УДК 517.5

В. Н. Коновалов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ СОБОЛЕВА ИХ СЕЧЕНИЯМИ КОНЕЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

For Sobolev classes of periodic functions of one variable with restrictions on higher derivatives in L_2, we determine exact orders of relative widths, which characterize the best approximation of a fixed set by its sections of a given dimensionality, in the spaces L_q.

Для класів Соболева періодичних функцій однієї змінної з обмеженнями в L_2 на старші похідні вказуються точні порядки у просторах L_q відносних поперечників, які характеризують найкраще наближення фіксованої множини його перерізами заданої розмірності.

1. Введение. Одной из центральных задач в теории аппроксимации является задача об оценке поперечников функциональных классов или множеств. Возможности наилучшего приближения, восстановления или кодирования описывают поперечники по Александрову, по Бернштейну, по Гельфанду, по Колмогорову, абсолютные, линейные, тригонометрические, проекционные, энтропийные и другие. Наиболее тесно связанным с основным направлением классической теории приближений является поперечник по Колмогорову, введенный в 1936 г. [1]. Различные аспекты проблематики поперечников отражены в монографиях [2 – 5] и обзоре [6].

В данной статье исследуется поведение относительных поперечников колмогоровского типа, характеризующих наилучшее приближение классов функций их конечномерными сечениями. Приведем необходимые определения.

Пусть X — вещественное линейное пространство векторов x с нормой $\|x\|_X$, а W и V — фиксированные непустые подмножества из X. Пусть L^n — произвольное подпространство из X размерности $\dim L^n \le n$, $n \in \mathbb{N}_0$, и $M^n(x_0, L^n) := x_0 + L^n$ — сдвиг L^n на произвольный вектор $x_0 \in X$. Обозначим через $\mathcal{M}^n := \mathcal{M}^n(V)$ множество всех линейных многообразий $\mathcal{M}^n := M^n(x_0, L^n)$ таких, что $M^n \cap V \ne \varnothing$. Величина

$$d_n(W, V)_X := \inf_{M^n \in \mathcal{M}^n} \sup_{x \in W} \inf_{y \in M^n \cap V} \|x - y\|_X$$

называется относительным n-поперечником W с ограничением V в X. Понятие относительного поперечника было введено в [7]. Очевидно, что для $V = X$ относительный n-поперечник $d_n(W, V)_X$ совпадает с n-поперечником по Колмогорову

$$d_n(W)_X := \inf_{M^n \in \mathcal{M}^n} \sup_{x \in W} \inf_{y \in M^n} \|x - y\|_X,$$

введенным в [1]. Также ясно, что $d_n(W, V)_X \ge d_n(W)_X$ для любого $V \subseteq X$. Если множества W и V являются центрально-симметричными, то в определениях соответствующих поперечников можно ограничиться случаем $M^n = L^n$.

При $r \in \mathbb{N}$ и $1 \le p \le \infty$ через W_p^r будем обозначать классы 2π-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, имеющих $(r-1)$-ю абсолютно непрерывную производную $x^{(r-1)}$ на отрезке $[0, 2\pi]$ и таких, что $\|x^{(r)}\|_p \le 1$. Здесь и далее через $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L_p}$ обозначается норма в пространстве $L_p := L_p([0, 2\pi])$. Через $M W_p^r$ будем обозначать класс функций x таких, что $\|x^{(r)}\|_p \le M$, полагая $M W_p^r = W_p^r$ при $M = 1$.

А. Н. Колмогоров [1] установил, что $d_{2n-1}(W_2^r)_2 = d_{2n}(W_2^r)_2 = n^{-r}$. Точный порядок $d_n(W_\infty^r)_\infty \asymp n^{-r}$ поперечников по Колмогорову был установлен С. Б. Стечкиным [8]. Здесь и далее обозначение $a_n \asymp b_n$ для последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ положительных чисел означает существование постоянных $0 < c_1 \leq c_2$ таких, что $c_1 a_n \leq b_n \leq c_2 a_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. В. М. Тихомировым [9, 10] были найдены точные значения поперечников $d_{2n-1}(W_\infty^r)_\infty = d_{2n}(W_\infty^r)_\infty = \mathcal{K}_r n^{-r}$, где $\mathcal{K}_r$ — известные константы Фавара. Поведение относительных поперечников $d_n(W_\infty^r, W_\infty^r)_\infty$ при $r \geq 3$ оказалось иным. В [7] доказано, что $d_n(W_\infty^r, W_\infty^r)_\infty \asymp n^{-2}$, если $r \geq 3$.

