УДК 519.1

**И. К. Редчук** (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# РАЗДЕЛЯЮЩИЕ ФУНКЦИИ, СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ И ЛОКАЛЬНО-СКАЛЯРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

The connection of separating functions $\rho_r$ with locally scalar representations of graphs and with the spectral theory of graphs are considered.

Розглядається зв'язок відокремлюючих функцій $\rho_r$ з локально-скалярними зображеннями графів та зі спектральною теорією графів.

**1. Разделяющие функции $\rho_r$.** Настоящая статья посвящена изучению связей разделяющих функций $\rho_r$, введенных в [1], с локально-скалярными представлениями графов, с одной стороны, и со спектральной теорией графов — с другой.

В работе [2] введена функция $P(S)$, ставящая в соответствие частично упорядоченному множеству $S$ положительное рациональное число. В терминах функции $P$ в [2] сформулирован критерий конечной представимости и ручности произвольного частично упорядоченного множества: частично упорядоченное множество $S$ конечно представимо (ручное), если и только если $P(S) < 4$ ($P(S) = 4$). Если частично упорядоченное множество $S$ есть объединение $s$ непересекающихся цепей (т. е. таких, что два любых элемента, принадлежащие разным цепям, несравнимы), то

$$P(S) = \rho(n_1, n_2, \ldots, n_s) = \sum_{i=1}^{s} \rho(n_i) = \sum_{i=1}^{s} 1 + \frac{n_i - 1}{n_i + 1}, \quad n_i \in \mathbb{N}.$$

Список всех решений уравнения $\rho(n_1, n_2, \ldots, n_s) = 4$ таков:

$$(1, 1, 1, 1), \quad (2, 2, 2), \quad (1, 3, 3), \quad (1, 2, 5). \tag{1}$$

Поскольку функция $\rho$ возрастающая (частичный порядок на целочисленных векторах $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ определяется естественным образом), из списка (1) легко получить список всех решений неравенства $\rho(n_1, n_2, \ldots, n_s) < 4$:

$$(1, 2, 2), \quad (1, 2, 3), \quad (1, 2, 4), \quad (1, 1, k), \quad (l, m), \quad (n), \tag{2}$$

где $k$, $l$, $m$, $n$ — произвольные натуральные числа.

Примечательно, что список (1) соответствует всем расширенным графа Дынкина с одной точкой ветвления (точное определение см. в п. 4 данной статьи) $\tilde{D}_4$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$: компоненты векторов из списка (1) соответствуют числу вершин на каждой ветви. Точно так же список (2) описывает графы Дынкина $E_6$, $E_7$, $E_8$, $D_n$, $A_n$.

В терминах функции $\rho$ также могут быть записаны общие формулы для размерностей и сформулированы критерии конечномерности и полиномиальности роста алгебр, заданных образующими и линейными [3] или полинейными соотношениями (см. [4]).

В работе [1] предложено естественное обобщение функции $\rho$. Обозначим через $V_m$, $m \in \mathbb{N}$, множество неупорядоченных $m$-ок неотрицательных целых чисел; $V = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m$. Пусть для фиксированного $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 4$, задана рекуррентная числовая последовательность $\{u_i\}$: $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{i+2} = (r-2)u_{i+1} - u_i$. Положим

$$\rho_r(0) = 0,$$
$$\rho_r(n) = 1 + \frac{u_{n-1}}{u_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

и для $\overline{v} \in V$, $\overline{v} = (n_1, n_2, \ldots, n_s)$

$$\rho_r(\overline{v}) = \sum_{i=1}^{s} \rho_r(n_i)^1.$$

Легко видеть, что $\rho_4 \equiv \rho$.

Функции $\rho_r$ использовались для описания стандартных характеров локально-скалярных представлений некоторых типов графов (см. [1, 5]).

В работе [1] получены следующие свойства функций $\rho_r$.

**Предложение 1.** *Для* $r > 4$

$$\rho_r(n) = \frac{(\lambda+1)(\lambda^n - 1)}{\lambda^{n+1} - 1}, \tag{4}$$

*где*

$$\lambda = \frac{r - 2 + \sqrt{r^2 - 4r}}{2}.$$

**Предложение 2.** *При фиксированном* $r \in \mathbb{Z}$ *уравнение*

$$\rho_r(n_1, n_2, \ldots, n_s) = r \tag{5}$$

*имеет следующие решения*:

$$\underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{r}, \quad \underbrace{(2, 2, \ldots, 2)}_{r-1}, \quad \underbrace{(1, 3, 3, \ldots, 3)}_{r-1}, \quad \underbrace{(1, 2, 5, 5, \ldots, 5)}_{r-1}.$$

*При* $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ *уравнение* (5) *решений не имеет.*

Здесь мы укажем более простой путь задания функций $\rho_r$. Покажем, что

$$\rho_r(n+1) = \frac{r}{r - \rho_r(n)} \tag{6}$$

для всех $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Действительно, по формуле (4)

$$\frac{r}{r - \rho_r(n)} = \frac{r}{r - (\lambda+1)(\lambda^n - 1) / (\lambda^{n+1} - 1)};$$

так как $r = (\lambda + 1)^2 / \lambda$ и $\lambda \neq 1$, последнее равенство приводится к виду

$$\frac{(\lambda+1)(\lambda^n - 1)}{(\lambda+1)(\lambda^{n+1} - 1) - \lambda(\lambda^n - 1)} = \frac{(\lambda+1)(\lambda^{n+1} - 1)}{\lambda^{n+2} - 1} = \rho_r(n+1),$$

что и требовалось показать.

