УДК 517.5

О. І. Степанець (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ СУМАМИ ФУР'Є КЛАСІВ ЗГОРТОК: НОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

We present a review of new results related to the investigation of the rate of convergence of Fourier sums on classes of functions defined by convolutions whose kernels have monotone Fourier coefficients.

Наведено огляд нових результатів, пов'язаних з дослідженням швидкості збіжності рядів Фур'є на класах функцій, що задаються згортками, ядра яких мають монотонні коефіцієнти Фур'є.

Протягом усього XX століття в центрі уваги багатьох (у тому числі і видатних) математиків була задача про знаходження швидкості збіжності ряду Фур'є до своєї суми.

Якщо розглядати цю задачу в рівномірній метриці (а саме цим випадком ми тут обмежимось), то, мабуть, першим фундаментальним результатом у цьому напрямку є результат Лебега за 1910 р.: якою б не була неперервна 2π-періодична функція f ($f \in C$),

$$\left| f(x) - S_{n-1}(f;x) \right| \le (\ln n + 3) E_n(f)_C, \tag{1}$$

де $S_n(f;x)$ — частинна сума порядку n ряду Фур'є функції f, а

$$E_n(f) = \inf_{T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}} \left\| f(\cdot) - T_{n-1}(\cdot) \right\|_C.$$

У поєднанні з теоремами Джексона про оцінки величин $E_n(f)_C$ нерівність Лебега не втрачає свого значення і в наш час. На всьому класі C вона є точною в розумінні порядку і зручною в застосуванні.

Новий період більш глибокого дослідження величини

$$\rho_n(f;x) = f(x) - S_{n-1}(x) \tag{2}$$

бере свій початок у 30 – 40-х роках. Він пов'язаний з іменами А. М. Колмогорова і С. М. Нікольського. У 1935 р. А. М. Колмогоров [1] розглянув величину

$$\mathscr{E}_n(W^r) = \left\{ \sup \|\rho_n(f;x)\|_C : f \in W^r \right\}, \qquad W^r = \left\{ f : \left\| f^{(r)} \right\|_C \le 1 \right\}$$

і показав, що для будь-якого $r \in N$ при $n \to \infty$

$$\mathscr{E}_n(W^r) = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} + O(n^{-r}). \tag{3}$$

Пізніше, в 1940 р. В. Т. Пінкевичем [2] було встановлено, що співвідношення (3) залишається правильним для довільного $r > 0$, якщо під $f^{(r)}(\cdot)$ розуміти похідну за Вейлем.

Наступний істотний крок у даній тематиці належить С. М. Нікольському [3], який у 1945 р. узагальнив згадані вище результати на класи

$$W^r H^\alpha = \left\{ f : \left| f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x') \right| \le \left| x - x' \right|^\alpha, \ 0 < \alpha \le 1, \ r > 0 \right\}$$

та на більш загальні класи $W^r H_\omega$, що задаються мажорантою $\omega(t)$ модулів неперервності похідних $\omega\left(f^{(r)}; t\right)$.

Зокрема, С. М. Нікольський показав, що

$$\mathcal{E}(W^r H^\alpha) = \frac{2^{\alpha+1}\ln n}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\, dt + O\left(n^{-(r+\alpha)}\right), \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Згодом у 1946 р. він також отримав основоположні результати при дослідженні величин $\rho_n(f; x)$ і встановленні для них асимптотичних рівностей вигляду (3) і (4) в інтегральній метриці [4].

Ці дослідження А. М. Колмогорова та С. М. Нікольського започаткували новий напрям у теорії наближення функцій і в теорії рядів Фур'є. Їхні результати згодом поширювалися на більш загальні класи функцій та на випадки, коли як наближаючі агрегати розглядалися тригонометричні поліноми, що породжуються різноманітними методами U_n підсумовування рядів Фур'є. Задача про відшукання асимптотичних рівностей для величин

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n) = \sup\{\| f(x) - U_n(f; x)\|: f \in \mathfrak{N}\}, \tag{5}$$

де $\mathfrak{N}$ — заданий клас 2π-періодичних функцій, стала однією з найважливіших в теорії наближень та рядів Фур'є. Цю задачу ми назвали задачею Колмогорова – Нікольського (задача К – Н). Якщо в явному вигляді знайдено функцію $\varphi(n) = \varphi(\mathfrak{N}; U_n; n)$ таку, що при $n \to \infty$ справджується рівність

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n) = \varphi(n) + o(\varphi(n)),$$

то говоримо, що задачу К – Н розв'язано для класу $\mathfrak{N}$ і методу U_n.

Ця задача має багату історію, пов'язану з іменами відомих спеціалістів з теорії функцій. Б. Надь, В. К. Дзядик, М. П. Корнєйчук, С. Б. Стєчкін, С. О. Теляковський — це далеко не повний перелік математиків, котрі працювали над цією задачею.

Слід зазначити, що кожне значне просування вперед у розв'язанні цієї задачі вимагало нових ідей та методів, які згодом в повній мірі були використані і в інших розділах теорії функцій.

На початку 80-х років найбільш загальними класами функцій, на яких розглядалася задача К – Н, були класи W^r_β і $W^r_\beta H_\omega$, що визначалися похідними в розумінні Вейля – Надя. Нагадаємо, що якщо

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) B_{r,\beta}(t)\, dt, \tag{6}$$

де

$$B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \beta\pi/2)}{k^r}, \quad \beta \in R, \quad r > 0, \tag{7}$$

то функцію $\varphi(\cdot)$ називають похідною функції $f(\cdot)$ в розумінні Вейля – Надя (при $\beta = r$ — в розумінні Вейля) і позначають $f^r_\beta(\cdot)$. Тоді

$$W^r_\beta = \left\{ f: \left\| f^{(r)}_\beta \right\|_\infty \le 1 \right\}, \quad W^r_\beta H_\omega = \left\{ f: f^{(r)}_\beta \in H_\omega \right\}. \tag{8}$$

Для сум Фур'є задачу К – Н на класах W^r_β було повністю розв'язано в роботах Б. Надя і С. О. Теляковського, а на класах $W^r_\beta H_\omega$ — у роботах С. М. Нікольського і О. В. Єфімова. При цьому найбільш загальні результати для класів W^r_β отримав С. О. Теляковський [5] у 1961 р., а для класів $W^r_\beta H_\omega$ — О. В. Єфімов [6, 7] у 1960 – 1961 роках.

Слід зазначити, що методи, якими користувалися С. О. Теляковський та О. В. Єфімов, істотно відрізнялися один від одного. Особливо складними і копіткими були дослідження О. В. Єфімова. Тому природною виглядала спроба розробити метод розв'язування задач К – Н як для класів W^r_β, так і для класів $W^r_\beta H_\omega$.

На початку 80-х років такий метод було розроблено. Більш того, розроблений метод давав змогу розв'язувати задачу К – Н не лише для класів W^r_β і $W^r_\beta H_\omega$, але і для їх суттєвих узагальнень — класів $L^\psi_{\beta,\infty}$ і $L^\psi_\beta H_\omega$. Нижче будемо вважати, що класи $L^\psi_{\beta,\infty}$ і $L^\psi_\beta H_\omega$ — це множини функцій $f(\cdot)$, що зображаються згортками

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_\beta(t)\,dt, \tag{9}$$

в яких відповідно $\|\varphi\|_\infty \le 1$ і $\varphi \in H_\omega$, а

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \tag{10}$$

$\psi(k)$, $k \in N$, — деяка послідовність і $\beta \in R$. Порівнюючи (7) і (10), бачимо, що при $\psi(k) = k^{-r}$ справджуються рівності $L^\psi_{\beta,\infty} = W^r_\beta$ і $L^\psi_\beta H_\omega = W^r_\beta H_\omega$. Функцію φ в (9) називають (ψ, β)-похідною f і позначають f^ψ_β (див., наприклад, [8]).

