} x_j = \sup_{t \in J^{<\omega}} \sum_{j \in t} x_j$$

при умові обмеженості обох множин, супремуми яких розглядаються, до того ж обмеженість однієї з множин, очевидно, рівносильна обмеженості іншої.

ii) Нехай спочатку $y_j \geq 0$ при $j \in J$. Множина $\left\{\sum_{j \in t} y_j : t \in J^{<\omega}\right\}$ обмежена елементом $\sum_{j \in J} x_j$. Внаслідок порядкової повноти E існує

$$\sum_{j \in J} y_j = \sup_{t \in J^{<\omega}} \sum_{j \in t} y_j \leq \sup_{t \in J^{<\omega}} \sum_{j \in t} x_j = \sum_{j \in J} x_j.$$

Розглянемо тепер загальний випадок $|y_j| \leq x_j$. Покладемо

$$y^+ = \sum_{j \in J} y_j^+, \quad y^- = \sum_{j \in J} y_j^-, \quad y = y^+ - y^-.$$

Тоді для довільного $s_0 \in J^{<\omega}$

$$\inf_{s\ge s_0}\sup_{t\ge s}\sum_{j\in t} y_j = \inf_{s\ge s_0}\sup_{t\ge s}\left(\sum_{j\in t} y_j^+ - \sum_{j\in t} y_j^-\right) \le \inf_{s\ge s_0}\sup_{t\ge s}\left(y^+ - \sum_{j\in s} y_j^-\right) =$$

$$= \inf_{s\ge s_0}\left(y^+ - \sum_{j\in s} y_j^-\right) = y^+ - y^- = y.$$

Аналогічно

$$\sup_{s\ge s_0}\inf_{t\ge s}\sum_{j\in t} y_j = \sup_{s\ge s_0}\inf_{t\ge s}\left(\sum_{j\in t} y_j^+ - \sum_{j\in t} y_j^-\right) \ge \sup_{s\ge s_0}\inf_{t\ge s}\left(\sum_{j\in s} y_j^+ - y^-\right) =$$

$$= \sup_{s\ge s_0}\left(\sum_{j\in s} y_j^+ - y^-\right) = y^+ - y^- = y.$$

Отже, ми довели, що

$$\sup_{s\ge s_0}\inf_{t\ge s}\sum_{j\in t} y_j \ge y \ge \inf_{s\ge s_0}\sup_{t\ge s}\sum_{j\in t} y_j.$$

Доведемо обернену нерівність

$$\inf_{s\ge s_0}\sup_{t\ge s}\sum_{j\in t} y_j \ge \inf_{s\ge s_0}\sup_{t\ge s}\left(\sum_{j\in t} y_j^+ - y^-\right) = \inf_{s\ge s_0}(y^+ - y^-) = y.$$

Отже, $\inf\limits_{s\ge s_0}\sup\limits_{t\ge s}\sum\limits_{j\in t} y_j = y$. Аналогічно $\sup\limits_{s\ge s_0}\inf\limits_{t\ge s}\sum\limits_{j\in t} y_j = y$.

Нарешті, використовуючи твердження i), одержуємо

$$\left|\sum_{j\in J} y_j\right| = |y| = \left|y^+ - y^-\right| \le y^+ + y^- = \sum_{j\in J} y_j^+ + \sum_{j\in J} y_j^- =$$

$$= \sum_{j\in J}\left(y_j^+ + y_j^-\right) = \sum_{j\in J}\left|y_j\right| \le \sum_{j\in J} x_j.$$

Лему доведено.

Безпосередньо з леми 1 випливає такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Абсолютно збіжний ряд* $\sum\limits_{j\in J} x_j$ *у порядково повній векторній ґратці є збіжним, причому*

$$\left|\sum_{j\in J} x_j\right| \le \sum_{j\in J}\left|x_j\right|.$$

Підмножина A векторної ґратки E називається *тілесною,* якщо для довільних $x \in A$ та $y \in E$ з умови $|y| \le |x|$ випливає, що $y \in A$. Тілесний лінійний підпростір називається *ідеалом,* порядково замкнений ідеал — *компонентою.* Компонента I векторної ґратки E називається *проекційною компонентою,* якщо $E = I \oplus I^{\perp}$.