Указанное различие в поведении колмогоровских и относительных поперечников вызвало определенный интерес к задаче о поведении поперечников $d_n(W_p^r, MW_p^r)_q$, где параметр M может принимать различные значения. В. М. Тихомиров [11] дал другое, более простое и изящное, доказательство соотношения $d_n(W_\infty^r, W_\infty^r)_\infty \asymp n^{-2}$. При этом рассматривались классы W_∞^r и для нецелых $r \geq 3$. В. Ф. Бабенко [12] доказал, что и в метрике L_1 при $r \geq 3$ имеют место соотношения $d_n(W_1^r, W_1^r)_1 \asymp n^{-2}$. Отметим, для сравнения, что $d_{2n-1}(W_1^r)_1 = d_{2n}(W_1^r)_1 = \mathcal{K}_r n^{-r}$. В [13] В. Ф. Бабенко найдены точные порядковые равенства в метрике L_1 для относительных поперечников классов $W_1^{\bar{r}}$ периодических функций многих переменных, имеющих смешанную производную $\|x^{(\bar{r})}\|_1 \leq 1$ целого порядка. Он также установил в [14, 15] асимптотическое поведение поперечников $d_n(W_1^r, (1+\varepsilon_n)W_1^r)_1$ и $d_n(W_\infty^r, (1+\varepsilon_n)W_\infty^r)_\infty$ при $r \geq 3$ для заданной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел. Из этих результатов, в частности, следует, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ при $r \geq 3$ имеют место порядковые равенства $d_n(W_1^r, (1+\varepsilon)W_1^r)_1 \asymp d_n(W_\infty^r, (1+\varepsilon)W_\infty^r)_\infty \asymp n^{-r}$. Этим была доказана соответствующая гипотеза С. Б. Стечкина. Задача о минимальной величине M, гарантирующей равенства $d_n(W_p^r, MW_p^r)_q = d_n(W_p^r)_q$, исследовалась В. Ф. Бабенко [12] при $r = 1, 2$ и $p = q = 1$, Ю. Н. Субботиным [16] при $r = 1, 2$ и $p = q = \infty$, Ю. Н. Субботиным и С. А. Теляковским [17, 18] при всех $r \in \mathbb{N}$ для $p = q = \infty$, $p = q = 1$ и $p = q = 2$. В [18] установлено, что при всех $r, n \in \mathbb{N}$ для $M = 1 - n^{-r}$ выполняются равенства $d_{2n-1}(W_2^r, M\,W_2^r)_2 = d_{2n-1}(W_2^r)_2 = d_{2n}(W_2^r, M\,W_2^r)_2 = d_{2n}(W_2^r)_2$. Обзор результатов по аппроксимации функциональных классов при наличии ограничений имеется в работе Л. Э. Азара [19].

В данной статье исследуется вопрос о точных порядках убывания относительных поперечников $d_n(W_2^r, W_2^r)_q$ при $1 \leq q \leq \infty$.

2. Основные и вспомогательные результаты.

Теорема 1. *Если* $r \in \mathbb{N}$ *и* $1 \leq q \leq \infty$, *то*

$$d_n(W_2^r, W_2^r)_q \asymp n^{-\min\{r-1/2+1/q,\, r\}}, \quad n \geq 1. \tag{1}$$

***Замечание* 1.** Известно (см., например, [6, с. 211]), что $d_n(W_2^r)_q \asymp n^{-r}$ при $1 \leq q \leq \infty$, т. е. для $2 < q \leq \infty$ порядки относительных и колмогоровских поперечников существенно различны.