Аналоги рівностей (3) і (4) на класах $L^\psi_{\beta,\infty}$ і $L^\psi_\beta H_\omega$ мають вигляд

$$\mathcal{E}_n\left(L^\psi_{\beta,\infty}\right) = \frac{4\,\psi(n)}{\pi^2}\ln^+(\eta(n)-n) + O(1)\,\psi(n), \tag{3$'$}$$

$$\mathcal{E}_n\left(L^\psi_\beta H_\omega\right) = \frac{\psi(n)}{\pi}e_n(\omega)\ln^+(\eta(n)-n) + O(1)\,\psi(n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{4$'$}$$

де

$$e_n(\omega) = \frac{2\theta_\omega}{\pi}\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt, \quad \theta \in \left[\frac{2}{3}, 1\right], \tag{11}$$

причому $\theta_\omega \equiv 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності,

$$\eta(n) = \eta(\psi; n) = \psi^{-1}\left[\frac{1}{2}\psi(n)\right].$$

Рівності (3′) і (4′) мають місце при умові, що $\psi(\upsilon)$ — опукла донизу і $\lim\limits_{\upsilon\to\infty}\psi(\upsilon) = 0$. Якщо $\psi(\upsilon) = \upsilon^{-r}$, то $\eta(n) - n = O(1)n$ і тоді з (3′) і (4′) випливають рівності (3) і (4).

Для введених класів $L^\psi_{\beta,\infty}$, $L^\psi_\beta H_\omega$ розглядалися задачі про найкраще наближення, задачі про поперечники та ін. За відносно невеликий проміжок часу для таких класів було отримано практично всі результати, котрі до цього були відомі для класів Вейля – Надя.

Така класифікація дає змогу перебрати весь спектр сумовних функцій і в той же час здатна врахувати більш тонкі властивості конкретних функцій. Тому результати, що були отримані для класів $L^\psi_{\beta,\infty}$, $L^\psi_\beta H_\omega$, з одного боку, є досить загальними, а з іншого — вирізняють ряд нових ефектів, котрі в шкалі раніше відомих класів не могли бути навіть поміченими.

Наприкінці 90-х років було здійснено подальше і, як ми помітимо, в певному розумінні остаточне узагальнення класів, а також дослідження величини $\rho_n(f; x)$ на цих класах [9 – 11].

Формальний бік зазначеного узагальнення зводиться до того, що будемо розглядати множини функцій, які все ще зображаються згортками

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi(t)\,dt, \tag{12}$$

але тепер ядра, на відміну від ядер $\Psi_\beta(\cdot)$ вигляду (10), можуть бути довільними:

$$\Psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \big(\psi_1(k)\cos kx + \psi_2(k)\sin kx\big), \tag{13}$$

де $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$ — взагалі кажучи, довільні послідовності.

Перейдемо до строгих означень.

Означення 1. *Нехай* $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ *— пара довільних систем дійсних чисел* $\psi_1(k)$ *і* $\psi_2(k)$, $k = 0, 1, \ldots$, $\psi_1(0) = 1$, $\psi_2(0) = 0$. *Нехай, далі,* $\varphi \in L$ *і*

$$S[\varphi] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\varphi; x) \tag{14}$$

— ряд Фур'є функції φ. *Якщо*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\psi_1(k)A_k(\varphi; x) + \psi_2(k)\tilde{A}_k(\varphi; x)\Big), \qquad \tilde{A}_k(\varphi; x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx \tag{15}$$

для даної функції φ *і пари* $\overline{\psi}$ *є рядом Фур'є деякої функції* $f \in L$, *то* f *назвемо інтегралом функції* φ, *що породжується парою* $\overline{\psi}$, *або просто* $\overline{\psi}$*-інтегралом функції* φ *і домовимось писати* $f(\cdot) = \mathcal{I}^{\overline{\psi}}(\varphi, \cdot)$.

Множину $\overline{\psi}$-інтегралів усіх функцій $\varphi \in L$ позначимо через $L^{\overline{\psi}}$. Якщо $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з L, то $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ позначатиме множину $\overline{\psi}$-інтегралів усіх функцій $\varphi \in \mathfrak{N}$.

Якщо f є $\overline{\psi}$-інтегралом функції φ, то функцію φ природно назвати $\overline{\psi}$-похідною функції f. Цей факт висвітлюється в наступних твердженнях.

Означення 2. *Нехай* $f \in L$ *і*

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\varphi; x). \tag{16}$$

Нехай, далі, $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ *— пара, що задовольняє умову*

$$\overline{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0, \quad k \in N. \tag{17}$$

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)} A_k(f; x) - \frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)} \tilde{A}_k(f; x)\right) \tag{18}$$

є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, *то* φ *назвемо* $\overline{\psi}$*-похідною функцію* f *і будемо писати* $\varphi(\cdot) = D^{\overline{\psi}}(f; \cdot) = f^{\overline{\psi}}(\cdot)$. *Підмножину функцій* $\varphi \in L$, *які мають* $\overline{\psi}$*-похідні, позначимо через* $\overline{L}^{\overline{\psi}}$. *Якщо* $f \in \overline{L}^{\overline{\psi}}$ *і при цьому* $f^{\overline{\psi}} \in \mathfrak{N}$, *де* $\mathfrak{N} \subset L$, *то покладемо* $f \in \overline{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$.

Зв'язок між $\overline{\psi}$-інтегралом і $\overline{\psi}$-похідними встановлюється в наступному твердженні.

Твердження 1. *Якщо* $f \in L$, *ряд* (16) *— її ряд Фур'є і виконано умову* (17), *то функція* $\mathcal{I}^{\overline{\psi}}(f; x)$ *має* $\overline{\psi}$*-похідну і*

$$D^{\overline{\psi}}\Big(\mathcal{I}^{\overline{\psi}}(f; \cdot)\Big) = f(\cdot) - \frac{a_0}{2}.$$

Якщо ж $f \in \overline{L}^{\overline{\psi}}$ *і* (16) *— її ряд Фур'є, то функція* $D^{\overline{\psi}}(f;\cdot)$ *має* $\overline{\psi}$*-інтеграл і*

$$\mathcal{I}^{\overline{\psi}}\left(D^{\overline{\psi}}(f;\cdot)\right) = f(\cdot) - \frac{a_0}{2}.$$

Наслідок 1. *Для будь-яких пар* $\overline{\psi}$, *що задовольняють* (17),

$$L^0 \cap \overline{L}^{\overline{\psi}} = L^{\overline{\psi}} L^0, \quad L^0 = \{f\colon f \in L,\ f \perp 1\}.$$

Таким чином, множина $\overline{\psi}$*-інтегралів усіх функцій* $f \in L^0$ *збігається з множиною функцій із* L^0, *які мають* $\overline{\psi}$*-похідні (і складається з* $\overline{\psi}$*-інтегралів від* $\overline{\psi}$*-похідних).*

Означення 3. *Якщо пара* $\overline{\psi}_1 = (\psi_1, \psi_2)$ *така, що ряд* (13) *є рядом Фур'є деякої функції, то пишемо* $\overline{\psi} \in \mathcal{L}$.

Твердження 2. *Якщо* $\overline{\psi} \in \mathcal{L}$, *то для будь-якої функції* $f \in L^{\overline{\psi}}$ *майже скрізь*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}}(x-t)\Psi(t)\,dt, \tag{19}$$

a_0 *— вільний член розкладу Фур'є функції* f.

