УДК 517.51

**Р. А. Ласурия** (Абхаз. ун-т, Сухум)

# $(\varphi,\alpha)$-СИЛЬНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ – ЛАПЛАСА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА СФЕРЕ

We establish upper bounds of approximations by generalized V. Totik strong means applied to deviations of the critical order Cezàro means of Fourier–Laplace series from continuous functions. We represent these estimates in terms of uniform best approximations of continuous functions on the unit sphere.

Встановлено оцінки зверху наближень узагальненими сильними середніми В. Тотика, застосованими до відхилень середніх Чезаро критичного порядку рядів Фур'є – Лапласа від неперервних функцій. Оцінки подано через рівномірні найкращі наближення неперервних функцій на одиничній сфері.

**1.** Пусть $C(S^m)$, $m \geq 3$, — пространство непрерывных на сфере $S^m$ функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_{C(S^m)} = \max_{x\in S^m} |f(x)|,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\lambda)\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int_{S^m} f(y) P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)\, dS^m(y) \tag{1}$$

— ряд Фурье – Лапласа функции $f(x)$, $\lambda = (m-2)/2$,

$$\sigma_n^{(\lambda)}(f;x) = \frac{1}{A_n^{\lambda}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\lambda-1} S_k^{(\lambda)}(f;x) = \frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int_{S^m} f(y) \Phi_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)\, dS^m(y)$$

— средние Чезаро $(C,\lambda)$ ряда (1), где

$$\Phi_n^{(\lambda)}(\cos\gamma) = \frac{1}{A_n^{\lambda}} \sum_{k=0}^{n} (k+\lambda) A_{n-k}^{\lambda} P_k^{(\lambda)}(\cos\gamma),$$

$\cos\gamma = (x,y)$ — скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $x \in S^m$, $y \in S^m$, в $m$-мерном векторном пространстве $\mathbb{R}^m$, а $S_n^{(\lambda)}(f;x)$ — частная сумма ряда (1),

$P_k^{(\lambda)}(t)$ — многочлены Гегенбауэра, которые определяются из разложения

$$(1-2th+h^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(t) h^n.$$

При $\lambda = 1/2$ многочлены $P_n^{(\lambda)}(t)$ являются многочленами Лежандра, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера.

Введем в рассмотрение следующие типы сильных средних ряда Фурье – Лапласа (1):

$$h_{n,r}^{(q),\lambda}(f;x) = \left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \left| \sigma_{k_j}^{(\lambda)}(f;x) - f(x) \right|^q \right\}^{1/q}, \tag{2}$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad n \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq 2n-1,$$

$$H_n^{\varphi,\lambda}(f;x) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \varphi\left( \left| \sigma_k^{(\lambda)}(f;x) - f(x) \right| \right), \tag{3}$$

$$H_n^{\varphi,\lambda}(f;\alpha;x) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\varphi\left(\left|\sigma_k^{(\lambda)}(f;x)-f(x)\right|\right), \tag{4}$$

где $\varphi(u)$ — некоторая неотрицательная на $[0,+\infty)$ функция, $\alpha = (\alpha_k(v))$ — некоторая неотрицательная на множестве $V$ последовательность функций.

Отметим, что обобщенные сильные средние вида (2) в применении к средним Чезаро однократного ряда Фурье ввел В. Тотик [1, 2].

**2.** В настоящей работе устанавливаются равномерные оценки величин (2) – (4) в терминах наилучших приближений функций $f(x) \in C(S^m)$ сферическими гармониками $Y_n(x)$.

При исследовании поведения величин (2) – (4) нам понадобится следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Пусть* $f(x) \in C(S^m)$, $m \ge 3$, $n \in \mathbb{N}$, $n \le k_1 < k_2 < \ldots < k_r \le 2n-1$. *Тогда для любых* $x \in S^m$ *и* $q > 0$

$$\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\sigma_{k_j}^{(\lambda)}(f;x)\right|^q\right\}^{1/q} \le C(q,\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\ln\frac{ne}{r}, \tag{5}$$

*где* $C(q,\lambda)$ *— положительная постоянная, зависящая от указанных в скобках параметров и не зависящая от* $n$, $r$, $f \in C(S^m)$.