Далее будем задавать функции $\rho_r$ по формулам (6) для $r \geq 1$, $r \in \mathbb{R}$ (начальное условие то же: $\rho(0) = 0$). Однако для $1 \leq r < 4$ $\lambda^{n+1}$ может быть равно 1 и $\rho_r(n)$ будет не определено. Равенство $\lambda^{n+1} = 1$ равносильно $\lambda =$

[1] Данное определение несколько отличается от такового в [1]: $\rho_r(n)$ здесь соответствуют $\rho_{r-4}$ в [1].

$= \cos\frac{2\pi k}{n+1} + i\sin\frac{2\pi k}{n+1}$, $k = \overline{1, n}$ $(\lambda \neq 1)$, что означает $r = 4\cos^2\frac{\pi k}{n+1}$, $k = \overline{1, n}$. При $r = 4\cos^2\frac{\pi k}{n+1}$, $k = \overline{1, n}$, будем формально полагать $\rho_r(n) = \infty$ и все дробно-рациональные преобразования с таким $\rho_r(n)$ проводить, используя естественный предельный переход. В частности, если $\rho_r(n) = \infty$, то $\rho_r(n+1) = 0$, из чего следует, что при $r = 4\cos^2\frac{\pi k}{n+1}$, $k = \overline{1, n}$, функция $\rho_r(m)$ периодическая с периодом $n+1$.

Нетрудно убедиться, что формулы (3) и (4), а также предложение 2 остаются справедливыми при таком определении.

Укажем на еще один случай, где функции $\rho_r$ появляются естественным образом. В работе [6] рассматривались $*$-представления $*$-алгебр

$$\mathcal{P}_{r,\alpha} = \mathbb{C}\left\langle p_1, p_2, \ldots, p_r \,\middle|\, p_k^2 = p_k^* = p_k, \ \sum_{k=1}^{r} = \alpha e \right\rangle$$

в $H$, где $e$ — единица алгебры, $H$ — сепарабельное гильбертово пространство. Было показано, что если $\Sigma_r$ — множество тех $\alpha \in \mathbb{R}$, при которых $\mathcal{P}_{r,\alpha}$ имеет хотя бы одно представление, и $r \geq 4$, то

$$\Sigma_r = \left\{ \Lambda_r^1, \Lambda_r^2, \left[\frac{r - \sqrt{r^2 - 4r}}{2}, \frac{r + \sqrt{r^2 - 4r}}{2}\right], r - \Lambda_r^1, r - \Lambda_r^2 \right\},$$

где $\Lambda_r^1$, $\Lambda_r^2$ — дискретные множества, которые были описаны рекуррентно:

$$\Lambda_r^1 = \left\{ 0, 1 + \frac{1}{r-1}, 1 + \frac{1}{(r-2) - 1/(r-1)}, \ldots, 1 + \cfrac{1}{(r-2) - \cfrac{1}{(r-2) - \cfrac{1}{\ddots - 1/(r-1)}}} \right\},$$

$$\Lambda_r^2 = \left\{ 1, 1 + \frac{1}{r-2}, 1 + \frac{1}{(r-2) - 1/(r-2)}, \ldots, 1 + \cfrac{1}{(r-2) - \cfrac{1}{(r-2) - \cfrac{1}{\ddots - 1/(r-2)}}} \right\}.$$

Легко видеть, что $\Lambda_r^1 = \{\rho_r(2k)\}$, $\Lambda_r^2 = \{\rho_r(2k+1)\}$, $k \in \mathbb{N}_0$, т. е.[2]

$$\Sigma_r = \left\{ \{\rho_r(k)\}, \left[\frac{r - \sqrt{r^2 - 4r}}{2}, \frac{r + \sqrt{r^2 - 4r}}{2}\right], \{r - \rho_r(k)\} \right\}.$$

В работе [6] на категориях $\operatorname{Rep}\mathcal{P}_{r,\alpha}$ $*$-представлений алгебр $\mathcal{P}_{r,\alpha}$ введены функторы $\Phi^+$ и $\Phi^-$ (функторы Кокстера), с помощью которых описаны все неприводимые $*$-представления алгебр $\mathcal{P}_{r,\alpha}$ (с точностью до унитарной эквивалентности) в точках дискретного спектра множества $\Sigma_r$. Там же была дана явная (но достаточно сложная) формула для вычисления $\Phi^{+k}(\alpha) = (\Phi^+)^k(\alpha)$. Покажем, что эта формула в терминах функций $\rho_r$ имеет более простой вид. Для этого нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 1.** $\rho_r(2k-1) = 1 + \dfrac{u_{k-1}}{u_k}$.