Зауваження 1. (ψ, β)-похідна функції f є $\overline{\psi}$-похідною, якщо

$$\psi_1(k) = \psi(k)\cos\beta\frac{\pi}{2}, \qquad \psi_2(k) = \psi(k)\sin\beta\frac{\pi}{2}. \tag{20}$$

Якщо при цьому $\psi(k) = k^{-r}$, $\overline{\psi}$-похідна є похідною в розумінні Вейля – Надя.

Чи кожна функція $f \in L$ має хоча б яку-небудь $\overline{\psi}$-похідну? Ствердна відповідь на це є очевидною, якщо не вимагається, щоб

$$\lim_{k\to\infty}\psi_1(k) = \lim_{k\to\infty}\psi_2(k) = 0, \tag{21}$$

оскільки при $\psi_1(k) = \psi_2(k) \equiv 1$ виконується рівність $f^{\overline{\psi}} = f$. Тому цікавим є випадок, коли виконується (21). Відповідь і в цьому випадку є ствердною. Більш того, виявляється, можна припускати, що окрім умови (21), функції можна вважати опуклими. Множину опуклих донизу функцій, що задовольняють умову (21), позначимо через $\mathfrak{M}$.

Твердження 3. *Кожна функція* $f \in C$ *(або* $f \in L$) *має принаймні одну* $\overline{\psi}$*-похідну* $f^{\overline{\psi}}$, *яка міститься в* C *(або в* L). *При цьому пару* $\overline{\psi}$ *можна вибрати так, щоб* $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$.

Звідси випливає, що кожна функція $f \in C$ $(f \in L)$ має нескінченно велику кількість $\overline{\psi}$-похідних (навіть за умови, що $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$), які залишаються неперервними (або сумовними). Більш того, оскільки при $\psi \in \mathfrak{M}$ ряд

$$\frac{\psi(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos kt$$

завжди є рядом Фур'є сумовної функції $\Psi(t)$, то з твердження 3 випливає наступне твердження.

Твердження 4. *Кожна функція* $f \in C$ *(або* $f \in L$) *може бути зображена згорткою*

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\Psi(t)\,dt,$$

в якій $\varphi \in C$ *(або* $\varphi \in L$).

Наслідок 2. *Справедливі рівності*

$$\bigcup_{\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}} L^{\overline{\psi}} = L, \qquad \bigcup_{\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}} C^{\overline{\psi}} = C, \quad C^{\overline{\psi}} = L^{\overline{\psi}} \cap C. \tag{22}$$

Означення 4. *Через $\mathcal{T}$ будемо позначати множину всіх тригонометричних поліномів.*

Зрозуміло, що для $f \in \mathcal{T}$, якою б не була пара $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, f має $\overline{\psi}$-похідну.

Зрозуміло також, що $\bigcap_{\overline{\psi}} L^{\overline{\psi}} = \mathcal{T}$, якщо $\overline{\psi}$ набуває всіх можливих значень. Більш того, має місце наступне твердження.

Твердження 5. *Справедлива рівність*

$$\bigcap_{\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}} L^{\overline{\psi}} = \mathcal{T}. \tag{23}$$

З рівностей (22) і (23) випливає, що у випадку, коли пара $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ набуває всіх значень з множини $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, вся множина L (або C) розбивається на підмножини (класи) $L^{\overline{\psi}}$ (або $C^{\overline{\psi}}$). За такої класифікації залишаються нерозпізнаними лише тригонометричні поліноми.

Далі побачимо, що форма результатів з наближень на множинах $L^{\overline{\psi}}$ залежить не лише від функцій ψ_1 і ψ_2, але й від швидкості спадання до нуля цих функцій на нескінченності.

У зв'язку з цим доцільно розглядати три частини множини $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}_C = \left\{\psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < C_1 \le \frac{t}{\eta(t) - t} \le C_2 < \infty\right\},$$

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{\psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < \frac{t}{\eta(t) - t} \le C < \infty\right\},$$

$$\mathfrak{M}_\infty = \left\{\psi \in \mathfrak{M}\colon \frac{t}{\eta(t) - t} \uparrow \infty\right\}.$$

Зрозуміло, що $\mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}_C$. Типовими представниками множин $\mathfrak{M}_C$ є функції t^{-r}, $r > 0$, $\ln^{\varepsilon} t^{-r}$, $t > 0$, $\varepsilon \in R$ та ін., множин $\mathfrak{M}_0 \setminus \mathfrak{M}_C$ — функції $\ln^{-r} t$, $r > 0$, множин $\mathfrak{M}_\infty$ — функції $\exp(-\alpha t^r)$, $r > 0$, $\alpha > 0$ та ін.

Наведемо деякі з отриманих результатів.

Теорема 1. *Нехай $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ і $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}_0$, де*

$$\mathfrak{M}' = \left\{\psi \in \mathfrak{M}\colon \int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}\, dt < \infty\right\}. \tag{24}$$

Тоді величина

$$\mathcal{E}_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}\right) = \sup\left\{|\rho_n(f; x)|\colon f \in C_\infty^{\overline{\psi}}\right\}, \quad C_\infty^{\overline{\psi}} = C_\infty^{\overline{\psi}} S_M^0,$$

$$S_M^0 = \left\{f \in L\colon \|f\|_M \le 1,\ f \perp 1\right\}$$

не залежить від значень x і при $n \to \infty$

$$\mathcal{E}_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}\right) = \frac{2}{\pi} \int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}\, dt + \frac{4}{\pi^2}\, \overline{\psi}(n) \ln n + O(1)\, \overline{\psi}(n), \tag{25}$$

де $\overline{\psi}(n) = \left(\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)\right)^{1/2}$, $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно n.

У багатьох випадках твердження цієї теореми є відомим. Так, якщо $\psi_2 \in \mathfrak{M}_C$, то

$$\int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}\,dt \le K\,|\psi_2(n)|.$$

Тому рівність (25) в цьому випадку набирає вигляду

$$\mathcal{E}_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}\right) = \frac{4}{\pi^2}\,\overline{\psi}(n)\ln n + O(1)\overline{\psi}(n). \tag{25$'$}$$

Звідси, якщо ψ_1 і ψ_2 вибрано згідно з (20), отримуємо

$$\mathcal{E}_n\left(C_{\beta,\infty}^{\psi}\right) = \frac{4}{\pi^2}\,|\psi(n)|\ln n + O(1)|\psi(n)|. \tag{26}$$

У загальному випадку рівність (26) доведено автором у [8]; при $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, — це рівність Колмогорова – Надя – Теляковського.

Теорема 2. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ *і* $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\overline{\psi}}H_\omega^0\right) = \sup\left\{|\rho_n(f;x)|:\ f \in C^{\overline{\psi}}H_\omega^0\right\} =$$

$$= \theta_\omega\left(\frac{1}{\pi}\int_0^1 \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\left|\int_1^\infty \psi_2(nv)\sin vt\,dv\right|dt + \frac{2}{\pi^2}\,\overline{\psi}(n)\ln n\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt\right) +$$

$$+ O(1)\overline{\psi}(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{27}$$

де $\theta_\omega \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, *причому* $\theta_\omega = 1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий доверху модуль неперервності.*

Якщо $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, а $\psi_2 \in \mathfrak{M}_C$, то згідно з (27)

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\overline{\psi}}H_\omega^0\right) = \frac{2\theta_\omega}{\pi^2}\,\overline{\psi}(n)\ln n\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt + O(1)\overline{\psi}(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{27$'$}$$

Якщо, до того ж, ψ_1 і ψ_2 вибрано згідно з (20), то з (27$'$) маємо

$$\mathcal{E}_n\left(C_\beta^{\psi}H_\omega^0\right) = \frac{2\theta_\omega}{\pi^2}\,|\psi(n)|\ln n\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt + O(1)|\psi(n)|\,\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{27$''$}$$

У загальному випадку цю рівність було доведено автором у [8]; при $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, — це рівність Нікольського – Єфімова.