***Доказательство.*** Обозначим

$$\varphi_x(\gamma) = \int\limits_{(x,y)=\cos\gamma} f(y)dt(y), \quad dt(y) = dS^{m-1}(y).$$

Тогда

$$\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\sigma_{k_j}^{(\lambda)}(f;x)\right|^q\right\}^{1/q} = \left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}}\int\limits_{S^m} f(y)\Phi_{k_j}^{(\lambda)}(\cos\gamma)dS^m(y)\right|^q\right\}^{1/q} =$$

$$= \left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}}\int_0^{\pi}\left\{\int\limits_{(x,y)=\cos\gamma} f(y)dt(y)\right\}\Phi_{k_j}^{(\lambda)}(\cos\gamma)d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} =$$

$$= \left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}}\int_0^{\pi}\varphi_x(\gamma)\Phi_{k_j}^{(\lambda)}(\cos\gamma)d\gamma\right|^q\right\}^{1/q}. \tag{6}$$

Заметим, что

$$|\varphi_x(\gamma)| \le \int\limits_{(x,y)=\cos\gamma}|f(y)|dt(y) \le \|f\|_{C(S^m)}\int\limits_{(x,y)=\cos\gamma}dt(y) =$$

$$= \left|S^{m-1}\right|\sin^{2\lambda}\gamma\|f\|_{C(S^m)}, \quad 0 \le \gamma \le \pi, \tag{7}$$

где $\left|S^m\right| = \dfrac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}$ — площадь поверхности сферы в пространстве $\mathbb{R}^m$ с центром в начале координат и радиусом 1.

В силу неравенства для средних [3, с. 41] можно считать $q \ge 2$. Применяя неравенство Минковского [3, с. 46], из (6) находим

$$\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\sigma_{k_j}^{(\lambda)}(f;x)\right|^q\right\}^{1/q} \le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int_0^{\pi/2(k_j+1)}\varphi_x(\gamma)\Phi_{k_j}^{(\lambda)}(\cos\gamma)d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+ C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{\pi/2(k_j+1)}^{\pi-\pi/2(k_j+1)} \varphi_x(\gamma)\Phi_{k_j}^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+ C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{\pi-\pi/2(k_j+1)}^{\pi} \varphi_x(\gamma)\Phi_{k_j}^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} =$$

$$= I_{n,1}(f;x) + I_{n,2}(f;x) + I_{n,3}(f;x). \tag{8}$$

Используя неравенство [4, с. 134]

$$\left|\Phi_{k_j}^{(\lambda)}(\cos\gamma)\right| \le Ck_j^{2\lambda+1}, \quad 0 \le \gamma \le \pi, \tag{9}$$

и соотношение (7), получаем

$$I_{n,1}(f;x) \le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(\int\limits_{0}^{\pi/2(k_j+1)} |\varphi_x(\gamma)|k_j^{2\lambda+1}d\gamma\right)^q\right\}^{1/q} \le$$

$$\le C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(k_j^{2\lambda+1}\int\limits_{0}^{\pi/2(k_j+1)} \sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma\right)^q\right\}^{1/q} \le$$

$$\le C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(k_j^{2\lambda+1}\int\limits_{0}^{\pi/2(k_j+1)} \gamma^{2\lambda}\,d\gamma\right)^q\right\}^{1/q} \le$$

$$\le C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}. \tag{10}$$

Аналогично

$$I_{n,3}(f;x) \le C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(k_j^{2\lambda+1}\int\limits_{\pi-\pi/2(k_j+1)}^{\pi} \sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma\right)^q\right\}^{1/q} =$$

$$= C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(k_j^{2\lambda+1}\int\limits_{0}^{\pi/2(k_j+1)} \sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma\right)^q\right\}^{1/q} \le$$

$$\le C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(k_j^{2\lambda+1}\int\limits_{0}^{\pi/2(k_j+1)} \gamma^{2\lambda}\,d\gamma\right)^q\right\}^{1/q} \le C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}. \tag{11}$$