***Доказательство.*** Если $r = 4$, то

$$\rho_r(2k-1) = 1 + \frac{2k-2}{2k} = 1 + \frac{k-1}{k} = 1 + \frac{u_{k-1}}{u_k}.$$

Если $r > 4$, то $u_k = \dfrac{\lambda^k - \lambda^{-k}}{\sqrt{r^2 - 4r}} =$ (см. [1]) $= \dfrac{\lambda^{2k} - 1}{\lambda^{k-1}(\lambda^2 - 1)}$. Тогда

$$1 + \frac{u_{k-1}}{u_k} = 1 + \frac{\lambda^{2k-2} - 1}{\lambda^{k-2}} \frac{\lambda^{k-1}}{\lambda^{2k-1}} = \rho_r(2k-1).$$

Лемма доказана.

Покажем теперь, что

$$\Phi^{+k}(\alpha) = \frac{r - \rho_r(2k-1)\alpha}{r - \rho_r(2k-1) - \alpha}.$$

В работе [6] получено $\Phi^{+k}(\alpha) = 1 + \dfrac{a_{k-1}}{a_k}$, где $a_k$ задается рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_2 = r - 1 - \alpha$, $a_{k+2} = (r-2)a_{k+1} - a_k$. Нетрудно убедиться по индукции, что $a_k = u_{k+1} + (1-\alpha)u_k$. Тогда $\Phi^{+k}(\alpha) = 1 + \dfrac{a_{k-1}}{a_k} = 1 + \dfrac{u_k + u_{k-1} - \alpha u_{k-1}}{u_{k+1} + u_k - \alpha u_k} \overset{(3)}{=}$

$\overset{(3)}{=} \dfrac{ru_k - \alpha(u_k + u_{k-1})}{ru_k - (u_k + u_{k-1})} = \dfrac{r - \rho_r(2k-1)\alpha}{r - \rho_r(2k-1) - \alpha}$, что и требовалось доказать.

**2. Спектры и индексы графов.** Здесь и всюду далее (если специально не оговорено противное) все рассматриваемые графы предполагаются конечными, связными и не содержащими петель и кратных ребер.

Пусть $G_v$ — множество вершин, а $G_e$ — множество ребер графа $G$. Зададим нумерацию на вершинах графа $G$: $G_v = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $M(g_k) = \{g_i \mid g_i$ связана с $g_k\}$, $1 \le k, i \le n$.

Матрица $A_G = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n}$, где

---

[2] Введение функций $\rho_r$ было предложено А. В. Ройтером именно в связи с описанием этих множеств.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } g_i \in M(g_j), \\ 0, & \text{если } g_i \notin M(g_j), \end{cases}$$

называется *матрицей смежности* графа $G$.

Поскольку матрица $A_G$ симметрическая, над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел все ее собственные значения действительны. Линейно упорядоченное множество $\sigma(G) = \{\lambda_{\min} = \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n = \lambda_{\max}\}$ собственных значений матрицы $A_G$ называется *спектром* графа $G$, а число $\operatorname{ind}(G) = \lambda_{\max}$ — *индексом* графа $G$.

Обозначим через $V_G$ линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, состоящее из наборов $x = (x_i)$, отождествив при этом вектор $x \in V_G$ с функцией $x: G_v \to \mathbb{R}$, $x_i = x(g_i)$. Элементы $x \in V_G$ называются $G$-векторами [5]. Матрицу смежности $A_G$ можно рассматривать как матрицу линейного оператора в естественном базисе пространства $V_G$.

Теория спектров графов в настоящее время достаточно глубоко изучена (см. [7, 8]). В частности, имеет место следующее утверждение, известное как теорема Смита.

**Теорема 1** [9]. *Пусть* $\lambda = \operatorname{ind}(G)$ *для связного графа* $G$. *Тогда* $\lambda < 2$ *тогда и только тогда, когда* $G$ *— граф Дынкина* $(A_n, D_n, E_6, E_7, E_8)$; $\lambda = 2$ *тогда и только тогда, когда* $G$ *— расширенный граф Дынкина* $\left(\tilde{A}_n,\ \tilde{D}_n,\ \tilde{E}_6,\ \tilde{E}_7,\ \tilde{E}_8\right)$.

Заметим, что если $G$ несвязен, то его индекс равен наибольшему из индексов его связных компонент. Имеют место также следующие утверждения [7, 8].