Наступне твердження є аналогом нерівності (1).

Теорема 3. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ *і* $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in C^{\overline{\psi}}C^0$ *при кожному* $n \in N$

$$\|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C \le \left(\frac{2}{\pi}\int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}\,dt + \frac{4}{\pi^2}\,\overline{\psi}(n)\ln n + O(1)\overline{\psi}(n)\right)E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)_C. \tag{28}$$

Для будь-якої $f \in C^{\overline{\psi}}C^0$ *при кожному* $n \in N$ *у просторі* $C^{\overline{\psi}}C^0$ *знайдеться функція* $F(x) = F(f;n;x)$ *така, що* $E_n\left(F^{\overline{\psi}}\right) = E_n\left(f^{\psi}\right)$ *і для неї (28) перетворюється в рівність.*

Друга частина цієї теореми показує, що нерівність (28) є асимптотично точною на $C^{\overline{\psi}}C^0$. Вона також є точною і на $C_\infty^{\overline{\psi}}$, як це випливає з рівності (25).

Зрозуміло, що співвідношення (25) і (27) завжди дають розв'язок відповідної задачі К – Н.

Зазначимо, що у співвідношеннях (25), (27) і (28) головним членом правої частини може бути перший доданок. Це буде, зокрема, так, якщо покласти

$$\psi_2(t) = \left(\ln t \ln^{\alpha}(\ln t)\right)^{-1}, \quad \alpha > 0.$$

Зауважимо також, що в такому випадку величини $\mathscr{E}_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}\right)$ асимптотично рівні величинам

$$E_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}\right) = \sup_{f \in C_\infty^{\overline{\psi}}} E_n(f).$$

У теоремах 1 – 3 припускалося, що $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$, тобто $\psi_1(t)$ і $\psi_2(t)$ можуть як завгодно повільно спадати, але при цьому виключався випадок, коли ці функції спадають швидше, ніж будь-яка степенева функція. Тепер розглянемо той випадок, коли

$$\psi_1,\ \psi_2 \in \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty = \mathfrak{M}_{C,\infty}.$$

Теорема 4. *Нехай* $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$ *і, крім цього,*

$$0 < K_1 \le \frac{\eta(\psi_1, n) - n}{\eta(\psi_2, n) - n} \le K_1 < \infty. \tag{29}$$

Тоді

$$\mathscr{E}_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}\right) = \frac{4\overline{\psi}(n)}{\pi^2} \ln^+(\eta(n) - n) + O(1)\overline{\psi}(n), \tag{30}$$

$$\mathscr{E}_n\left(C^{\overline{\psi}} H_\omega^0\right) = \frac{2\overline{\psi}(n)}{\pi^2} e_n(\omega) \ln^+(\eta(n) - n) + O(1)\overline{\psi}(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{30$'$}$$

де

$$\overline{\psi}(n) = \left(\psi_1^2(n) + \psi_2^2\right)^{1/2},$$

$\eta(n)$ *є або* $\eta(\psi_1; n) = \psi_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi_1(n)\right)$, *або* $\eta(\psi_2; n) = \psi_2^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi_2(n)\right)$.

Теорема 5. *Нехай* $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$, *а замість* (29) *виконується умова*

$$\frac{\eta(\psi_1; t) - t}{\eta(\psi_2; t) - t} \ge K. \tag{29$'$}$$

Тоді при $n \to \infty$

$$\mathscr{E}_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}\right) = \frac{4|\psi_1(n)|}{\pi^2} \ln^+(\eta(\psi_1; n) - n) + O(1)|\psi_1(n)|, \tag{31}$$

$$\mathscr{E}_n\left(C^{\overline{\psi}} H_\omega^0\right) = \frac{2|\psi_1(n)|}{\pi^2} e_n(\omega) \ln^+(\eta(\psi_1; n) - n) + O(1)|\psi_1(n)|\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{31$'$}$$

Теорема 6. *Нехай* $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$. *Тоді якщо виконано* (29), *то для будь-якої* $f \in C^{\overline{\psi}} C^0$ *при кожному* $n \in N$

$$\|\rho_n(f; x)\|_C \le \left(\frac{4}{\pi^2} \ln^+(\eta(n) - n) + O(1)\right)\overline{\psi}(n) E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)_C, \tag{32}$$

де $\eta(n)$ *такі ж, як у теоремі* 4.

Якщо ж виконується (29′), *то для будь-якої функції* $f \in C^{\overline{\psi}}C^0$

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \le \left(\frac{4}{\pi^2}\ln^+(\eta(\psi_1;n)-n)+O(1)\right)\overline{\psi}(n)E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)_C. \qquad (32')$$

Для будь-якої функції $f \in C^{\psi}C^0$ *при кожному* $n \in N$ *знайдеться функція* $F \in C^{\overline{\psi}}C^0$ *така, що* $E_n\left(F^{\overline{\psi}}\right)_C = E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)$ *і для неї співвідношення* (32) *і* (32′) *перетворюються в рівності.*

Якщо ж ψ_1, $\psi_2 \in \mathfrak{M}_C$, *то умова* (29) *заздалегідь виконується і тоді* (30′), (30) *збігаються з рівностями* (27′), (27″) *і* (28).

Повні доведення тверджень 1 – 5 і теорем 1 – 6 містяться в роботах автора [9 – 11].

Теореми 1 – 6 дають розв'язки задачі Колмогорова – Нікольського у випадках, коли функції ψ, котрими породжуються класи $C^{\overline{\psi}}H_\omega$, спадають повільніше, ніж члени геометричної прогресії. Якщо $\psi(k)=q^k$, $q\in(0,1)$, то функція $\Psi_\beta(t)$ є відомим ядром Пуассона

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right),$$

а

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)P_{q,\beta}(t)\,dt$$

— інтеграли Пуассона — 2π-періодичні функції, що можуть бути продовжені до функцій $f(z) = f(x+iy)$, регулярних у смузі $|y|\le \ln\frac{1}{q}$. Класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $C^{\psi}_{\beta}H_\omega$ в цьому випадку в подальшому позначаються через $C^{q}_{\beta,\infty}$ та $C^{q}_{\beta}H_\omega$.

Для класів $C^{q}_{\beta,\infty}$ розв'язок задачі К – Н одержав С. М. Нікольський ще в 1946 р. Було показано [4], що

$$\mathcal{E}_n\left(C^{q}_{\beta,\infty}\right) = \frac{8q^n}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)q^n n^{-1}, \qquad (33)$$

де

$$\mathbf{K}(q) = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-q^2\sin^2 t}}, \quad q\in[0,1), \qquad (34)$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду.