Известно [4, с. 133] представление ядра $\Phi_k^{(\lambda)}(\cos\gamma)$, которое мы используем при $\left|\frac{\pi}{2}-\gamma\right| < \frac{k}{k+1}\frac{\pi}{2}$:

$$\Phi_k^{(\lambda)}(\cos\gamma) = \frac{\lambda}{4^\lambda}\frac{\sin[(k+(3\lambda+1)/2)\gamma-\lambda\pi]}{(\sin\gamma)^\lambda(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}} +$$

$$+ \frac{1}{k+1}\frac{\eta_k(\gamma)}{(\sin\gamma)^{\lambda+1}(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}} = \Phi_{k,1}^{(\lambda)}(\cos\gamma) + \Phi_{k,2}^{(\lambda)}(\cos\gamma), \tag{12}$$

где $\eta_k(\gamma)$ — величина, равномерно ограниченная по $k$ и $\gamma$.

Применяя неравенство Минковского, с учетом (12) находим

$$I_{n,2}(f;x) \le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{\pi/2(k_j+1)}^{\pi-\pi/2(k_j+1)}\varphi_x(\gamma)\Phi_{k_j,1}^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+ C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{\pi/2(k_j+1)}^{\pi-\pi/2(k_j+1)}\varphi_x(\gamma)\Phi_{k_j,2}^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} = I_{n,2}^{(1)}(f;x) + I_{n,2}^{(2)}(f;x). \tag{13}$$

В свою очередь,

$$I_{n,2}^{(1)}(f;x) \le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{\pi/2(k_j+1)}^{\pi-\pi/2(k_j+1)}\varphi_x(\gamma)\frac{\sin k_j\gamma\cos\left(\dfrac{3\lambda+1}{2}\gamma-\lambda\pi\right)}{(\sin\gamma)^\lambda\left(\sin\dfrac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+1}}d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+ C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{\pi/2(k_j+1)}^{\pi-\pi/2(k_j+1)}\varphi_x(\gamma)\frac{\cos k_j\gamma\sin\left(\dfrac{3\lambda+1}{2}\gamma-\lambda\pi\right)}{(\sin\gamma)^\lambda\left(\sin\dfrac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+1}}d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} =$$

$$= i_{n,1}(f;x) + i_{n,2}(f;x). \tag{14}$$

Разобьем интеграл, содержащийся в выражении $i_{n,1}(f;x)$, и применим неравенство Минковского:

$$i_{n,1}(f;x) \le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{1/2n}^{\pi-1/2n}\varphi_x(\gamma)\frac{\sin k_j\gamma\cos\left(\dfrac{3\lambda+1}{2}\gamma-\lambda\pi\right)}{(\sin\gamma)^\lambda\left(\sin\dfrac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+1}}d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+ C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{1/2n}^{\pi/2(k_j+1)}\varphi_x(\gamma)\frac{\sin k_j\gamma\cos\left(\dfrac{3\lambda+1}{2}\gamma-\lambda\pi\right)}{(\sin\gamma)^\lambda\left(\sin\dfrac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+1}}d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+ C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{\pi-\pi/2(k_j+1)}^{\pi-1/2n}\varphi_x(\gamma)\frac{\sin k_j\gamma\cos\left(\dfrac{3\lambda+1}{2}\gamma-\lambda\pi\right)}{(\sin\gamma)^\lambda\left(\sin\dfrac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+1}}d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} =$$