**Предложение 3.** *Для любого графа* $G$ *выполняются неравенства* $1 \le \operatorname{ind}(G) \le |G_v| - 1$.

**Предложение 4.** *Индекс* $\lambda = \operatorname{ind}(G)$ *произвольного графа* $G$ *— простое собственное значение, если и только если граф* $G$ *связен, и в этом случае собственное подпространство пространства* $V_G$, *принадлежащее* $\lambda$, *порождается вектором, все координаты которого положительны.*

Этот вектор называется *главным собственным вектором* графа $G$. Если $\lambda = \operatorname{ind}(G)$, $A_G = \| a_{ij} \|$, то условие „$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — главный собственный вектор графа $G$" можно записать в виде системы уравнений

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Граф $G$ называется *двудольным,* если $G_v = \overset{\bullet}{G}_v \coprod \overset{\circ}{G}_v$, причем $\overset{\bullet}{G}_v \cap \overset{\circ}{G} = \varnothing$ и из $g \in \overset{\bullet}{G}_v$ следует $M(g) \subseteq \overset{\circ}{G}_v$ и, наоборот, из $h \in \overset{\circ}{G}_v$ следует $M(g) \subseteq \overset{\bullet}{G}_v$. Множество $\overset{\circ}{G}_v$ называется *множеством четных вершин графа* $G$, а множество $\overset{\bullet}{G}_v$ *— множеством нечетных вершин графа* $G$ [5]. Если граф $G$ двудольный и сначала занумерованы нечетные, а потом четные вершины, то его матрица смежности имеет вид

$$A_G = \begin{bmatrix} O_1 & B \\ B^* & O_2 \end{bmatrix},$$

где $O_1$, $O_2$ — квадратные нулевые матрицы порядков $|\overset{\bullet}{G}_v|$ и $|\overset{\circ}{G}_v|$ соответственно, $B^*$ — транспонированная матрица к $B$.

Очевидно, что любое дерево есть двудольный граф, а цикл с $n$ вершинами двудольный тогда и только тогда, когда $n$ четно. (Из изложенного следует, что двудольными будут все графы Дынкина и расширенные графы Дынкина, за исключением $\tilde{A}_{n-1}$ при нечетном числе вершин $n$.)

**3. Стандартные характеры звездочных графов.** Пусть $G$ — двудольный граф, $G_v = \overset{\bullet}{G}_v \coprod \overset{\circ}{G}_v$. Зафиксируем нумерацию вершин графа $G$ так, что $\overset{\bullet}{G}_v = \{g_1, g_2, \ldots, g_p\}$, $\overset{\circ}{G}_v = \{g_{p+1}, g_{p+2}, \ldots, g_n\}$. Пусть (в соответствии с этой нумерацией) $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — главный собственный вектор графа $G$, т. е. вектор $y$ удовлетворяет равенствам (7):

$$\lambda y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{8}$$

где $\lambda = \operatorname{ind}(G)$. Вектор $y_\bullet = (y_1, y_2, \ldots, y_p, 0, 0, \ldots, 0)$ назовем *нечетным стандартным вектором,* а вектор $y_\circ = (0, 0, \ldots, 0, y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots, y_n)$ — *четным стандартным вектором* $G$. Поскольку главный собственный вектор $y$ определен с точностью до ненулевого действительного множителя, $y_\bullet$ и $y_\circ$ также определены с точностью до общего для обоих векторов $y_\bullet$, $y_\circ$ ненулевого множителя.

*Преобразование Кокстера* в пространстве $V_G$ есть линейное преобразование $c = \sigma_{g_n} \ldots \sigma_{g_1}$, где $\left(\sigma_{g_i}(x)\right)_j = x_j$ при $i \neq j$ и $\left(\sigma_{g_i}(x)\right)_i = -x_i + \sum_{j | g_j \in M(g_j)} x_j$. Обозначим $\overset{\bullet}{c} = \sigma_{g_p} \ldots \sigma_{g_1}$, $\overset{\circ}{c} = \sigma_{g_n} \ldots \sigma_{g_{p+1}}$, т. е. $c = \overset{\circ}{c}\,\overset{\bullet}{c}$. Очевидно, $c^{-1} = \overset{\bullet}{c}\,\overset{\circ}{c}$ и $\left(\overset{\bullet}{c}\right)^2 = \left(\overset{\circ}{c}\right)^2 = \mathrm{id}$. Положим $c_t = \underbrace{\ldots \overset{\bullet}{c}\,\overset{\circ}{c}\,\overset{\bullet}{c}}_{t}$ при $t > 0$, $c_t = \underbrace{\ldots \overset{\circ}{c}\,\overset{\bullet}{c}\,\overset{\circ}{c}}_{t}$ при $t < 0$ и $c_0 = \mathrm{id}$. Для $G$-векторов $v$ и $w$ будем обозначать $v \simeq w$, если $v$ и $w$ линейно зависимы.

В работе [1] получены явные формулы в терминах функций $\rho_r$, показывающие, как меняются четные и нечетные стандартные векторы под действием преобразований $c_t$ для некоторых графов специального вида. Ниже мы докажем аналогичное утверждение для любого двудольного графа $G$.