Для довільної векторної ґратки E та довільної підмножини $A \subseteq E$ через $\mathrm{Band}\,(A)$ позначимо найменшу компоненту в E, яка містить A (очевидно, що перетин довільної кількості компонент також є компонентою, і тому такий об'єкт є коректно визначеним). Нагадаємо відоме твердження.

Лема 2 [3, с. 62]. *Нехай E — порядково повна векторна ґратка, $A \subseteq E$ — довільна підмножина. Тоді $A^{\perp}$ — компонента, причому* $E = \mathrm{Band}\,(A) \oplus A^{\perp}$. *Зокрема, кожна компонента є проекційною компонентою.*

Нехай A — підмножина порядково повної векторної ґратки E. Позначимо через $\mathrm{Abs}(A)$ множину всіх сум абсолютно збіжних рядів $\sum_{j\in J} x_j$ з елементів $x_j \in A$.

Теорема 3 (узагальнення теореми Калтона – Розенталя на векторні ґратки). *Нехай A — тілесна підмножина порядково повної векторної ґратки E. Тоді*:

i) $A^{\perp} = \{x \in E : (\forall x \in A)((0 \le y \le |x|) \Rightarrow (y = 0))\}$;

ii) $\mathrm{Band}(A) = \mathrm{Abs}(A)$.

Зокрема, $E = \mathrm{Abs}(A) \oplus A^{\perp}$ — розклад на проекційні компоненти.

Доведення. i) Позначимо через C праву частину рівності i). Нехай $x \in A^{\perp}$, $y \in A$ та $0 \le y \le |x|$. Тоді $0 = |x| \wedge y = y$. Отже, $x \in C$. Нехай тепер $x \in C$ та $y \in A$. Оскільки A є тілесною і $0 \le |x| \wedge |y| \le |x|$, то $|x| \wedge |y| \in A$. За означенням множини C маємо $|x| \wedge |y| = 0$, тому $x \in A^{\perp}$.

ii) За лемою 2

$$E = \mathrm{Band}(A) \oplus A^{\perp}. \tag{4}$$

Доведемо тепер, що

$$E = \mathrm{Abs}(A) \oplus A^{\perp}. \tag{5}$$

Доведемо існування розкладу. Нехай $x \in E$. Оскільки $x = x^+ - x^-$ [3, с. 51], то достатньо розглянути випадок $x \ge 0$.

Зауважимо, що у довільній сумовній сім'ї будь-який її ненульовий елемент може повторюватися не більш ніж скінченну кількість разів. Нехай ω_α — кардинал потужності $\sum_{n=0}^{\infty} |E|^n = |E|$. Розглянемо сукупність

$$\mathcal{A}_x = \left\{ (x_j)_{j\in J} : j \subseteq \omega_\alpha,\ x_j \in A^+,\ \sum_{j\in J} x_j \le x \right\}.$$

Будемо вважати, що $(x_i)_{i\in I} \le (y_j)_{j\in J}$, якщо $I \subseteq J$ та $x_i = y_i$ при $i \in I$. Оскільки нерівність $\sum_{j\in J} x_j \le x$ є рівносильною нерівностям $\sum_{j\in J_0} x_j \le x$ для довільної скінченної підмножини $J_0 \subseteq J$, то сім'я $(\mathcal{A}_x, \le)$ — індуктивно впорядкована, тобто кожна її лінійно впорядкована частина має верхню межу. За лемою Куратовського – Цорна в $\mathcal{A}_x$ існує максимальний елемент $(a_j)_{j\in J}$. Тоді $x_1 = \sum_{j\in J} a_j \in \mathrm{Abs}(A)$, причому $x_1 \le x$. Використавши твердження i) та максимальність $(a_j)_{j\in J}$, одержимо $x_2 = x - x_1 \in A^{\perp}$. Таким чином, $x = x_1 + x_2$ — шуканий розклад. Оскільки $\mathrm{Abs}(A) \subseteq \mathrm{Band}(A)$, то з (4) випливає $\mathrm{Abs}(A) \cap A^{\perp} = \{0\}$. Отже, (5) доведено.