$$= d_{n,1}(f;x) + d_{n,2}(f;x) + d_{n,3}(f;x). \tag{15}$$

Учитывая, что $n \ge r$, имеем

$$d_{n,1}(f;x) \le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{1/2n}^{1/2r}\varphi_x(\gamma)\frac{\sin k_j\gamma\cos\left(\dfrac{3\lambda+1}{2}\gamma-\lambda\pi\right)}{(\sin\gamma)^\lambda\left(\sin\dfrac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+1}}d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+\ C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{1/2r}^{\pi-1/2n}\varphi_x(\gamma)\frac{\sin k_j\gamma\cos\left(\frac{3\lambda+1}{2}\gamma-\lambda\pi\right)}{(\sin\gamma)^{\lambda}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+1}}d\gamma\right|^{q}\right\}^{1/q} =$$

$$= d_{n,1}^{(1)}(f;x)+d_{n,1}^{(2)}(f;x). \tag{16}$$

В свою очередь, с учетом (7)

$$d_{n,1}^{(1)}(f;x) \le C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(\int\limits_{1/2n}^{1/2r}\frac{\sin^{2\lambda}\gamma}{\gamma^{2\lambda+1}}d\gamma\right)^{q}\right\}^{1/q} \le$$

$$\le C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(\int\limits_{1/2n}^{1/2r}\frac{d\gamma}{\gamma}\right)^{q}\right\}^{1/q} \le C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\ln\frac{ne}{r}. \tag{17}$$

Оценим величину $d_{n,1}^{(2)}(f;x)$. С этой целью положим

$$g_x(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_x(\gamma)\cos\left(\frac{3\lambda+1}{2}\gamma-\lambda\pi\right)}{(\sin\gamma)^{\lambda}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+1}}, & \dfrac{1}{2r}\le\gamma\le\pi-\dfrac{1}{2n}; \\ 0, & \gamma\in\left[-\pi,\dfrac{1}{2r}\right)\cup\left(\pi-\dfrac{1}{2n},\pi\right], \end{cases}$$

$$g_x(\gamma+2\pi) = g_x(\gamma).$$

Пусть, далее, $b_k(g)$ — синус-коэффициент Фурье функции $g_x(\gamma)$. Тогда, применяя теорему Хаусдорфа – Юнга [5, с. 153], получаем

$$d_{n,1}^{(2)}(f;x) \le C(\lambda)r^{-1/q}\left\{\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}g_x(\gamma)\sin k_j\gamma\,d\gamma\right|^{q}\right\}^{1/q} =$$

$$= C(\lambda)r^{-1/q}\left\{\sum_{j=1}^{r}\left|b_{k_j}(g)\right|^{q}\right\}^{1/q} \le C(\lambda)r^{-1/q}\left\{\int\limits_{1/2r}^{\pi-1/2n}\left|\frac{\varphi_x(\gamma)}{\gamma^{\lambda+1}(\sin\gamma)^{\lambda}}\right|^{p}d\gamma\right\}^{1/p} \le$$

$$\le C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}r^{-1/q}\left\{\int\limits_{1/2r}^{\pi-1/2n}\gamma^{-p}\,d\gamma\right\}^{1/p} \le C(q,\lambda)\|f\|_{C(S^m)}. \tag{18}$$

Учитывая (16) – (18), находим

$$d_{n,1}(f;x) \le C(q,\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\ln\frac{ne}{r}. \tag{19}$$

Оценим слагаемое $d_{n,2}(f;x)$:

$$d_{n,2}(f;x) \le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(\int\limits_{1/2n}^{\pi/2(k_j+1)}\frac{|\varphi_x(\gamma)|}{(\sin\gamma)^{\lambda}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+1}}d\gamma\right)^{q}\right\}^{1/q} \le$$

$$\le C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(\int\limits_{1/2n}^{\pi/2(k_j+1)}\frac{\sin^{2\lambda}\gamma}{(\sin\gamma)^{\lambda}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+1}}d\gamma\right)^{q}\right\}^{1/q} \le C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}. \tag{20}$$