У 1980 р. цей результат був передоведений С. Б. Стєчкіним [12] іншим способом, що дозволив уточнити залишковий член у формулі (33) для $\mathcal{E}_n\left(C^{q}_{\beta,\infty}\right)$. Ще тоді С. Б. Стєчкін звернув увагу автора на аналогічну задачу для класів $C^{q}_{\beta}H_\omega$. Класи $C^{q}_{\beta}H_\omega$ у порівнянні з класами $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ враховують більш тонкі властивості функцій, тому розв'язування для них екстремальних задач завжди суттєво ускладнюється і, як правило, ті методи, що розроблялися для розв'язання задач на класах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, є недостатніми для розв'язання задач на класах $C^{\psi}_{\beta}H_\omega$. Винятковість класів $C^{q}_{\beta}H_\omega$ серед усіх класів $C^{\psi}_{\beta}H_\omega$, що визначаються опуклими послідовностями $\psi(k)$, з точки зору розв'язання задачі К – Н пояснюється в першу чергу тим, що на цих класах порядки верхніх меж відхилень сум Фур'є і найкращих наближень тригонометричними поліномами збігаються і в той же час послідовність $\psi(k) = q^k$ ще не достатньо швидко прямує до нуля, щоб перший член відхилення сум Фур'є домінував, як, скажімо, у випадку, коли $\psi(k) = q^{k^r}$ при $r > 1$. Слід зазначити, що в подібних ситуаціях розв'язки задачі К – Н відомі в дуже рідкісних випадках і вперше така задача була розв'язана М. П. Корнєйчуком при наближенні сумами Фавара класів H_ω при $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Тут М. П. Корнєйчук уперше в повній мірі скористався одним твердженням, котре пізніше одержало назву леми Корнєйчука – Стєчкіна. Ця лема дає принципову можливість знаходити величини

$$\sup_{f \in H_\omega} \left| \int_a^b f(t) \varphi(t)\, dt \right|.$$

Якраз до цього і зводиться розв'язок задачі К – Н на класах, що визначаються модулями неперервності. На жаль, застосування цієї леми є далеко не простим: для ефективного її використання необхідна інформація про наявність нулів і певного характеру їх розташування у деяких первісних функцій $\varphi(t)$. Одержання такої інформації спряжене, як правило, з великими труднощами. Цим і пояснюється та невелика кількість випадків розв'язання подібних задач (детальніше про це можна прочитати у [13]).

У роботі автора [14] одержано розв'язок задачі К – Н у випадку наближення сумами Фур'є функцій із класів $C_\beta^q H_\omega$ і цим самим ліквідовано згадану вище прогалину для класів $C_\beta^\psi H_\omega$.

Теорема 7. *Нехай* $q \in (0, 1)$, $\beta \in R$ *і* $\omega(t)$ *— довільний модуль неперервності. Тоді величина*

$$\mathcal{E}_n\left(C_\beta^q H_\omega\right) = \sup\left\{ \left| f(x) - S_{n-1}(f; x) \right| : f \in C_\beta^q H_\omega \right\}$$

не залежить від точки x *і при* $n \to \infty$ *виконується рівність*

$$\mathcal{E}_n\left(C_\beta^q H_\omega\right) = \frac{4q^n}{\pi^2} \mathbf{K}(q) e_n(\omega) + \frac{O(1) q^n}{(1-q)^2 n} \omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{35}$$

де

$$e_n(\omega) = \theta_\omega \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\, dt,$$

$\theta_\omega \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, *при цьому* $\theta_\omega = 1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності;* $O(1)$ *— величина, що рівномірно обмежена по* n, q *та* β.

Ця теорема дає повний розв'язок задачі К – Н на класах $C_\beta^\psi H_\omega$ у рівномірній метриці. Для просторів L_p має місце наступне твердження.

Теорема 8. *Нехай* $q \in (0, 1)$, $\beta \in R$, $1 \le p < \infty$ *і* $\omega(t)$ *— довільний модуль неперервності. Тоді величина*

$$\mathcal{E}_n\left(L_\beta^q H_{\omega_p}\right)_p = \sup\left\{ \left\| f(x) - S_{n-1}(f; x) \right\|_{L_p} : f \in L_\beta^q H_{\omega_p} \right\}$$

при $n \to \infty$ *задовольняє нерівність*

$$\mathcal{E}_n\left(L_\beta^q H_{\omega_p}\right)_p \le \frac{4q^n}{\pi^2} \mathbf{K}(q) \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\, dt + \frac{O(1) q^n}{(1-q)^2 n} \omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

де $O(1)$ *— величина, що рівномірно обмежена по* n, q *та* β.

Позначимо через $L^q_\beta L_p$ множину функцій, еквівалентних відносно міри Лебега інтегралам Пуассона функцій з простору L_p.

У роботі [15] на класах $L^q_\beta L_p$, $p \geq 1$, вдалось одержати аналоги нерівностей Лебега у просторах L_p.

Нехай $\mathcal{T}_{2n-1}$ — простір тригонометричних поліномів $t_{n-1}(\cdot)$, порядок яких не перевищує $n-1$. Величина

$$E_n(f)_p = \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \left\| f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot) \right\|_p$$

— найкраще наближення функції $f(\cdot)$ у просторі L_p тригонометричними поліномами із $\mathcal{T}_{2n-1}$. Встановлено наступне твердження.

Теорема 9. *Нехай* $q \in (0,1)$, $\beta \in R$ *і* $p \geq 1$. *Тоді для довільної функції* $f \in L^q_\beta L_p$ *має місце асимптотична нерівність*

$$\|\rho_n(f;x)\|_p \leq \left(\frac{8q^n}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + \frac{q^n O(1)}{(1-q)^2 n} \right) E_n\left(f^q_\beta\right)_p, \tag{36}$$

у якій $\mathbf{K}(q)$ *— повний еліптичний інтеграл першого роду, а* $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно параметрів* q, β, p, n *і* $f \in L^q_\beta L_p$.

Зауважимо, що нерівності вигляду (36) для класів функцій, породжених послідовностями $\psi(k)$, котрі прямують до нуля повільніше, ніж члени геометричної прогресії, встановлено у [16]. Там же було звернуто увагу, що вказані нерівності є точними на деяких важливих підмножинах розглядуваних функцій. Відмітимо ряд таких випадків для оцінки (36).

Позначимо $L^q_\beta U_p$, де $U_p = \left\{ f \in L_p : \|f\|_p \leq 1 \right\}$, через $L^q_{\beta,p}$.

Якщо $f \in L^q_{\beta,p}$, то $\left\| f^q_\beta \right\|_p \leq 1$ і, отже, $E_n\left(f^q_\beta\right)_p \leq 1$. Розглядаючи верхні межі обох частин нерівності (36) на множинах $L^q_{\beta,p}$, одержуємо

$$\mathcal{E}_n\left(L^q_{\beta,p}\right) \leq \frac{8q^n}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n}, \quad p \geq 1. \tag{36'}$$

Співставляючи це співвідношення з результатом С. М. Нікольського [4, с. 221]

$$\mathcal{E}_n\left(L^q_{\beta,1}\right)_1 = \frac{8q^n}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + \frac{O(1)q^n}{n},$$

а також із рівністю (33), робимо висновок, що при $p = 1$ і $p = \infty$ співвідношення (36′) насправді є рівністю.

Інший приклад непокращуваності оцінки (36) дає наступне твердження.

Теорема 10. *Нехай* $q \in (0,1)$, $\beta \in R$ *і* $C^q_\beta C$ *— множина інтегралів Пуассона всіх неперервних функцій. Тоді якщо* $f \in C^q_\beta C$, *то*

$$\|\rho_n(f;x)\|_C = \|\rho_n(f;x)\|_\infty \leq \left(\frac{8q^n}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n} \right) E_n\left(f^q_\beta\right)_C. \tag{37}$$

При цьому для довільної функції $f \in C^q_\beta C$ *при кожному натуральному* n *у просторі* $C^q_\beta C$ *знайдеться функція* $F(x) = F(f;n;x)$ *така, що* $E_n\left(F^q_\beta\right) = E_n\left(f^q_\beta\right)$ *і для неї виконується рівність*

$$\|\rho_n(F;x)\|_C = \left(\frac{8q^n}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n}\right)E_n\left(F_\beta^q\right)_C. \tag{38}$$

У (37) і (38) $O(1)$ — величини, обмежені по n, q, β і $f \in C_\beta^q C$.

Нехай $\varepsilon = \varepsilon_n$, $n \in N$, — довільна монотонно спадна до нуля послідовність невід'ємних чисел. Через $C_n(\varepsilon)$ позначимо множину неперервних функцій $\varphi \in C$, для яких при даному n виконується нерівність $E_n(\varphi)_C \le \varepsilon_n$; через $C_\beta^q C_n(\varepsilon)$ — множину інтегралів Пуассона $\mathcal{I}_\beta^q(\varphi,\cdot)$ функцій φ із $C_n(\varepsilon)$. Тоді з теореми 10 одержуємо наступне твердження.