**Предложение 5.** *Пусть $G$ — двудольный граф, $r = (\operatorname{ind}(G))^2 \geq 4$, $y_\bullet$ и $y_\circ$ — его нечетный и четный стандартный векторы, $t \in \mathbb{N}$. Тогда имеют место равенства*

$$\begin{aligned} c_{2t-1}(y_\circ) &\simeq \left(y_\circ + \frac{\sqrt{r}}{\rho_r(2t-1)} y_\bullet\right), \quad & c_{2t}(y_\circ) &\simeq \left(y_\circ + \frac{\rho_r(2t)}{\sqrt{r}} y_\bullet\right), \\ c_{-(2t+1)}(y_\bullet) &\simeq \left(y_\bullet + \frac{\sqrt{r}}{\rho_r(2t-1)} y_\circ\right), \quad & c_{-2t}(y_\bullet) &\simeq \left(y_\bullet + \frac{\rho_r(2t)}{\sqrt{r}} y_\circ\right). \end{aligned} \tag{9}$$

***Доказательство.*** Докажем предложение по индукции для случая $c_m(y_\bullet)$, где $m < 0$ (в случае $m > 0$ доказательство такое же с точностью до „четности".)

При $t=-1$ имеем $c_{-1}(y_\bullet)=\overset{\circ}{c}(y_\bullet)=\overset{\circ}{c}(y_1,\ldots,y_p,0,\ldots,0)=\big(y_1,\ldots,y_p,$ $x_{p+1},\ldots,x_n\big)$, где $x_k=\sum_{g_i\in M(g_k)}y_i=\sqrt{r}\,y_k$, $k=\overline{1,p}$ (формулы (8)). Отсюда $c_{-2}(y_\bullet)=(r-1)\,y_\bullet+\sqrt{r}\,y_\circ\simeq y_\bullet+\sqrt{r}\,y_\circ/(r-1)=y_\bullet+\rho_r(2)\,y_\circ/\sqrt{r}$, поскольку $\rho_r(2)=r/(r-1)$.

Предположим теперь, что формулы (9) справедливы для всех $m\le 2t$. Тогда

$$c_{-(2m+1)}(y_\bullet)=\overset{\circ}{c}c_{-2t}(y_\bullet)\simeq$$

$$\simeq\overset{\circ}{c}\left(y_\bullet+\frac{\rho_r(2t)}{\sqrt{r}}y_\circ\right)=\overset{\circ}{c}\left(y_1,\ldots,y_p,\frac{\rho_r(2t)}{\sqrt{r}}y_{p+1},\ldots,\frac{\rho_r(2t)}{\sqrt{r}}y_n\right)=$$

$$=\overset{\circ}{c}\big(y_1,\ldots,y_p,x_{p+1},\ldots,x_n\big),$$

где

$$x_k=\sum_{g_i\in M(g_k)}y_i-\frac{\rho_r(2t)}{\sqrt{r}}y_k=y_k\left(\sqrt{r}-\frac{\rho_r(2t)}{\sqrt{r}}\right)=\frac{r-\rho_r(2t)}{\sqrt{r}}y_k=\frac{\sqrt{r}}{\rho_r(2t+1)}y_k,$$

откуда имеем $c_{-(2m+1)}(y_\bullet)=y_\bullet+\dfrac{\sqrt{r}}{\rho_r(2t+1)}y_\circ$.

Далее,

$$c_{-(2t+2)}(y_\bullet)=\overset{\bullet}{c}c_{-(2t+1)}(y_\bullet)=\overset{\bullet}{c}\left(y_\bullet+\frac{\sqrt{r}}{\rho_r(2t+1)}y_\circ\right)=$$

$$=\overset{\bullet}{c}\left(y_1,\ldots,y_p,\frac{\sqrt{r}}{\rho_r(2t+1)}y_{p+1},\ldots,\frac{\sqrt{r}}{\rho_r(2t+1)}y_n\right)=$$

$$=\left(x_1,\ldots,x_p,\frac{\sqrt{r}}{\rho_r(2t+1)}y_{p+1},\ldots,\frac{\sqrt{r}}{\rho_r(2t+1)}y_n\right),$$

где

$$x_k=\frac{\sqrt{r}}{\rho_r(2t+1)}\sum_{g_i\in M(g_k)}y_i-y_k=y_k\left(\frac{r}{\rho_r(2t+1)}-1\right).$$

Отсюда

$$c_{-(2t+2)}(y_\bullet)=\left(\frac{r}{\rho_r(2t+1)}-1\right)y_\bullet+\frac{r}{\rho_r(2t+1)}y_\circ\simeq$$

$$\simeq y_\bullet+\frac{\sqrt{r}}{\rho_r(2t+1)}\frac{\rho_r(2t+1)}{r-\rho_r(2t+1)}y_\circ=y_\bullet+\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{r}{r-\rho_r(2t+1)}y_\circ=y_\bullet+\frac{\rho_r(2t)}{\sqrt{r}}y_\circ.$$

Предложение доказано[3].

Рассмотрим связь стандартных векторов двудольного графа $G$ с локально-скалярными представлениями этого графа. Локально-скалярные представления графов были введены и изучались в [5]. Напомним некоторые понятия, введенные в этой работе.

Пусть $\mathcal{H}$ — категория гильбертовых пространств, объектами которой являются сепарабельные гильбертовы пространства, а морфизмами — ограниченные операторы. *Представление* $\pi$ *графа* $G$ в $\mathcal{H}$ сопоставляет каждой вершине

[3] Эти формулы были независимо получены В. Л. Островским для случая звездочных графов.