Аналогично

$$d_{n,3}(f;x) \le C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(\int\limits_{\pi-\pi/2(k_j+1)}^{\pi-1/2n}\frac{(\sin\gamma)^{\lambda}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+1}}d\gamma\right)^{q}\right\}^{1/q} \le$$

$$\le C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(\int\limits_{\pi-\pi/2(k_j+1)}^{\pi-1/2n}\sin^{\lambda}\gamma\,d\gamma\right)^{q}\right\}^{1/q} =$$

$$= C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(\int\limits_{1/2n}^{\pi/2(k_j+1)}\sin^{\lambda}\gamma\,d\gamma\right)^{q}\right\}^{1/q} \le C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}. \tag{21}$$

Объединяя соотношения (19) – (21) и (15), получаем

$$i_{n,1}(f;x) \le C(q,\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\ln\frac{ne}{r}. \tag{22}$$

Аналогично оценивается величина $i_{n,2}(f;x)$ в (14):

$$i_{n,2}(f;x) \le C(q,\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\ln\frac{ne}{r}. \tag{23}$$

Таким образом, с учетом (22) и (23) из (14) выводим

$$I_{n,2}^{(1)}(f;x) \le C(q,\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\ln\frac{ne}{r}. \tag{24}$$

Перейдем к оценке слагаемого $I_{n,2}^{(2)}(f;x)$ в соотношении (13). Принимая во внимание определение величины $\Phi_{k,2}^{(\lambda)}(\cos\gamma)$ и (7), имеем

$$I_{n,2}^{(2)}(f;x) \le C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{1}{k_j+1}\int\limits_{\pi/2(k_j+1)}^{\pi-\pi/2(k_j+1)}\frac{(\sin\gamma)^{\lambda-1}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+1}}d\gamma\right)^{q}\right\}^{1/q} \le$$

$$\le C(\lambda)\|f\|_{C(S^m)}. \tag{25}$$

Вследствие (24) и (25) из (13) получаем

$$I_{n,2}(f;x) \le C(q,\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\ln\frac{ne}{r}. \tag{26}$$

Наконец, сопоставляя (26), (11), (10) и (8), находим

$$\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\sigma_{k_j}^{(\lambda)}(f;x)\right|^{q}\right\}^{1/q} \le C(q,\lambda)\|f\|_{C(S^m)}\ln\frac{ne}{r}.$$

Лемма 1 доказана.

На основании леммы 1 нетрудно установить справедливость следующего утверждения.

**Лемма 2.** *Пусть* $f(x)\in C(S^m)$, $m\ge 3$, $n\in\mathbb{N}$, $n\le k_1<k_2<\ldots<k_r\le 2n-1$. *Тогда для любых* $x\in S^m$ *и* $q>0$

$$h_{n,r}^{(q),\lambda}(f;x) \le C(q,\lambda) E_n(f)_{C(S^m)} \ln\frac{ne}{r}, \tag{27}$$

*где*

$$E_n(f)_{C(S^m)} = \inf_{Y_n} \| f - Y_n \|_{C(S^m)}$$

*— величина наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ сферическими гармониками степени $n$.*

***Доказательство.*** Пусть $Y_n^*(x)$ — сферическая гармоника наилучшего приближения функции $f(x) \in C(S^m)$. Учитывая, что

$$\sigma_k^{(\lambda)}(Y_n^*;x) = Y_n^*(x) \quad \forall\, k \ge n,$$

получаем

$$\left|\sigma_{k_j}^{(\lambda)}(f;x) - f(x)\right| \le \left|\sigma_{k_j}^{(\lambda)}(f - Y_n^*;x)\right| + E_n(f)_{C(S^m)}.$$

Тогда на основании неравенства (5) леммы 1 и неравенства

$$|a+b|^q \le 2^q\left(|a|^q + |b|^q\right)$$

находим требуемое:

$$h_{n,r}^{(q),\lambda}(f;x) \le$$

$$\le 2\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\sigma_{k_j}^{(\lambda)}(f - Y_n^*;x)\right|^q\right\}^{1/q} + 2E_n(f)_{C(S^m)} \le$$

$$\le C(q,\lambda)\left(\left\|f - Y_n^*\right\|_{C(S^m)} \ln\frac{ne}{r} + E_n(f)_{C(S^m)}\right) = C(q,\lambda) E_n(f)_{C(S^m)} \ln\frac{ne}{r}.$$

Лемма 2 доказана.