Приведем известное соотношение двойственности (см., например, [2, с. 28]). Здесь и далее через

$$E(W, M)_X := \sup_{x \in W} \inf_{y \in M} \|x - y\|_X$$

обозначается величина наилучшего приближения множества W множеством $M \subset X$.

Лемма A. *Пусть X — вещественное линейное нормированное пространство, X^* — пространство, сопряженное с X, а Y — выпуклое множество в X. Тогда для любого $x \in X$ выполняется равенство*

$$E(x, Y)_X := \sup_{x^* \in X^*,\ \|x^*\|_{X^*} \le 1} \left(\left\langle x^*, x \right\rangle - \sup_{y \in Y} \left\langle x^*, y \right\rangle \right),$$

где $\left\langle x^*, z \right\rangle$ — значение функционала x^* на $z \in X$.

Также потребуется следующее утверждение (см. [3, с. 242], лемма 1), являющееся следствием теоремы Р. С. Исмагилова [20] о колмогоровских поперечниках кривых в пространстве L_2. Кривой, порождаемой сдвигами 2π-периодической функции y, будем называть множество

$$K(y) := \{ y_\alpha | y_\alpha(\cdot) := y(\cdot + \alpha),\ \alpha \in [0, 2\pi] \}.$$

Лемма B. *Пусть y — функция из L_2, имеющая разложение*

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(y) \cos kt + b_k(y) \sin kt)$$

в ряд Фурье, а $c_{k_1}(y) \ge c_{k_2}(y) \ge \ldots$ — невозрастающая перестановка чисел $c_k(y) := \left(a_k^2(y) + b_k^2(y)\right)^{1/2}$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $K(y)$ — кривая в пространстве L_2, порождаемая сдвигами функции y. Тогда

$$d_{2n}(K(y))_2 \ge \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} c_{k_m}^2(y) \right)^{1/2}.$$

Для любых двух функций $x, y \in L_1$ через

$$(x * y)(t) := \int_0^{2\pi} x(t - \tau) y(\tau) d\tau$$

будем обозначать их свертку. Нам потребуется предварительно доказать следующее утверждение о связи между относительными и колмогоровскими поперечниками кривых, порождаемых сдвигами сверток с ядрами Бернулли

$$\beta_s(t) := \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \cos(t - s\pi/2), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1. *Пусть $r, n \in \mathbb{N}$, $1 \le q \le \infty$, $1/q + 1/q' = 1$ и y — функция из $L_{q'}$ такая, что $\|y\|_{q'} \ne 0$. Тогда*

$$d_n\left(K(\beta_{2r} * y), W_2^r\right)_q \ge$$

$$\ge \|\beta_r * y\|_2 \|y\|_{q'}^{-1} \left(\|\beta_r * y\|_2 - \left(\|\beta_r * y\|_2^2 - (d_n(K(\beta_r * y))_2)^2 \right)^{1/2} \right).$$

3. Доказательство леммы 1. Зафиксировав произвольную функцию $y \in L_{q'}$ такую, что $\|y\|_{q'} \ne 0$, полагаем

$$x_\alpha(t) := \|\beta_r * y\|_2^{-1}(\beta_{2r} * y)(t+\alpha), \quad \alpha \in [0, 2\pi]. \tag{2}$$

Поскольку $x_\alpha^{(r)}(t) := \|\beta_r * y\|_2^{-1}(\beta_r * y)(t+\alpha)$, то, очевидно, что $x_\alpha \in W_2^r$ при любом α.