$a \in G_v$ объект $\pi(a) = H_a \in \operatorname{Ob}\mathcal{H}$ и каждому ребру $\gamma \in G_e$, соединяющему вершины $a$ и $b$, — пару взаимосопряженных линейных операторов $\pi(\gamma) = \{\Gamma_{ab}, \Gamma_{ba}\}$, где $\Gamma_{ab}\colon H_b \to H_a$. Обозначим $A_g = \sum_{b \in M(g)} \Gamma_{gb}\Gamma_{bg}$, $b, g \in G_v$. Представление $\pi$ называется *локально-скалярным,* если все операторы $A_g$ скалярны, $A_g = \alpha_g I_{H_g}$, где $I_{H_g}$ — единичный оператор в пространстве $H_g$. Поскольку операторы $A_g$ ограничены, то $\alpha_g \geq 0$. $G$-вектор $f$ такой, что $f(g) = \alpha_g$ для всех $g \in G_v$, называется *характером* представления, а $G$-вектор $d$ такой, что $d(g) = \dim \pi(g)$, — *размерностью* представления $\pi$. Заметим, что для фиксированного представления $\pi$ размерность определена однозначно, а характер, вообще говоря, нет (он определен однозначно на *носителе* $G^{\pi} = \{a \in G_v \mid \pi(a) \neq \neq 0\}$ представления.) Представление $\pi$ называется *точным,* если $G^{\pi} = G_v$.

В работе [5] для произвольного графа $G$ рассмотрены: категория $\operatorname{Rep}(G, \mathcal{H})$ представлений $G$ в категории гильбертовых пространств, категория $\operatorname{Rep}(G)$ локально-скалярных представлений, ее (полная) подкатегория $\operatorname{Rep}(G, d, f)$ представлений с фиксированной размерностью $d$ и характером $f$. В [1] для двудольного графа $G$ определены: категория $\operatorname{Rep}(G, \coprod')$ — объединение категорий $\operatorname{Rep}(G, d, f)$ таких, что $f(g) > 0$ при всех $g \in M(G^{\pi})$; категория $\operatorname{Rep}_{\circ}(G, \coprod') \subset \operatorname{Rep}(G, \coprod')$ — полная подкатегория представлений с характером $f$, для которых $(d, f)$ такие, что $f(g) > 0$ при $g \in (M(G^{\pi}) \cup G^{\pi}) \cap \overset{\bullet}{G}_v$, и аналогичная категория $\operatorname{Rep}_{\bullet}(G, \coprod')$; функтор $\overset{\circ}{\Phi}$, осуществляющий эквивалентность категории $\operatorname{Rep}_{\circ}(G, \coprod')$ с собой, такой, что $\overset{\circ}{\Phi}(f)_i = f_i$ при $g_i \in \overset{\circ}{G}_v$, а если $g_i \in \overset{\bullet}{G}_v$, то при $d_i = 0$, $g_i \in M(G^{\pi})$ выполняется $\overset{\circ}{\Phi}(f)_i = f_i$, в остальных случаях — $\overset{\circ}{\Phi}(f)_i = \sigma_i(f)$; аналогичный функтор $\overset{\bullet}{\Phi}$. Также для любого $k \in \mathbb{N}$ построены функторы $\Phi_k = \underbrace{\ldots\overset{\bullet}{\Phi}\overset{\circ}{\Phi}\overset{\bullet}{\Phi}}_{k}$ и $\Phi_{-k} = \underbrace{\ldots\overset{\circ}{\Phi}\overset{\bullet}{\Phi}\overset{\circ}{\Phi}}_{k}$ такие, что $d(\Phi_t(\pi)) = c_t(d(\pi))$, $t \in \mathbb{Z}$.

Неотрицательный $G$-вектор $x$ называется *регулярным,* если $c_t(x)$ неотрицателен при любом $t \in \mathbb{Z}$, и *сингулярным* — в противном случае. Локально-скалярное представление $\pi$ графа $G$ *сингулярно* (*регулярно*), если $\pi$ неразложимо и конечномерно и $d(\pi)$ — сингулярный (регулярный) вектор. Объект $(\pi, f) \in \operatorname{Ob}\operatorname{Rep}(G, \coprod')$ *сингулярен,* если сингулярно $\pi$.

Группа $W$, порожденная отражениями $\sigma_{g_i}$, называется *группой Вейля.* Вектор $x \in V_G$ называется (*действительным*) *корнем,* если для некоторых $a \in G_v$ и $w \in W$ имеем $x = w\bar{a}$, где $\bar{a}$ — *простой корень,* т. е. $\bar{a}(a) = 1$ и $\bar{a}(a) = 0$ при $g \neq a$.

*Простейший объект* в категории $\operatorname{Rep}(G, \coprod')$ — это пара $(\Pi_g, \bar{f})$ такая, что $\dim \Pi_g = \bar{g}$; $\bar{f}(g) = 0$ и $\bar{f}(a) > 0$ при $a \in M(g)$.