Полагая в условиях леммы 2 $r = 1$, $k_1 = n$, $q = 1$, получаем следующее утверждение.

**Следствие 1.** *Пусть $f(x) \in C(S^m)$, $m \ge 3$. Тогда для любого $x \in S^m$*

$$\left|\sigma_n^{(\lambda)}(f;x) - f(x)\right| \le C \ln n\, E_n(f)_{C(S^m)}, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Это следствие фактически известно, так как константы Лебега для средних Чезаро критического порядка ряда Фурье – Лапласа имеют логарифмический порядок роста (см. [6, с. 21]).

Полагая в условиях леммы 2 $r = n$, $k_1 = n$, $k_n = 2n - 1$, получаем следующее утверждение.

**Следствие 2.** *Пусть $f(x) \in C(S^m)$, $m \ge 3$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любых $x \in S^m$ и $q > 0$*

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\sigma_k^{(\lambda)}(f;x) - f(x)\right|^q\right\}^{1/q} \le C(q,\lambda) E_n(f)_{C(S^m)}.$$

Утверждение, подобное следствию 2, для обычных средних Валле Пуссена в случае $m = 3$ известно [6, с. 288].

**3.** Следуя работе [7], обозначим через $\Phi$ множество непрерывных неубывающих на $[0, +\infty)$ функций $\varphi(\cdot)$ таких, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$ $\forall u > 0$

$$\varphi(u) \le e^{Bu} \quad \forall u \in [0, +\infty),$$

$$\varphi(2u) \le A\varphi(u) \quad \forall u \in [0,1],$$

где $A$ и $B$ — некоторые положительные постоянные, причем $A$ может зависеть от функции $\varphi(\cdot)$.

Представителями множества $\Phi$ являются, к примеру, функции $\varphi(u) = u^q$, $q > 0$, $\varphi(u) = e^u - 1$ и другие. В работе [7] показано, что если $\varphi(\cdot) \in \Phi$, то

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi(u\sigma)e^{-\sigma/B} \le C\varphi(u) \quad \forall u \in \left(0, \frac{1}{2AB}\right). \tag{28}$$

Основываясь на лемме 2 и придерживаясь схемы рассуждений работы [7], установим справедливость следующего утверждения.

**Теорема 1.** *Пусть* $f(x) \in C(S^m)$, $m \ge 3$, $\varphi(\cdot) \in \Phi$. *Тогда для любого* $x \in S^m$

$$H_n^{\varphi,\lambda}(f;x) \le C(\lambda)\varphi\left(E_n(f)_{C(S^m)}\right), \tag{29}$$

*где* $C(\lambda)$ *— положительная постоянная, не зависящая от* $n$ *и* $f \in C(S^m)$.

***Доказательство.*** Пусть $E_n(f)_{C(S^m)} = 0$, $\rho_k^{(\lambda)}(f;x) = \sigma_k^{(\lambda)}(f;x) - f(x)$. В этом случае $f(x) \equiv Y_n(x)$ и $\sigma_k^{(\lambda)}(Y_n;x) = Y_n(x)$ $\forall k \ge n$, т. е.

$$\rho_k^{(\lambda)}(f;x) = 0 \quad \forall k \ge n.$$

Отсюда на основании свойства функции $\varphi(\cdot)$ вытекает неравенство (29).

Пусть теперь $E_n(f)_{C(S^m)} > 0$. При каждых фиксированных $n \in \mathbb{N}$ и $x \in S^m$ обозначим

$$P_{n,\sigma}(x) = \left\{k \in [n, 2n-1]\colon (\sigma-1)E_n(f)_{C(S^m)} \le \left|\rho_k^{(\lambda)}(f;x)\right| \le \sigma E_n(f)_{C(S^m)}\right\}, \quad \sigma \in \mathbb{N},$$