Залишається відмітити, що з $\mathrm{Abs}(A) \subseteq \mathrm{Band}(A)$, (4) і (5) випливає рівність $\mathrm{Abs}(A) = \mathrm{Band}(A)$.

Теорему доведено.

3. Ґратки регулярних операторів та їх розклад. Нехай X, Y — векторні ґратки. Позначимо через $L(X, Y)$ лінійний простір усіх лінійних операторів із X в Y, а через $L^+(X, Y)$ підмножину $L(X, Y)$ усіх додатних операторів, тобто таких, які додатні елементи з X переводять у додатні елементи з Y. Вважають, що $S \le T$, якщо оператор $T - S$ є додатним. Якщо Y — порядково повна векторна ґратка, то (див. [3, с. 229]) векторний простір *регулярних* операторів, що визначається рівністю $L^r(X, Y) = L(X, Y) - L^+(X, Y)$, є порядково повною векторною ґраткою, а регулярність оператора T рівносильна існуванню оператора $|T|$. Неважко довести, що

$$|T|x = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|Tx_i| : x = \sum_{k=1}^{n} x_k,\ x_k \in X^+,\ n \in \mathbb{N}\right\} \tag{6}$$

для довільних $T \in L^r(X, Y)$ та $x \in X^+$, адже права частина (6) визначає найменший додатний оператор, що мажорує T та $-T$.

Регулярні оператори зі значеннями в порядково повній векторній ґратці є аналогом обмежених операторів у нормованих просторах: оператор буде регулярним тоді і тільки тоді, коли він відображає порядково обмежені множини в порядково обмежені множини [3, с. 229]. Зауважимо, що якщо X, Y — банахові ґратки (банахів простір E, який одночасно є векторною ґраткою, називається *банаховою ґраткою,* якщо для довільних $x, y \in E$ з умови $|x| \le |y|$ випливає $\|x\| \le \|y\|$), то $L^r(X, Y) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$. Взагалі кажучи, $L^r(X, Y) \ne \mathcal{L}(X, Y)$, однак, наприклад, $L^r(L_1, L_1) = \mathcal{L}(L_1)$. Крім того, $\mathcal{L}(X, Y)$ є порядково повною банаховою ґраткою при умові порядкової повноти Y.

Оператор $A \in L^r(X, Y)$ називається *атомом,* якщо A переводить диз'юнктні елементи в диз'юнктні елементи. Зазначимо, що в інших працях такі оператори називаються *операторами, що зберігають диз'юнктність* [7].

Згідно з Розенталем (який, щоправда, розглядав лише випадок $X = Y = L_1$, див. [6]), оператор $T \in L^r(X, Y)$ має *атомну частину*, якщо $0 \le S \le |T|$ для деякого ненульового атома $S \in L^r(X, Y)$. У протилежному випадку будемо говорити, що T *безатомний,* а сукупність усіх безатомних операторів із $L^r(X, Y)$ позначатимемо через $L_c(X, Y)$.

Наше означення чисто атомного оператора формально відрізняється від оригінального означення Розенталя в [6]. Проте воно дозволяє не лише вийти за межі випадку $X = Y = L_1$, але й розглядати чисто атомні оператори у векторних ґратках без норми, використовуючи поняття порядкової збіжності. Рівносильність означень чисто атомного оператора для випадку $X = Y = L_1$ ми доведемо в наступному пункті.

Означення 3. *Нехай X, Y — векторні ґратки, причому Y є порядково повною. Оператор $T \in L^r(X, Y)$ називатимемо чисто атомним, якщо існує абсолютно сумовна сім'я атомів $(T_j \in L^r(X, Y) : j \in J)$ така, що $T = \sum_{j \in J} T_j$.*

Множину всіх атомних (чисто атомних) операторів із X в Y позначимо через $L_a(X, Y)$ (відповідно $L_{pa}(X, Y)$). Згідно з означенням, $L_{pa}(X, Y) = \mathrm{Abs}\,(L_a(X, Y))$.