Теорема 10′. *Нехай $q \in (0,1)$, $\beta \in R$. Тоді для будь-якого класу $C_\beta^q C_n(\varepsilon)$ при будь-якому $n \in N$*

$$\mathcal{E}_n\left(L_\beta^q C_n(\varepsilon)\right) = \left(\frac{8q^n}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n}\right)\varepsilon_n,$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n, q і β.

Поряд із дослідженнями апроксимативних властивостей інтегралів Пуассона $L_\beta^q \mathfrak{N}$ у роботі [17] вивчались апроксимативні характеристики класів $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$ $\left(L^{\overline{\psi}} \mathfrak{N}\right)$, які породжуються послідовностями ψ (парою послідовностей $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$), що спадають до нуля приблизно як члени геометричної прогресії, а саме, які належать до множини $\mathcal{D}_q$ послідовностей $\psi(k)$, $k \in N$, для яких

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \quad 0 \le q \le 1. \tag{39}$$

При викладі подальших результатів поряд із класами $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ будуть використовуватися також класи $L_{\overline{\beta}}^\psi$, що введені автором у [8] і означаються таким чином.

Нехай $f \in L$ і ряд (16) — її ряд Фур'є. Нехай, далі, $\psi = \psi(k)$ і $\overline{\beta} = \beta_k$ — довільні фіксовані послідовності дійсних чисел. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k\cos\left(kx + \beta_k\frac{\pi}{2}\right) + b_k\sin\left(kx + \beta_k\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(\beta_k\pi/2)}{\psi(k)}A_k(f;x) - \frac{\sin(\beta_k\pi/2)}{\psi(k)}\tilde{A}_k(f;x)$$

є рядом Фур'є деякої інтегровної функції $f_{\overline{\beta}}^\psi(\cdot)$, то її називають $\left(\psi,\overline{\beta}\right)$-похідною функції $f(\cdot)$. Множина всіх функцій із L, що мають $\left(\psi,\overline{\beta}\right)$-похідні, позначається $L_{\overline{\beta}}^\psi$. Якщо $f \in L_{\overline{\beta}}^\psi$ і, крім того, $f_{\overline{\beta}}^\psi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина із $L^0 = \{f\colon f \in L,\ f \perp 1\}$, то покладають $f \in L_{\overline{\beta}}^\psi \mathfrak{N}$. У випадку, коли виконується тотожність $\beta_k \equiv \beta$, $\left(\psi,\overline{\beta}\right)$-похідна є (ψ,β)-похідною $f_\beta^\psi(\cdot)$, а множини $L_{\overline{\beta}}^\psi$ і $L_{\overline{\beta}}^\psi\mathfrak{N}$ — відповідно множинами L_β^ψ і $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$.

Крім того, кожна $\left(\psi,\overline{\beta}\right)$-похідна функції $f \in L$ є і її $\overline{\psi}$-похідною, якщо компоненти $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$ підібрано у відповідності з рівностями

$$\psi_1(k) = \psi(k)\cos\beta_k\frac{\pi}{2}, \qquad \psi_2(k) = \psi(k)\sin\beta_k\frac{\pi}{2}, \tag{40}$$

і довільна $\overline{\psi}$-похідна є $(\psi, \overline{\beta})$-похідною, якщо параметри $\psi(k)$ і $\beta(k)$ означити формулами

$$\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)},$$
$$\cos\beta_k \frac{\pi}{2} = \frac{\psi_1(k)}{\psi(k)}, \quad \sin\beta_k \frac{\pi}{2} = \frac{\psi_2(k)}{\psi(k)}. \tag{41}$$

У обох випадках виконуються рівності

$$L^{\overline{\psi}} = L^{\psi}_{\overline{\beta}}, \quad L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N} = L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N} \quad \forall\, \mathfrak{N} \in L^0.$$

Далі покладемо

$$C^{\psi}_{\overline{\beta}} = C \cap L^{\psi}_{\overline{\beta}}, \quad C^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N} = C \cap L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N},$$

$$L^{\overline{\psi}}_p = L^{\overline{\psi}} U^0_p, \quad L^{\psi}_{\overline{\beta},p} = L^{\psi}_{\overline{\beta}} U^0_p, \quad U^0_p = \left\{\varphi \in L^0 : \|\varphi\|_p \le 1\right\}.$$

На класах $L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$, $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 \le q < 1$, досліджувалися величини $\|\rho_n(f;x)\|_s$, $E_n(f)_s$, де $\mathfrak{N}$ — деяка фіксована підмножина з L_p, $1 \le p$, $s \le \infty$, а також величини

$$\mathcal{E}_n\left(L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}\right)_s = \sup_{f \in L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}} \left\| f - S_{n-1}(f) \right\|_s$$

і

$$E_n\left(L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}\right)_s = \sup_{f \in L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}} E_n(f)_s = \sup_{f \in L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}} \inf_{t_{n-1}} \left\| f - t_{n-1} \right\|_s$$

з метою одержання для них асимптотичних рівностей.

Одержати асимптотичні рівності для зазначених величин вдалося завдяки застосуванню наведеної нижче леми 1, суть якої полягає у тому, що залишки $\rho_n\left(\Psi_{\overline{\beta}}\right)$ ядра

$$\Psi_{\overline{\beta}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right), \quad \psi(k) \in R, \quad \beta_k \in R,$$

при $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, при $n \to \infty$ поводять себе приблизно таким же чином, як і залишки $\rho_n\left(P^q_{\overline{\beta}}\right)$ ядра

$$P_{q,\overline{\beta}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \beta_k \frac{\pi}{2}\right), \quad q \in (0,1), \quad \beta \in R.$$

Це дозволяє, зокрема, зводити задачі про одержання асимптотичних рівностей для величин $\mathcal{E}_n\left(L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}\right)_s$ і $E_n\left(L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}\right)_s$ до аналогічних задач для величин $\mathcal{E}_n\left(L^{q}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}\right)$ і $E_n\left(L^{q}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}\right)_s$ відповідно. У деяких важливих випадках для величин $\mathcal{E}_n\left(L^{q}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}\right)_s$ і $E_n\left(L^{q}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}\right)_s$ асимптотичні рівності (і навіть їх точні значення) відомі. У цих випадках з'являється можливість виписати асимптотичні рівності і для величин $\mathcal{E}_n\left(L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}\right)_s$ і $E_n\left(L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}\right)_s$. Зокрема, таким шляхом, відштовхуючись від відомих результатів С. М. Нікольського [4] та С. Б. Стечкіна [12], вдається одержати асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}\right)_C$ і $\mathcal{E}_n\left(L^{\psi}_{\beta,1}\right)_1$ для усіх $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$. Раніше цей випадок не було охоплено.

Наступна теорема встановлює зв'язок між нормами у просторі L_s залишків ряду Фур'є $\overline{\psi}$-інтегралів $\mathcal{I}^{\psi}_{\beta}(\varphi)$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, і залишків ряду Фур'є $\overline{\psi}$-інтегралів $\mathcal{I}^{q}_{\beta}(\varphi)$, $\varphi \in L_p$.

Теорема 11. *Нехай* $1 \le p,\ s \le \infty$ *і* $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in L^{\psi}_{\beta} L_p$ *при* $n \to \infty$ *має місце формула*

$$\|\rho_n(f)\|_s = \psi(n)\left(q^{-n}\left\|\rho_n\left(\mathcal{I}^{q}_{\beta}\left(f^{\psi}_{\beta}\right)\right)\right\|_s + O(1)\,\frac{\varepsilon_n E_n\left(f^{\psi}_{\beta}\right)_p}{(1-q)^2}\right), \tag{42}$$

у якій $\varepsilon_n = \sup\limits_{k \ge n}\left|\dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|$, $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно* $n, p, s, q, \psi(k)$ *і* β_k.