$\mu_{n,\sigma}(x)$ — количество всех элементов множества $P_{n,\sigma}(x)$. Поскольку $\varphi(\cdot)$ не убывает, то

$$H_n^{\varphi,\lambda}(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{k\in P_{n,\sigma}(x)} \varphi\left(\left|\rho_k^{(\lambda)}(f;x)\right|\right) \le \frac{1}{n}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{k\in P_{n,\sigma}(x)} \varphi\left(\sigma E_n(f)_{C(S^m)}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi\left(\sigma E_n(f)_{C(S^m)}\right)\mu_{n,\sigma}(x), \tag{30}$$

причем, если при некотором $\sigma$ $P_{n,\sigma}(x) = \{\varnothing\}$, полагаем

$$\sum_{P_{n,\sigma}(x)} = 0.$$

Пусть $\mu_{n,\sigma}(x) \ge 1$ и $k_j$ — все элементы множества $P_{n,\sigma}(x)$. Оценим величину $\mu_{n,\sigma}(x)$. Полагая в неравенстве (27) $r = \mu_{n,\sigma}(x)$, $q = 1$, находим

$$(\sigma-1)E_n(f)_{C(S^m)} \le \frac{1}{\mu_{n,\sigma}(x)}\sum_{k\in P_{n,\sigma}(x)} \left|\rho_k^{(\lambda)}(f;x)\right| \le C(\lambda)E_n(f)_{C(S^m)} \ln\frac{ne}{\mu_{n,\sigma}(x)}.$$

Отсюда

$$\mu_{n,\sigma}(x) \le ne^{-\sigma/C(\lambda)}\left(e^{1/C(\lambda)} + 1\right) = C_1(\lambda)ne^{-\sigma/C(\lambda)}. \tag{31}$$

В силу неравенства (28), предположения $B = C(\lambda)$ и неравенства (31) из (30) получаем

$$H_n^{\varphi,\lambda}(f;x) \le C_1(\lambda)\sum_{\sigma=1}^{\infty}\varphi\left(\sigma E_n(f)_{C(S^m)}\right)e^{-\sigma/C(\lambda)} \le$$

$$\le C_2(\lambda)\varphi\left(E_n(f)_{C(S^m)}\right) \qquad \forall u \in \left(0, \frac{1}{2AB}\right) \tag{32}$$

при условии, что

$$E_n(f)_{C(S^m)} \le \frac{1}{2AB}. \tag{33}$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f)_{C(S^m)} = 0,$$

то существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n > n_0$ условие (33) выполняется, а вместе с ним и неравенство (32).

Если же $n \le n_0$, то оценку (32) можно получить за счет соответствующего выбора в ней постоянной.

Теорема 1 доказана.

Относительно величины $H_n^{\varphi,\lambda}(f;\alpha;x)$, определяемой равенством (4), справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть $f(x) \in C(S^m)$, $m \ge 3$, $\varphi(\cdot) \in \Phi$ и последовательность $\alpha = (\alpha_k(\upsilon) \ge 0)$ не возрастает относительно $k \in \mathbb{N}$ при каждом фиксированном $\upsilon \in V$. Тогда для любого $x \in S^m$*

$$H_n^{\varphi,\lambda}(f;\alpha;x) \le C(\lambda)\left\{n\alpha_n(\upsilon)\varphi\left(E_n(f)_{C(S^m)}\right) + \sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(\upsilon)\varphi\left(E_k(f)_{C(S^m)}\right)\right\}, \tag{34}$$

*где $C(\lambda)$ — положительная постоянная, не зависящая от $n \in \mathbb{N}$, $f \in C(S^m)$ и $\alpha = (\alpha_k(\upsilon))$.*

***Доказательство.*** Представим величину $H_n^{\varphi,\lambda}(f;\alpha;x)$ в виде

$$H_n^{\varphi,\lambda}(f;\alpha;x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=2^\nu n}^{2^{\nu+1}n-1}\alpha_k(\upsilon)\,\varphi\left(\left|\rho_k^{(\lambda)}(f;x)\right|\right).$$