Теорема 4 (узагальнення теореми Калтона – Розенталя на регулярні оператори). *Нехай X, Y — векторні ґратки, причому Y є порядково повною. Тоді*:

i) *множина $L_a(X, Y)$ є тілесною в $L^r(X, Y)$;*

ii) $\mathrm{Band}\,(L_a(X, Y)) = L_{pa}(X, Y)$;

iii) $L_a(X, Y)^{\perp} = L_c(X, Y)$;

iv) *множини $L_{pa}(X, Y)$ та $L_c(X, Y)$ є проекційними компонентами, причому $L^r(X, Y) = L_{pa}(X, Y) \oplus L_c(X, Y)$.*

Доведення. Внаслідок теореми 3 досить довести твердження i). Нехай $A \in L_a(X, Y)$, $A > 0$, $B \in L^r(X, Y)$ та $|B| \le A$. Доведемо, що $B \in L_a(X, Y)$.

Нехай $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \perp x_2$. Оскільки

$$\left|Bx_i\right| \leq \left|B\right|\left|x_i\right| \leq A\left|x_i\right|, \quad i = 1, 2,$$

то

$$0 \leq \left|Bx_1\right| \wedge \left|Bx_2\right| \leq A\left|x_1\right| \wedge A\left|x_2\right| = 0.$$

Отже, $Bx_1 \perp Bx_2$.

4. Абсолютна порядкова збіжність операторних рядів у L_1. Домовимось, що для $x, y \in L_1$ нерівність $x \leq y$ означає, що $x(t) \leq y(t)$ майже скрізь на $[0, 1]$.

Згідно з Розенталем [6], поточково збіжний ряд операторів $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} T_n x$, $x \in L_1$, $T, T_n \in \mathcal{L}(L_1)$, називається *сильно ℓ_1-збіжним,* якщо існує $K < \infty$ таке, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| T_n x \| \leq K \| x \| \tag{7}$$

для всіх $x \in L_1$.

***Зауваження* 1.** В означенні сильної ℓ_1-збіжності достатньо вимагати виконання (7) лише для $x \in L_1^+$.

***Зауваження* 2.** Якщо послідовність операторів $T_n \in \mathcal{L}(L_1)$ задовольняє (7) для всіх $x \in L_1^+$ і деякого $K < \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ автоматично поточково збігається до деякого $T \in \mathcal{L}(L_1)$.

Теорема 5. *Для довільної послідовності $(T_n)_1^\infty$ операторів з $\mathcal{L}(L_1)$ ряд $\sum_{n \in \mathbb{N}} T_n$ є абсолютно порядково збіжним тоді і тільки тоді, коли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ — сильно ℓ_1-збіжний. Крім того, в разі збіжності ці ряди мають однакову суму.*

Доведення. Якщо ряд $\sum_{n \in \mathbb{N}} T_n$ є абсолютно порядково збіжним, то $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} |T_n|$ — порядково збіжний. Тоді $S = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} |T_k|$ та $Sx = \sum_{n=1}^{\infty} |T_n| x$ для кожного $x \in L_1^+$, звідки маємо

$$\sum_{k=1}^{n} \| T_k x \| \leq \sum_{k=1}^{n} \| |T_k| x \| = \left\| \sum_{k=1}^{n} |T_k| x \right\| \leq \| Sx \| \leq \| S \| \| x \|$$

для всіх $x \in \mathbb{N}$ і $x \in L_1^+$. Отже, (7) доведено.