Зафиксируем произвольное подпространство $L^n \subset L_q$ размерности $\le n$ такое, что $L^n \cap W_2^r \ne \varnothing$. При каждом α полагаем

$$z_\alpha(t) := (-1)^r \|y\|_{q'}^{-1} y(t+\alpha). \tag{3}$$

Очевидно, что $\|z_\alpha\|_{q'} = 1$. Тогда из леммы A при $X = L_q$ для каждого α следует неравенство

$$E\left(x_\alpha, L^n \cap W_2^r\right)_q \ge \int_0^{2\pi} x_\alpha(t) z_\alpha(t)\,dt - \sup_{u \in L^n \cap W_2^r} \int_0^{2\pi} u(t) z_\alpha(t)\,dt. \tag{4}$$

Учитывая определения функций x_α и z_α и производя несложные преобразования, получаем

$$\int_0^{2\pi} x_\alpha(t) z_\alpha(t)\,dt = \|y\|_{q'}^{-1} \|\beta_r * y\|_2^{-1} \int_0^{2\pi} (\beta_{2r} * y)^{(r)}(\tau)(\beta_r * y)(\tau)\,d\tau =$$

$$= \|y\|_{q'}^{-1} \|\beta_r * y\|_2,$$

$$\int_0^{2\pi} u(t) z_\alpha(t)\,dt = \|y\|_{q'}^{-1} \int_0^{2\pi} u^{(r)}(\tau)(\beta_r * y)(\tau+\alpha)\,d\tau.$$

Но тогда, полагая

$$(\beta_r * y)_\alpha(\tau) := (\beta_r * y)(\tau+\alpha), \tag{5}$$

приходим к равенству

$$\int_0^{2\pi} x_\alpha(t) z_\alpha(t)\,dt - \sup_{u \in L^n \cap W_2^r} \int_0^{2\pi} u(t) z_\alpha(t)\,dt =$$

$$= \|y\|_{q'}^{-1} \left(\|\beta_r * y\|_2 - \sup_{u \in L^n \cap W_2^r} \int_0^{2\pi} u^{(r)}(\tau)(\beta_r * y)_\alpha(\tau)\,d\tau \right). \tag{6}$$

Очевидно, что для каждой функции $u \in L^n \cap W_2^r$ такой, что $\left\|u^{(r)}\right\|_2 \ne 0$, будет выполняться неравенство

$$\int_0^{2\pi} u^{(r)}(\tau)(\beta_r * y)_\alpha(\tau)\,d\tau \le \left| \int_0^{2\pi} \left\|u^{(r)}\right\|_2^{-1} u^{(r)}(\tau)(\beta_r * y)_\alpha(\tau)\,d\tau \right|. \tag{7}$$

Полагая

$$v(\tau) := \left\|u^{(r)}\right\|_2^{-1} u^{(r)}(\tau),$$

обозначаем через

$$L^1(v) := \{ w \mid w(\cdot) := \lambda v(\cdot),\ \lambda \in \mathbb{R} \}$$

одномерное подпространство, содержащее функцию $v \in L_2$. Поскольку $\|v\|_2 = 1$, то наилучшее приближение функции $(\beta_r * y)_\alpha$ этим подпространством в L_2 определяется равенством (см., например, [3, с. 154])

$$E\big((\beta_r * y)_\alpha, L^1(\upsilon)\big)_2 = \Big(((\beta_r * y)_\alpha, (\beta_r * y)_\alpha) - ((\beta_r * y)_\alpha, \upsilon)^2\Big)^{1/2},$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в L_2. Следовательно,

$$\left|\int_0^{2\pi} \upsilon(\tau)(\beta_r * y)_\alpha(\tau)\,d\tau\right| = \Big(\|(\beta_r * y)_\alpha\|_2^2 - \Big(E\big((\beta_r * y)_\alpha, L^1(\upsilon)\big)_2\Big)^2\Big)^{1/2} =$$

$$= \Big(\|\beta_r * y\|_2^2 - \Big(E\big((\beta_r * y)_\alpha, L^1(\upsilon)\big)_2\Big)^2\Big)^{1/2}. \tag{8}$$

Ввиду того, что $u \in L^n \cap W_2^r$, существует подпространство L_r^n из L_2 размерности не выше n такое, что L_r^n содержит все соответствующие производные $u^{(r)}$. Поэтому $L^1(\upsilon) \subset L_r^n$ при всех υ и

$$E\big((\beta_r * y)_\alpha, L^1(\upsilon)\big)_2 \geq E\big((\beta_r * y)_\alpha, L_r^n\big)_2. \tag{9}$$