Поскольку $\alpha = (\alpha_k(\upsilon))$ не возрастает, используя оценку (29), находим

$$H_n^{\varphi,\lambda}(f;\alpha;x) \le \sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{2^\nu n}(\upsilon)\sum_{k=2^\nu n}^{2^{\nu+1}n-1}\varphi\left(\left|\rho_k^{(\lambda)}(f;x)\right|\right) \le$$

$$\le C(\lambda)\left\{n\alpha_n(\upsilon)\varphi\left(E_n(f)_{C(S^m)}\right) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_{2^\nu n}(\upsilon)2^{\nu-1}n\varphi\left(E_{2^\nu n}(f)_{C(S^m)}\right)\right\} \le$$

$$\le C(\lambda)\left\{n\alpha_n(\upsilon)\varphi\left(E_n(f)_{C(S^m)}\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=2^{\nu-1}n}^{2^\nu n-1}\alpha_k(\upsilon)\varphi\left(E_k(f)_{C(S^m)}\right)\right\} =$$

$$= C(\lambda)\left\{n\alpha_n(\upsilon)\varphi\left(E_n(f)_{C(S^m)}\right) + \sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(\upsilon)\varphi\left(E_k(f)_{C(S^m)}\right)\right\},$$

что и завершает доказательство теоремы 2.

Полагая $n = 1$ в (34), получаем

$$H_1^{\varphi,\lambda}(f;\alpha;x) \le C(\lambda)\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\upsilon)\varphi\Big(E_k(f)_{C(S^m)}\Big)\right\}. \tag{35}$$

В качестве последовательностей $\alpha = (\alpha_k(\upsilon))$, порождающих методы суммирования рядов, можно рассматривать бесконечные прямоугольные матрицы $\alpha = \left(\alpha_k^{(n)}\right)$, $k, n \in \mathbb{N}$, неотрицательных чисел, лишь только бы при любом фиксированном $n$ числа $\alpha_k^{(n)}$ не возрастали по $k$. Тогда в условиях теоремы 2 неравенство (35) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(n)}\varphi\left(\left|\rho_k^{(\lambda)}(f;x)\right|\right) \le C(\lambda)\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(n)}\varphi\Big(E_k(f)_{C(S^m)}\Big)\right\}. \tag{36}$$

Полагая, в частности,

$$\alpha_k^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & 1 \le k \le n; \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

в силу (36) имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\left|\rho_k^{(\lambda)}(f;x)\right|\right) \le C(\lambda)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\Big(E_k(f)_{C(S^m)}\Big).$$

В случае $\varphi(u) = u^q$, $q > 0$, аналогичные вопросы рассматривались в работе [8], а также в [9], в которой получены оценки степенных сильных средних сумм $\sigma_k^{(\lambda)}(f;x)$ в терминах модуля непрерывности функции $f(x)$.


1. *Totik V.* On the strong approximation by the $(C, \alpha)$-means of Fourier series. I // Anal. math. – 1980. – **6**, № 1. – P. 57 – 85.
2. *Totik V.* On the strong approximation by the $(C, \alpha)$-means of Fourier series. II // Ibid. – № 2. – P. 165 – 184.
3. *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
4. *Kogbetliantz E.* Recherches sur la summabilitie des series ultraspheriques par la methode des moyennes arithmetiques // J. math. pures et appl. – 1924. – **9**, № 3. – P. 107 – 187.
5. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 538 с.
6. *Топурия С. Б.* Ряды Фурье – Лапласа на сфере. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1987. – 356 с.
7. *Totik V.* On the strong approximation of Fourier series // Acta math. Acad. sci. hung. – 1980. – **35**. – P. 157 – 172.
8. *Хочолава В. В.* Некоторые вопросы сильной суммируемости рядов Фурье – Лапласа // Тр. Груз. политехн. ин-та. – 1981. – № 5. – С. 29 – 34.
9. *Dai Feng, Wang Kunyang.* On approximation of functions on sphere // Approxim. Theory and Appl. – 1999. – **15**, № 4. – P. 50 – 59.


Получено 06.02.2001