**Теорема 2** [1]. *Каждый сингулярный объект категории* $\operatorname{Rep}(G, \coprod')$ *представляется в виде* $\Phi_m(\Pi_g, \bar{f})$, *где* $(\Pi_g, \bar{f})$ — *простейший объект* ($m \geq 0$ *при* $g \in \overset{\circ}{G}_v$ *и* $m \leq 0$ *при* $g \in \overset{\bullet}{G}_v$). *При этом каждое точное сингулярное* *представление* $G$ *соответствует* (*с точностью до эквивалентности*) *одному сингулярному объекту* $\operatorname{Rep}(G, \coprod')$.

Назовем характер $f$ представления *стандартным*, если $f = c_t(y_\circ)$ или $f = c_t(y_\bullet)$, $t \in \mathbb{Z}$. Представление $(\pi, f)$ со стандартным характером $f$ называется *стандартным представлением,* а соответствующий объект категории $\operatorname{Rep}(G, \coprod')$ — *стандартным объектом.*

Следующее утверждение хорошо известно (см., например, [10]).

**Лемма 2.** *Если* $x$ — *действительный корень, то либо* $x > 0$, *либо* $(-x) > 0$.

Докажем следующее предложение.

**Предложение 6.** *Если* $d$ — *положительный действительный сингулярный корень графа* $G$, *то найдется такое* $t \in \mathbb{Z}$, *что* $d = c_t(\overline{g})$, $g \in G_v$.

***Доказательство.*** Пусть $d$ — не простой корень (в противном случае положим $t = 0$) и $m$ — наименьшее по модулю целое число со свойством $c_m(d) < 0$. Пусть, для определенности, $m > 0$. Тогда $c_{m-1}(d) > 0$ (лемма 2). Отсюда получаем, что $c_{m-1}(d)$ — простой корень (если бы $c_{m-1}(d)$ имел хотя бы две положительные координаты, то координаты, соответствующие соседним с ними вершинам, были бы нулевыми, и, применив отражение в одной из этих положительных координат, получим противоречие с леммой 2). Таким образом, $t = 1 - m$ и предложение доказано.

**Теорема 3.** *Пусть* $G$ — *двудольный граф с* $\operatorname{ind}(G) \geq 2$, $d$ — *сингулярный действительный корень в* $G$. *Тогда существует единственное стандартное представление* $\pi$ *размерности* $d$.

***Доказательство.*** *Существование.* Поскольку $d$ — сингулярный корень, согласно предложению 6 существует $t \in \mathbb{Z}$ такое, что $d = c_t(\overline{g})$. Тогда, учитывая теорему 2 и предложение 5, убеждаемся, что при $t \geq 0$ $\Phi_t(\Pi_g, y_\circ)$, а при $t \leq 0$ $\Phi_t(\Pi_g, y_\bullet)$ будут равны $(\pi, y)$, где $y$ — стандартный характер, $\dim \pi = d$.

*Единственность.* Из формул (9) следует, что если $(\pi, f)$ — стандартный объект категории $\operatorname{Rep}(G, \coprod')$, то $\overset{\circ}{\Phi}(\pi, f)$ — стандартный объект, если только $\pi \neq \Pi_g$, где $g \in \overset{\circ}{G}_v$, и $\overset{\bullet}{\Phi}(\pi, f)$ — стандартный объект, если только $\pi \neq \Pi_g$, где $g \in \overset{\bullet}{G}_v$.

**4. Индексы звездочных графов.** *Путем* длины $l \in \mathbb{N}$ на графе $G$ называется упорядоченная последовательность вершин $\left(g_{i_1}, \ldots, g_{i_{l+1}}\right)$ такая, что $g_{i_k} \in M\left(g_{i_{k+1}}\right)$, $k = \overline{1, l}$. Вершины $g_{i_1}$ и $g_{i_{l+1}}$ называются началом и концом пути соответственно. Вершина $g \in G_v$ графа $G$ называется *точкой ветвления,* если $M(g) \geq 3$. Граф $G$ называется *звездочным графом,* если $G$ — дерево, имеющее не более одной точки ветвления. Для звездочного графа $G$ множество $G_v$ можно представить в виде

$$G_v = B_0 \coprod B_1 \coprod B_2 \coprod \ldots \coprod B_s,$$

где $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i, j = \overline{0, s}$, $B_0 = \{g_0\}$, причем $g_0$ — точка ветвления в $G$ (если она существует) и $g, h \in B_i$ для некоторого $i$, если и только если путь минимальной длины с началом в $g$ и концом в $h$ не содержит $g_0$. Множества $B_i$ называются *ветвями* графа $G$.

Ниже мы укажем на непосредственную связь разделяющих функций $\rho_r$ с индексами звездочных графов.

Докажем сначала следующую лемму.