Доведення теореми 11 ґрунтується на наступній лемі, яка, можливо, має і самостійний інтерес.

Лема 1. *Нехай* $\psi(k)$, $k \in N$, *— довільна числова послідовність із* $\mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$. *Тоді для довільної послідовності дійсних чисел* γ_k, $k = 1, 2, \ldots$, *виконується рівність*

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos(kt-\gamma_k) = \psi(n)\left(q^{-n}\sum_{k=n}^{\infty} q^k\cos(kt-\gamma_k) + r_n(t)\right), \tag{43}$$

при цьому для величини $r_n(t) = r_n(\psi, \overline{\gamma}, t)$, *починаючи з деякого номера* n_0, *справедлива оцінка*

$$|r_n(t)| \le \frac{\varepsilon_n}{(1-q-\varepsilon_n)(1-q)},$$
$$\varepsilon_n = \sup_{k\ge n}|\delta_k|, \qquad \delta_k = \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q. \tag{44}$$

Покладаючи у формулі (42) $s = p$, $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in R$ і застосовуючи асимптотичну нерівність (37), одержуємо наступне твердження.

Наслідок 3. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$ *і* $\beta \in R$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in L^{\psi}_{\beta} L_p$

$$\|\rho_n(f)\|_p \le \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{\varepsilon_n + 1/n}{(1-q)^2}\right)E_n\left(f^{q}_{\beta}\right)_p,$$

де величина $\mathbf{K}(q)$ *означена рівністю* (34), ε_n *— рівністю* (44), $O(1)$ *— рівномірно обмежена величина відносно* $n, p, q, \psi(k)$ *і* $f \in L^{\psi}_{\beta} L_p$.

Аналогом теореми 11 у випадку, коли $f \in C^{\psi}_{\beta} C$ або $f \in C^{\psi}_{\beta} L_p$, $p \in [1, \infty]$, є наступне твердження.

Теорема 11′. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$. *Тоді для довільної функції* $f \in C^{\psi}_{\beta} X$, *де* $X \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, *або* C, *при* $n \to \infty$ *має місце рівність*

$$\|\rho_n(f)\|_C = \psi(n)\left(q^{-n}\left\|\rho_n\left(\mathcal{I}^q_\beta\left(f^\psi_\beta\right)\right)\right\|_C + O(1)\frac{\varepsilon_n E_n\left(f^\psi_\beta\right)_X}{(1-q)^2}\right), \qquad (42')$$

у якій ε_n *означена рівністю* (44), *а* $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена відносно* $n, p, q, \psi(k)$ *і* β_k.

Записуючи формулу (42′) при $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in R$ у випадку, коли $f \in C^\psi_\beta C$, і застосовуючи теорему 10, одержуємо наступне твердження.

Наслідок 4. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$ *і* $\beta \in R$. *Тоді якщо* $f \in C^\psi_\beta C$, *то*

$$\|\rho_n(f)\|_C \le \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{\varepsilon_n + 1/n}{(1-q)^2}\right)E_n\left(f^\psi_\beta\right)_C.$$

При цьому для довільної функції $f \in C^\psi_\beta C$ *при кожному натуральному* n *у просторі* $C^\psi_\beta C$ *знайдеться функція* $F(x) = F(f; n; x)$ *така, що* $E_n\left(F^\psi_\beta\right) = E_n\left(f^\psi_\beta\right)$, *і для неї виконується рівність*

$$\|\rho_n(F; x)\|_C = \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{\varepsilon_n + 1/n}{(1-q)^2}\right)E_n\left(F^\psi_\beta\right)_C.$$

У двох останніх формулах ε_n *і* $\mathbf{K}(q)$ *мають той же зміст, що й у наслідку* 3, *а* $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені по* $n, q, \beta, \psi(k)$ *і* $f \in C^\psi_\beta C$.

Розглядаючи верхні межі обох частин співвідношення (42) на класах $L^\psi_{\beta,p}$, а співвідношення (42′) — на класах C^ψ_β і враховуючи, що

$$\sup_{f \in L^\psi_{\beta,p}} \|\rho_n(f;\cdot)\|_s = \sup\left\{\left\|\rho_n\left(\mathcal{I}^\psi_\beta(\varphi;\cdot)\right)\right\|_s : \|\varphi\|_p \le 1,\ \varphi \perp 1\right\},$$

одержуємо наступне твердження.

Теорема 12. *Нехай* $1 \le p,\ s \le \infty$ *і* $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $\psi(k) > 0$. *Тоді при* $n \to \infty$

$$\mathcal{E}_n\left(L^\psi_{\beta,p}\right)_s = \psi(n)\left(q^{-n}\mathcal{E}_n\left(L^q_{\beta,p}\right)_s + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right), \qquad (45)$$

$$\mathcal{E}_n\left(C^\psi_{\beta,p}\right)_C = \psi(n)\left(q^{-n}\mathcal{E}_n\left(C^q_{\beta,p}\right)_C + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right), \qquad (46)$$

де ε_n *означена формулою* (44), *а* $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені відносно* $n, p, s, q, \psi(k)$ *і* β_k.

Величини $q^{-n}\mathcal{E}_n\left(L^q_{\beta,p}\right)_s$ і $q^{-n}\mathcal{E}_n\left(C^q_{\beta,p}\right)_C$ при $n \to \infty$ є обмеженими зверху і знизу деякими додатними числами, залежними, можливо, тільки від q, p і s, тобто

$$C^{(2)}_{p,s} \le q^{-n}\mathcal{E}_n\left(L^q_{\beta,p}\right)_s \le C^{(1)}_{p,s}(1-q)^{-1}, \qquad C^{(i)}_{p,s} > 0, \quad i = 1, 2,$$

$$C^{(2)}_p \le q^{-n}\mathcal{E}_n\left(C^q_{\beta,p}\right)_C \le C^{(1)}_p(1-q)^{-1}, \qquad C^{(i)}_p > 0, \quad i = 1, 2.$$

Оскільки послідовність ε_n прямує до нуля при $n \to \infty$, то з урахуванням (45) і (46) у випадках, коли відомі асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_n\left(L^q_{\beta,p}\right)_s$ і

$\mathscr{E}_n\left(C^q_{\beta,p}\right)_C$, співвідношення (42) і (42′) дають можливість записати аналогічні рівності і для величин $\mathscr{E}_n\left(L^\psi_{\beta,p}\right)_s$ і $\mathscr{E}_n\left(C^\psi_{\beta,p}\right)_C$ відповідно.

Згідно з означенням множин $\mathscr{D}_q$, $0 \le q \le 1$, має місце наступне твердження.

Твердження 6. *Для того щоб послідовність $\psi(k)$ належала до множини $\mathscr{D}_q$, $0 \le q < 1$, необхідно і достатньо, щоб мало місце зображення*

$$\psi(k) = q^k \varphi(k),$$

у якому $\varphi(k)$ — деяка послідовність із $\mathscr{D}_1 = \left\{\varphi(k) \in R,\ k \in N\colon \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\varphi(k+1)}{\varphi(k)} = 1\right\}$.

Зокрема, до $\mathscr{D}_q$, $0 < q < 1$, належать послідовності $\psi^*(k) = q^k k^r$, $r \in (-\infty, +\infty)$; $\psi^{**}(k) = q^k e^{\alpha k^r}$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, $r \in (0,1)$ та ін. У випадку, коли $\beta_k = \beta$, $k \in N$, $\beta \in R$, ядра $P_{q,\bar\beta}(t)$ є ядрами Пуассона $P_{q,\beta}(t)$.