Перед доведенням оберненого зазначимо, що для будь-якого $U \in \mathcal{L}(L_1)$ маємо

$$\| |U| x \| = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{m} |U x_i| \right\| : x = \sum_{i=1}^{m} x_i, \; x_i \in X^+, \; m \in \mathbb{N} \right\} \tag{8}$$

для всіх $x \in L_1^+$. Справді, якщо $x = \sum_{i=1}^{m} x_i$ і $x_i = \sum_{j=1}^{m_i} x_{i,j}$, де $x_i, x_{i,j} \in L_1^+$, то

$$\sum_{i=1}^{m} |Ux_i| \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} |Ux_{i,j}|. \tag{9}$$

Тоді з властивості розкладності векторних граток [3, с. 53] одержуємо, що множина

$$E_x = \left\{ \sum_{i=1}^{m} |Ux_i| : x = \sum_{i=1}^{m} x_i,\ x_i \in X^+,\ m \in \mathbb{N} \right\} \subseteq L_1^+$$

— напрямлена, а отже, враховуючи (6), одержуємо

$$\| |U|x \| = \| \sup E_x \| = \left\| \lim_{u \in E_x} u \right\| = \lim_{u \in E_x} \|u\| = \sup_{u \in E_x} \|u\|.$$

Нехай тепер $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n x\| \le K \|x\|$ для всіх $x \in L_1^+$ і деякого $K < \infty$. Покажемо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| |T_n| x \| \le K \|x\| \quad \text{для всіх} \quad x \in L_1^+. \tag{10}$$

Зафіксуємо $x \in L_1^+$, $n \in \mathbb{N}$ і $\varepsilon > 0$. Використовуючи (8) для $U = T_k$, $k = 1, \ldots, n$, властивість розкладності і (9), вибираємо $x_1, \ldots, x_m \in L_1^+$ такі, що $x = \sum_{i=1}^{m} x_i$ і

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} |T_k x_i| \right\| \ge \| |T_k| x \| - \frac{\varepsilon}{n}$$

для $k = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} \| |T_k| x \| \le \left\| \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |T_k x_i| \right\| + \varepsilon \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \|T_k x_i\| + \varepsilon \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} K \|x_i\| + \varepsilon = K \|x\| + \varepsilon.$$

Спрямувавши $\varepsilon \to 0$ і $n \to \infty$, одержимо (10).

Неважко бачити, що існує $S \in \mathcal{L}(L_1)$, який продовжує за лінійністю рівність $Sx = \lim_n \sum_{k=1}^{n} |T_k| x$ для $x \in L_1^+$, причому $\|S\| \le K$ та $\sum_{k=1}^{n} |T_k| \le S$. Тоді існує $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} |T_k|$, а отже, ряд $\sum_{n \in \mathbb{N}} |T_n|$ є порядково збіжним, тобто ряд $\sum_{n \in \mathbb{N}} T_n$ — абсолютно порядково збіжний.

Нехай тепер ряди є збіжними. Доведемо рівність порядкової суми $T' = \sum_{n \in \mathbb{N}} T_n$ і сильної ℓ_1-суми $T'' = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$. Для цього досить показати, що виконується рівність $T'x = \sum_{n=1}^{\infty} T_n x$ для всіх $x \in L_1^+$.

Нехай $x \in L_1^+$. Тоді

$$\left\| \left(T' - \sum_{k=1}^{n} T_k \right) x \right\| = \left\| \left(\sum_{k>n} T_k \right) x \right\| \le \left\| \left(\sum_{k>n} |T_k| \right) x \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} (|T_k| x) \right\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \| |T_k| x \| \le \|x\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \| |T_k| \|.$$

Отже, при $n \to \infty$ отримуємо $T' = T''$.

Зауважимо, що порядково збіжна сім'я $(T_i : i \in I)$ ненульових додатних операторів $T_i \in \mathcal{L}(L_1)$ є не більш ніж зліченною. Це можна легко одержати, розглянувши сім'ю $(T_i \chi[0, 1] : i \in I)$.

Наступний наслідок встановлює еквівалентність означення чисто атомного оператора, даного у попередньому пункті, з означенням Розенталя [6].

Наслідок 2. *Оператор $T \in \mathcal{L}(L_1)$ є чисто атомним тоді і тільки тоді, коли існує не більш ніж зліченна сім'я атомів $(T_i : i \in I)$, $T_i \in \mathcal{L}(L_1)$ і константа $K < \infty$ такі, що $Tx = \sum_{i \in I} T_i x$ та $\sum_{i \in I} \|T_i x\| \le K \|x\|$ для всіх $x \in L_1$.*

Згідно з [8] (див. також [9]), оператор $T \in \mathcal{L}(L_1, X)$ називається вузьким, якщо для будь-яких $A \in \Sigma$ та $\varepsilon > 0$ існує $x \in L_1$ такий, що $x^2 = \chi(A)$, $\int_{[0,1]} x\, d\mu = 0$ та $\|Tx\| < \varepsilon$.