Но тогда из (2) – (9) следует

$$E\Big(\|\beta_r * y\|_2^{-1}(\beta_{2r} * y)_\alpha, L^n \cap W_2^r\Big)_q \geq$$

$$\geq \|y\|_{q'}^{-1}\left(\|\beta_r * y\|_2 - \Big(\|\beta_r * y\|_2^2 - \Big(E\big((\beta_r * y)_\alpha, L_r^n\big)_2\Big)^2\Big)^{1/2}\right)$$

для каждого α. Поэтому

$$\sup_\alpha E\big((\beta_{2r} * y)_\alpha, L^n \cap W_2^r\big)_q \geq$$

$$\geq \|\beta_r * y\|_2 \|y\|_{q'}^{-1}\left(\|\beta_r * y\|_2 - \left(\|\beta_r * y\|_2^2 - \left(\sup_\alpha E\left((\beta_r * y)_\alpha, L_r^n\right)_2\right)^2\right)^{1/2}\right),$$

и, таким образом,

$$E\big(K(\beta_{2r} * y), L^n \cap W_2^r\big)_q \geq$$

$$\geq \|\beta_r * y\|_2 \|y\|_{q'}^{-1}\left(\|\beta_r * y\|_2 - \left(\|\beta_r * y\|_2^2 - \left(E\left(K(\beta_r * y), L_r^n\right)_2\right)^2\right)^{1/2}\right).$$

А так как $E\left(K(\beta_r * y), L_r^n\right)_2 \geq d_n(K(\beta_r * y))_2$ для любого подпространства L_r^n, то

$$E\big(K(\beta_{2r} * y), L^n \cap W_2^r\big)_q \geq$$

$$\geq \|\beta_r * y\|_2 \|y\|_{q'}^{-1}\left(\|\beta_r * y\|_2 - \left(\|\beta_r * y\|_2^2 - \left(d_n\left(K(\beta_r * y)\right)_2\right)^2\right)^{1/2}\right).$$

Из этого неравенства, в силу произвольности L^n, следует оценка

$$d_n\big(K(\beta_{2r} * y), W_2^r\big)_q \geq$$

$$\geq \|\beta_r * y\|_2 \|y\|_{q'}^{-1}\left(\|\beta_r * y\|_2 - \left(\|\beta_r * y\|_2^2 - \left(d_n\left(K(\beta_r * y)\right)_2\right)^2\right)^{1/2}\right).$$

Лемма 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Докажем вначале необходимые оценки сверху. Для каждой функции $x \in W_2^r$ через

$$S(x;t) := a_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(x)\cos kt + b_k(x)\sin kt\right)$$

обозначаем ее ряд Фурье, а через

$$S_n(x;t) := a_0(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k(x)\cos kt + b_k(x)\sin kt\right)$$

— частичные суммы Фурье. Обозначим через T^{2n-1} пространство размерности $2n-1$ всех тригонометрических полиномов вида

$$T_n(t) := a_0(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right).$$

Как известно (см., например, [2, с. 258]), для каждой функции $x \in W_2^r$ наилучшее приближение $E(x, T^{2n-1})_2$ пространством T^{2n-1} реализуют суммы Фурье $S_n(x)$, и при этом

$$\|x - S_n(x)\|_2 \le \|x^{(r)}\|_2 n^{-r}. \tag{10}$$

Кроме того, $\|S^{(r)}(x)\|_2 \le \|x^{(r)}\|_2$. Следовательно,

$$E\left(W_2^r, T^{2n-1} \cap W_2^r\right)_2 \le n^{-r}. \tag{11}$$

А так как $\|y\|_q \le (2\pi)^{1/q-1/2}\|y\|_2$ при $1 \le q \le 2$, то из (11) следует неравенство

$$d_n\left(W_2^r, W_2^r\right)_q \le cn^{-r}, \quad 1 \le q \le 2, \tag{12}$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная.