**Лемма 3.** *Пусть* $\{v_n\}$ *— числовая последовательность, заданная рекуррентно для фиксированного действительного* $r \geq 1$ : $v_0 = 0$, $v_0 = 1$, $v_{n+2} = \sqrt{r}v_{n+1} - v_n$. *Тогда* $\rho_r(n) = \sqrt{r}\dfrac{v_n}{v_{n+1}}$.

***Доказательство*** проведем индукцией по $n$. Имеем $\rho_r(0) = \sqrt{r}\dfrac{v_0}{v_1} = 0$. Предположим, что $\rho_r(n) = \sqrt{r}\dfrac{v_n}{v_{n+1}}$. Тогда по формуле (6)

$$\rho_r(n+1) = \frac{r}{r - \sqrt{r}v_n/v_{n+1}} = \frac{\sqrt{r}v_{n+1}}{\sqrt{r}v_{n+1} - v_n} = \frac{\sqrt{r}v_{n+1}}{v_{n+2}},$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 4.** *Пусть* $G_v = B_0 \amalg B_1 \amalg \ldots \amalg B_s$ *— разбиение звездочного графа на ветви,* $|B_i| = n_i$, $i = \overline{1, s}$. *Тогда* $\rho_r(n_1, n_2, \ldots, n_s) = r$, *где* $r = (\operatorname{ind}(G))^2$.

***Доказательство.*** Пусть $B_0 = \{g_0\}$, $B_k = \left\{g_1^k, \ldots, g_{n_k}^k\right\}$, $k = \overline{1, s}$, причем вершины в ветвях $B_k$ занумерованы так, что $M\left(g_1^k\right) = 1$, $g_i^k \in M\left(g_{i+1}^k\right)$, $i = \overline{1, n_k - 1}$, $g_{n_k} \in M(g_0)$. Пусть $y$ — главный собственный вектор графа $G$, $y_i^k = y\left(g_i^k\right)$, $y_0 = y(g_0)$, $k = \overline{1, s}$, $i = \overline{1, n_k}$. Тогда система (7) примет вид

$$\begin{aligned} \lambda y_1^k &= y_2^k, \\ \lambda y_2^k &= y_1^k + y_3^k, \\ \lambda y_3^k &= y_2^k + y_4^k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda y_{n_k}^k &= y_{n_{k-1}}^k + y_0, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\lambda y_0 = y_{n_1}^k + \ldots + y_{n_k}^k, \tag{11}$$

где $r = \operatorname{ind}(G)$.

Из уравнений (10) для произвольной ветви $B_k$ имеем $y_0 = v_{n_k+1} y_1^k$ и $y_{n_k}^k = v_{n_k} y_1^k$, где $\{v_i\}$ — последовательность, заданная рекуррентно: $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, $v_{i+2} = \lambda v_{i+1} - v_i$. Тогда $y_{n_k}^k = \dfrac{v_{n_k}}{v_{n_k+1}} y_0$ для всех $k = \overline{1, s}$. Подставляя эти соотношения в уравнение (11), получаем

$$\lambda y_0 = \sum_{k=1}^{s} \frac{v_{n_k}}{v_{n_k+1}} y_0$$

и, учитывая, что $y_0 \neq 0$ (предложение 4) и $\lambda = \sqrt{r}$, находим

$$\sqrt{r} = \sum_{k=1}^{s} \frac{v_{n_k}}{v_{n_k+1}}.$$

Тогда соглано лемме 3

$$r = \sum_{k=1}^{s} \rho_r(n_k) = \rho_r(n_1, n_2, \ldots, n_s),$$

что и требовалось доказать.

1. *Редчук И. К., Ройтер А. В.* Сингулярные локально-скалярные представления колчанов в гильбертовых пространствах и разделяющие функции // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 6. – С. 796 – 809.
2. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Норма отношения, разделяющие функции и представления маркированных колчанов // Там же. – 2002. – **54**, № 6. – С. 18 – 54.
3. *Власенко М. А., Меллит А. С., Самойленко Ю. С.* Об алгебрах, порожденных линейно связанными образующими с заданным спектром // Функцион. анализ и его прил. – 2005. – **39**, вып. 3. – С. 14 – 27.
4. *Редчук И. К.* Конечномерность и рост алгебр, заданных полилинейно связанными образующими // Там же. – 2005. – **57**, № 10. – С. 1435 – 1440.
5. *Кругляк С. А., Ройтер А. В.* Локально-скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств // Функцион. анализ и его прил. – 2005. – **39**, вып. 2. – С. 13 – 30.
6. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // Там же. – 2002. – **36**, вып. 3. – С. 20 – 35.
7. *Cvetkovic D., Doob M., Sachs H.* Spectra of graphs. – New York: Acad. Press, 1979. – 368 p.
8. *Cvetkovic D., Rowlinson P., Simic S.* Eigenspaces of graphs. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. – 258 p.
9. *Smith J. H.* Some properties of the spectrum of a graph // Proc. 1969 Calgary Conf. Combinatorial Structures and their Appl. – 1970. – P. 403 – 406.
10. *Kac V. G.* Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory, II // J. Algebra. – 1982. – **78**. – P. 141 – 162.

Получено 19.09.2005