Зауваження 3. Проекційна компонента $L_c(L_1)$ усіх безатомних операторів точно збігається з множиною $\mathrm{Narr}(L_1)$ усіх вузьких операторів на L_1 (означення див. у [9, 8]). Цей факт доведено в [6] (теорема 1.5). Зокрема, з вищезгаданої теореми Розенталя і з теореми 4 одержуємо нове доведення того, що сума двох вузьких операторів є вузьким оператором (див. [10, 11]).

5. Інші розклади простору $\mathcal{L}(L_1)$. Нехай Y — банахів простір. Нагадаємо, що оператор $T \in \mathcal{L}(L_1, Y)$ називається *репрезентовним* [12, с. 61] (в інших працях — оператором Радона–Нікодима; див., наприклад, [13]), якщо існує істотно обмежена інтегровна за Бохнером функція $f \in : [0, 1] \to Y$ така, що

$$Tx = \int_{[0,1]} f(t)\, x(t)\, d\mu(t)$$

для кожного $x \in L_1$.

Позначимо через $L_{\mathcal{R}}$ сукупність усіх репрезентовних операторів із $\mathcal{L}(L_1)$, через $L_{\mathcal{A}}$ сукупність усіх не більш ніж одновимірних операторів, $L_{\mathcal{B}}$ — сукупність скінченновимірних операторів із $\mathcal{L}(L_1)$.

Нескладно зрозуміти, що $L_{\mathcal{R}}$ — найменша компонента в $\mathcal{L}(L_1)$, яка містить усі одновимірні (скінченновимірні) оператори.

Означення 4. *Оператор $T \in \mathcal{L}(L_1)$ назвемо корепрезентовним, якщо не існує репрезентовного оператора $S \in \mathcal{L}(L_1)$, для якого $0 < |S| \le |T|$.*

Позначимо через $L_{C\mathcal{R}}$ сукупність усіх корепрезентовних операторів. Безпосереднім наслідком теореми 3 є наступне твердження.

Твердження 1. $\mathcal{L}(L_1) = L_{\mathcal{R}} \oplus L_{C\mathcal{R}}$, *причому норми відповідних проекторів дорівнюють* 1.

Покажемо, як за допомогою теореми 3 спростити доведення теореми Ліу [13] про розклад простору $\mathcal{L}(L_1)$ на чотири компоненти відомих класів операторів.

Для формулювання теореми Ліу нам потрібні деякі означення (якщо даний термін зустрічається тільки в [13], то ми в дужках вказуємо автора Ліу).

Оператор $T \in \mathcal{L}(L_1)$ називається:

оператором Данфорда–Петіса, якщо T переводить слабко збіжні послідовності в сильно збіжні (сукупність усіх операторів Данфорда–Петіса з $\mathcal{L}(L_1)$ позначимо через $L_{\mathcal{DP}}$);

істотним оператором Данфорда – Петіса (згідно з Ліу [13]), якщо T є оператором Данфорда – Петіса і для довільного $S \in \mathcal{L}(L_1)$ з умови $0 < |S| \leq |T|$ випливає, що S не є репрезентовним оператором (сукупність усіх істотних операторів Данфорда – Петіса з $\mathcal{L}(L_1)$ позначимо через $L_{\mathcal{PDP}}$);

оператором Енфло, якщо існує підпростір $E \subseteq L_1$, ізоморфний L_1, такий, що звуження $T|_E$ є ізоморфним вкладенням (сукупність усіх операторів із $\mathcal{L}(L_1)$, які не є операторами Енфло, позначимо через $L_{\mathcal{NE}}$);