Рассмотрим теперь случай $2 < q \le \infty$. Зафиксировав произвольное $m \in \mathbb{N}_0$, представим разность $x - S_{2^m}(x)$ в виде

$$x(t) - S_{2^m}(x;t) = \sum_{\mu=m}^{\infty} \left(S_{2^{\mu+1}}(x;t) - S_{2^\mu}(x;t)\right).$$

Из этого представления следует

$$\left\|x - S_{2^m}(x;t)\right\|_q \le \sum_{\mu=m}^{\infty} \left\|S_{2^{\mu+1}}(x;t) - S_{2^\mu}(x;t)\right\|_q. \tag{13}$$

Воспользовавшись неравенствами С. М. Никольского разных метрик для тригонометрических полиномов [21, с. 159], имеем

$$\left\|S_{2^{\mu+1}}(x) - S_{2^\mu}(x)\right\|_q \le 3(2^{\mu+1}-1)^{1/2-1/q}\left\|S_{2^{\mu+1}}(x) - S_{2^\mu}(x)\right\|_2, \quad \mu \ge m.$$

А так как из (10) следуют неравенства

$$\left\|S_{2^{\mu+1}}(x) - S_{2^\mu}(x)\right\|_2 \le \left\|x^{(r)}\right\|_2 2^{-\mu r+1}, \quad \mu \ge m,$$

то получаем неравенства

$$\left\|S_{2^{\mu+1}}(x) - S_{2^\mu}(x)\right\|_q \le 2^{5/2}\left\|x^{(r)}\right\|_2 2^{-(r-1/2+1/q)\mu}, \quad \mu \ge m.$$

Подставляя эти неравенства в (13), находим

$$\left\| x - S_{2^m}(x) \right\|_q \le 2^{5/2} \left\| x^{(r)} \right\|_2 \sum_{\mu=m}^{\infty} 2^{-(r-1/2+1/q)\mu} \le c \left\| x^{(r)} \right\|_2 2^{-(r-1/2+1/q)m},$$

где $c = c(r)$. Следовательно, при каждом $m \in \mathbb{N}_0$ выполняется неравенство

$$E\left(W_2^r, T^{2^m-1} \cap W_2^r\right)_2 \le c 2^{-(r-1/2+1/q)m}, \quad 2 < q \le \infty,$$

где $c = c(r)$. А из этого неравенства легко получить оценку

$$d_n\left(W_2^r, W_2^r\right)_q \le c n^{-r-1/2+1/q}, \quad 2 < q \le \infty, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

где $c = c(r)$. Объединяя (12) и (14), получаем необходимую оценку сверху в (1).

Докажем теперь оценку снизу. Поскольку $d_n\left(W_2^r, W_2^r\right)_q \ge d_n\left(W_2^r\right)_q$, то оценка

$$d_n\left(W_2^r, W_2^r\right)_q \ge c n^{-r}, \quad 1 \le q \le 2, \tag{15}$$

следует из известной оценки $d_n\left(W_2^r\right)_q \ge c n^{-r}$ для колмогоровских поперечников (см., например, [6, с. 211]).

Пусть $2 < q < \infty$. Обозначим через

$$D_m(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \cos kt, \quad n \in \mathbb{N},$$

ядра Дирихле. Положив

$$y_n(t) := D_{4n}(t) - D_n(t), \quad n \in \mathbb{N},$$

рассмотрим кривые $K\left(\|\beta_r * y_n\|_2^{-1}(\beta_{2r} * y_n)\right)$ в L_q, порождаемые сдвигами функции $\|\beta_r * y_n\|_2^{-1}(\beta_{2r} * y_n)(\cdot)$. Очевидно, что $K\left(\|\beta_r * y_n\|_2^{-1}(\beta_{2r} * y_n)\right) \subset$ $\subset W_2^r$. Поэтому

$$d_{2n}\left(W_2^r, W_2^r\right)_q \ge d_{2n}\left(K\left(\|\beta_r * y_n\|_2^{-1}(\beta_{2r} * y_n)\right), W_2^r\right)_q =$$
$$= \|\beta_r * y_n\|_2^{-1} d_{2n}\left(K\left(\beta_{2r} * y_n\right), W_2^r\right)_q, \tag{16}$$

где $K\left(\beta_{2r} * y_n\right)$ — кривая, порождаемая сдвигами функции $\left(\beta_{2r} * y_n\right)(\cdot)$. Использовав лемму 1, имеем

$$d_{2n}\left(K\left(\beta_{2r} * y_n\right), W_2^r\right)_q \ge$$
$$\ge \|\beta_r * y_n\|_2 \|y_n\|_{q'}^{-1} \left(\|\beta_r * y_n\|_2 - \left(\|\beta_r * y_n\|_2^2 - \left(d_{2n}(K(\beta_r * y_n))_2\right)^2 \right)^{1/2} \right). \tag{17}$$

Отметим, что из определения y_n следует неравенство $\|y_n\|_{q'} \le \|D_n\|_{q'} +$ $+ \|D_{4n}\|_{q'}$. Поэтому

$$\|\beta_r * y_n\|_2 \|y_n\|_{q'}^{-1} \left(\|\beta_r * y_n\|_2 - \left(\|\beta_r * y_n\|_2^2 - \left(d_{2n}(K(\beta_r * y_n))_2\right)^2 \right)^{1/2} \right) \ge$$
$$\ge \frac{1}{2} \left(\|D_n\|_{q'} + \|D_{4n}\|_{q'} \right)^{-1} \left(d_{2n}(K(\beta_r * y_n))_2\right)^2. \tag{18}$$

Несложно проверить, что

$$(\beta_r * y_n)(t) = \sum_{k=n}^{4n} k^{-r}\cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right).$$

Поэтому из равенства Парсеваля следует неравенство

$$\|\beta_r * y_n\|_2 \le c_1 n^{-r+1/2}, \tag{19}$$

где $c_1 = c_1(r)$, а из леммы B — неравенство

$$d_{2n}(K(\beta_r * y_n))_2 \ge c_2 n^{-r+1/2}, \tag{20}$$

где $c_2 = c_2(r)$. Кроме того, известно [3, с. 181], что

$$\|D_m\|_{q'} \le cm^{1/q}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

где $c = c(q)$. Но тогда из (16) – (21) следует оценка

$$d_{2n}\left(W_2^r, W_2^r\right)_q \ge cn^{-r+1/2-1/q}, \quad 2 < q < \infty, \tag{22}$$

где $c = c_1(r, q)$.

Перейдем к рассмотрению случая $q = \infty$. Полагаем

$$y_n(t) := V_{5n}^{(n)}(t) - V_{3n}^{(n)}(t), \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$V_m^{(\mu)}(t) := D_\mu(t) + \frac{m}{m-\mu}\sum_{k=\mu+1}^{m-1}\left(1 - \frac{k}{m}\right)\cos kt, \quad \mu, m \in \mathbb{N}, \quad \mu < m,$$

— известные ядра Валле Пуссена. Рассматривая кривые $K\left(\|\beta_r * y_n\|_2^{-1} \times (\beta_{2r} * y_n)\right)$ в пространстве L_∞, порождаемые сдвигами функции $\left(\|\beta_r * y_n\|_2^{-1} \times (\beta_{2r} * y_n)(\cdot)\right)$, отметим, что $K\left(\|\beta_r * y_n\|_2^{-1}(\beta_{2r} * y_n)\right) \subset W_2^r$. Учитывая, что функцию y_n можно представить в виде

$$y_n(t) := \frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{3n-1}\left(\frac{k}{n} - 1\right)\cos kt - \frac{5}{4}\sum_{k=3n}^{5n-1}\left(1 - \frac{k}{5n}\right)\cos kt,$$

нетрудно проверить, что

$$(\beta_r * y_n)(t) := \frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{3n-1} k^{-r}\left(\frac{k}{n} - 1\right)\cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right) -$$

$$- \frac{5}{4}\sum_{k=3n}^{5n-1} k^{-r}\left(1 - \frac{k}{5n}\right)\cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right).$$