істотним оператором Енфло (згідно з Ліу [13]), якщо T є оператором Енфло і для довільного $S \in \mathcal{L}(L_1)$ з умови $0 < |S| \leq |T|$ випливає, що S є оператором Енфло (сукупність усіх істотних операторів Енфло з $\mathcal{L}(L_1)$ позначимо через $L_{\mathcal{PE}}$);

оператором Розенталя (згідно з Ліу [13]), якщо T не є ні оператором Данфорда – Петіса, ні оператором Енфло;

істотним оператором Розенталя (згідно з Ліу [13]), якщо T є оператором Розенталя і для довільного $S \in \mathcal{L}(L_1)$ з умови $0 < |S| \leq |T|$ випливає, що S є оператором Розенталя (сукупність усіх істотних операторів Розенталя з $\mathcal{L}(L_1)$ позначимо через $L_{\mathcal{PR}}$).

Наступне твердження одержується як $(n-1)$-кратне застосування теореми 3.

Твердження 2. *Нехай X — порядково повна векторна гратка, $X_0, X_1, \ldots, X_n$ — компоненти в X, причому $X_0 = \{0\}$, $X_k \subseteq X_{k+1}$ та $X_n = X$. Тоді $X = Y_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus Y_n$ — розклад на компоненти, де*

$$Y_k = \{ y \in X_k : (\forall x \in X)(0 < |x| \leq |y|) \Rightarrow (x \notin Y_{k-1}) \}.$$

Теорема 6 (Ліу [13]). *$\mathcal{L}(L_1) = L_{\mathcal{R}} \oplus L_{\mathcal{PDP}} \oplus L_{\mathcal{PR}} \oplus L_{\mathcal{PE}}$ — розклад на проекційні компоненти.*

Доведення. Для доведення покладемо $X_1 = L_{\mathcal{R}}$, $X_2 = L_{\mathcal{DP}}$ та $X_3 = L_{\mathcal{NE}}$. За доведенням того, що $L_{\mathcal{DP}}$ та $L_{\mathcal{NE}}$ — компоненти, ми відсилаємо читача до [13].

1. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. I. – Berlin etc.: Springer, 1977. – 188 p.
2. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. II. – Berlin etc.: Springer, 1979. – 243 p.
3. *Schaefer H. H.* Banach lattices and positive operators. – Berlin etc.: Springer, 1974. – 376 p.
4. *Kalton N. J.* The endomorphisms of L_p $(0 \leq p \leq 1)$ // Indiana Univ. Math. J. – 1978. – **27**, № 3. – P. 353 – 381.
5. *Godefroy G., Kalton N. J., Li D.* Operators between subspaces and quotients of L^1 // Ibid. – 2000. – **49**, № 1. – P. 245 – 286.
6. *Rosenthal H. P.* Embeddings of L^1 in L^1 // Contemp. Math. – 1984. – **26**. – P. 335 – 349.
7. *Abramovich Yu. A., Kitover A. K.* Inverses of disjointness preserving operators // Mem. Amer. Math. Soc. – 2000. – **143**. – 164 p.
8. *Plichko A. M., Popov M. M.* Symmetric function spaces on atomless probability spaces // Dis. Math. – 1990. – **306**. – P. 1 – 85.
9. *Попов М. М.* Элементарное доказательство отсутствия ненулевых компактных операторов, определенных на пространстве L_p, $0 \leq p \leq 1$ // Мат. заметки. – 1990. – **47**, № 5. – С. 154 – 155.
10. *Shvydkoy R. V.* Operators and integrals in Banach spaces: Dis. – Missouri - Columbia, 2001. – 125 p.
11. *Kadets V. M., Popov M. M.* Some stability theorems on narrow operators acting in L^1 and $C(K)$ // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2003. – **10**, № 1. – С. 49 – 60.
12. *Diestel J., Uhl J. J.* Vector measures // Amer. Math. Soc. Math. Surv. and Monogr. – 1977. – **15**. – 322 p.
13. *Liu Z.* A decomposition theorem for operators on L^1 // J. Oper. Theory. – 1998. – **40**, № 1. – P. 3 – 34.

Одержано 16.02.2005