Поэтому из равенства Парсеваля следует неравенство

$$\|\beta_r * y_n\|_2 \le c_1 n^{-r+1/2}, \tag{23}$$

где $c_1 = c_1(r)$, а из леммы B — неравенство

$$d_{2n}(K(\beta_r * y_n))_2 \ge c_2 n^{-r+1/2}, \tag{24}$$

где $c_2 = c_2(r)$. Кроме того, известно [22, с. 119], что

$$\max\left\{\left\| V_{3n}^{(n)} \right\|_1, \left\| V_{5n}^{(n)} \right\|_1\right\} \le c, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{25}$$

где c — абсолютная постоянная. Таким образом, если заменить в (18) D_n и D_{4n} соответственно на $V_{3n}^{(n)}$ и $V_{5n}^{(n)}$, то, учитывая соотношения (23) – (25) и (16) – (18), получаем оценку

$$d_{2n}\left(W_2^r, W_2^r\right)_\infty \ge cn^{-r+1/2}, \tag{26}$$

где $c = c(r)$.

Объединяя оценки (15), (22) и (26), имеем

$$d_{2n}\left(W_2^r, W_2^r\right)_q \ge cn^{-\min\{r-1/2+1/q,\, r\}}, \quad 1 \le q \le \infty,$$

где $c = c(r, q)$. А так как $d_n\left(W_2^r, W_2^r\right)_q \ge d_{2n}\left(W_2^r, W_2^r\right)_q$, то необходимая оценка снизу в (1), а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

1. *Kolmogoroff A. N.* Uber die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionen Klasse // Ann. Math. – 1936. – **37**, № 1. – S. 107 – 110.
2. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
3. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
4. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1985. – 291 p.
5. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
6. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1987. – **14**. – С. 103 – 260.
7. *Коновалов В. Н.* Оценки поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. – 1984. – **35**, № 3. – С. 369 – 380.
8. *Стечкин С. Б.* О наилучшем приближении заданных классов функций любыми полиномами // Успехи мат. наук. – 1954. – **9**, № 1. – С. 133 – 134.
9. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Там же. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
10. *Тихомиров В. М.* Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C[-1, 1]$ // Мат. сб. – 1969. – **80**, № 2. – С. 290 – 304.
11. *Tikhomirov V. M.* Some remarks on relative diameters // Banch Center Publ. – 1989. – **22**. – P. 471 – 474.
12. *Бабенко В. Ф.* Приближения в среднем при наличии ограничений на производные приближающих функций // Вопросы анализа и приближения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 9 – 18.
13. *Babenko V. F.* On the relative widths of classes of functions with bounded mixed derivative // East. J. Approxim. – 1996. – **2**, № 3. – P. 319 – 330.
14. *Бабенко В. Ф.* О наилучших равномерных приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные // Мат. заметки. – 1991. – **50**, № 6. – С. 24 – 30.
15. *Бабенко В. Ф.* О наилучших L_1-приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные // Там же. – 1992. – **51**, № 5. – С. 12 – 19.
16. *Субботин Ю. Н.* Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1993. – **33**. – С. 996 – 1003.
17. *Субботин Ю. Н., Теляковский С. А.* Точные значения относительных поперечников классов дифференцируемых функций // Мат. заметки. – 1999. – **65**, № 6. – С. 871 – 879.
18. *Субботин Ю. Н., Теляковский С. А.* Относительные поперечники классов дифференцируемых функций в метрике L^2 // Успехи мат. наук. – 2001. – **56**, № 4. – С. 159 – 160.
19. *Азар Л. Э.* Аппроксимация функциональных классов при наличии ограничений: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Днепропетровск, 1999. – 115 с.
20. *Исмагилов Р. С.* Об n-мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве // Функцион. анализ и его прил. – 1968. – **2**, № 2. – С. 32 – 39.
21. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
22. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 511 с.

Получено 09.11.2001