Наступне твердження відтворює результати С. М. Нікольського (33) і (33′) з уточненим С. Б. Стєчкіним [12, с. 139] залишковим членом.

Теорема А. *Нехай $n \in N$, $\beta \in R$, $0 < q < 1$. Тоді при $n \to \infty$ мають місце асимптотичні рівності*

$$\left.\begin{array}{r} \mathscr{E}^*_n\left(C^q_{\beta,\infty}\right)_C \\[2ex] \mathscr{E}_n\left(L^q_{\beta,1}\right)_1 \end{array}\right\} = q^n\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)}\right), \qquad \begin{array}{r}(47)\\[2ex](47)'\end{array}$$

у яких $\mathbf{K}(q)$ означені рівністю (34), *а $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені відносно параметрів n, q і β.*

Об'єднуючи теорему 12 і теорему А, одержуємо наступне твердження.

Теорема 13. *Нехай класи $C^\psi_{\beta,\infty}$ і $L^\psi_{\beta,1}$ породжені ядром*

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

$$\beta \in R, \quad \psi(k) \ge 0, \quad \psi \in \mathscr{D}_q, \quad 0 < q < 1.$$

Тоді при $n \to \infty$ мають місце асимптотичні рівності

$$\left.\begin{array}{r} \mathscr{E}_n\left(C^\psi_{\beta,\infty}\right)_C \\[2ex] \mathscr{E}_n\left(L^\psi_{\beta,1}\right)_1 \end{array}\right\} = \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \qquad \begin{array}{r}(48)\\[2ex](48')\end{array}$$

у яких ε_n і $\mathbf{K}(q)$ означені рівностями (44) *і* (34) *відповідно, а $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені відносно параметрів n, β і ψ.*

Зауваження 2. Асимптотичні рівності (48) і (48′) залишаються справедливими, якщо в теоремі 13 умову $0 < q < 1$ замінити умовою $0 \le q < 1$.

Умови теореми 13 задовольняють бігармонічні ядра Пуассона

$$B_{q,\beta}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1-q^2}{2}k\right)q^k\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad (49)$$

$$0 < q < 1, \quad \beta \in R,$$

а також ядра Неймана

$$N_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad 0 < q < 1, \quad \beta \in R. \tag{50}$$

Легко перевірити, що для коефіцієнтів $\psi(k)$ ядер $B_{q,\beta}(t)$ і $N_{q,\beta}(t)$

$$|\varepsilon_k| = \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right| \le \frac{q}{k}, \quad k \in N. \tag{51}$$

Отже, із теореми 13 і співвідношення (51) одержуємо твердження.

Наслідок 5. *Нехай класи* $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ *і* $L^{\psi}_{\beta,1}$ *породжені ядром* $B_{q,\beta}(t)$ *вигляду* (49), $n \in N$. *Тоді при* $n \to \infty$ *мають місце асимптотичні рівності*

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}\right)_C \\ &\mathscr{E}_n\left(L^{\psi}_{\beta,1}\right)_1 \end{aligned}\right\} = q^n\left(1 + \frac{1-q^2}{2}n\right)\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right),$$

у яких величини $O(1)$ *рівномірно обмежені по* n, q *і* β.

Наслідок 6. *Нехай класи* $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ *і* $L^{\psi}_{\beta,1}$ *породжені ядром* $N_{q,\beta}(t)$ *вигляду* (50), $n \in N$. *Тоді при* $n \to \infty$ *мають місце асимптотичні рівності*

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}\right)_C \\ &\mathscr{E}_n\left(L^{\psi}_{\beta,1}\right)_1 \end{aligned}\right\} = \frac{q^n}{n}\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right),$$

у яких величини $O(1)$ *рівномірно обмежені по* n, q *і* β.

Аналіз даного С. Б. Стечкіним доведення теореми А [12, с. 139 – 142] показує, що використані у ньому методи дозволяють одержати асимптотичні оцінки величин $\mathscr{E}_n\left(C^{q}_{\beta,\infty}\right)_C$ і $\mathscr{E}_n\left(L^{q}_{\beta,1}\right)_1$ для класів $C^{q}_{\beta,\infty}$ і $L^{q}_{\beta,1}$, породжених ядрами $P_{q,\bar\beta}(t)$ вигляду (13), у яких $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in R$, $k \in N$. При цьому вигляд отримуваних оцінок у порівнянні із випадком $\beta_k = \beta$, $k \in N$, $\beta \in R$, не зміниться. А саме, справедлива наступна теорема.

Теорема Б. *Нехай* $n \in N$, $0 < q < 1$, $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in R$, $k \in N$. *Тоді при* $n \to \infty$ *мають місце асимптотичні рівності*

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{E}_n\left(C^{q}_{\beta,\infty}\right)_C \quad (52)\\ &\mathscr{E}_n\left(L^{q}_{\beta,1}\right)_1 \quad (52') \end{aligned}\right\} = q^n\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)}\right),$$

у яких $\mathbf{K}(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}$, *а* $O(1)$ *— величини, рівномірно обмежені відносно параметрів* n, q *і* β.

Співставлення теорем 12 і теореми Б дозволяє сформулювати наступний аналог теореми 13.

Теорема 13′. *Нехай класи* $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ *і* $L^{\psi}_{\beta,1}$ *породжені ядром*

$$\Psi_{\bar\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta_k\pi}{2}\right), \quad \psi(k) > 0,$$

у якого $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in R$, $k \in N$.

Тоді при $n \to \infty$

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{E}_n\left(C^q_{\beta,\infty}\right)_C \quad (53) \\ &\mathscr{E}_n\left(L^q_{\beta,1}\right)_1 \quad (53') \end{aligned}\right\} = \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right),$$

де ε_n, $\mathbf{K}(q)$ *і* $O(1)$ *мають той же зміст, що і в теоремі* 13.

Теорема 13 допускає наступне узагальнення на класи $C^{\overline{\psi}}_\infty$ і $L^{\overline{\psi}}_1$.

Теорема 14. *Нехай класи* $C^{\overline{\psi}}_\infty$ *і* $L^{\overline{\psi}}_1$ *породжені ядром*

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(\psi_1(k)\cos kt + \psi_2(k)\sin kt), \tag{54}$$

у якого

$$\psi_i \in \mathscr{D}_{q_i}, \; 0 < q_i < 1, \; i = 1, 2. \tag{55}$$

Тоді при $n \to \infty$ *виконуються асимптотичні рівності*

$$\mathscr{E}_n\left(C^{\overline{\psi}}_\infty\right)_C = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \tag{56}$$

$$\mathscr{E}_n\left(L^{\overline{\psi}}_1\right)_1 = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \tag{56'}$$

у яких $q = \max\{q_1, q_2\}$, $\mathbf{K}(q) = \int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1 - q^2\sin^2 u}}$,

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \max\limits_{i=1,2}\left\{\varepsilon_n^{(i)}\right\}, & \text{якщо } q_1 = q_2; \\ \varepsilon_n^{(1)}, & \text{якщо } q_1 > q_2; \\ \varepsilon_n^{(2)}, & \text{якщо } q_1 < q_2, \end{cases}$$

$$\varepsilon_n^{(i)} = \sup_{k \ge n}\left|\frac{\psi_i(k+1)}{\psi_i(k)} - q_i\right|, \quad i = 1, 2,$$

а $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені відносно* n, ψ_1 *і* ψ_2.

Відносно умов (55) теореми 14 відзначимо наступне. Якщо $q_1 \ne q_2$, то можна показати, що відношення $\dfrac{\psi_1(k)}{\psi_2(k)} = \varphi(k)$ завжди має границю при $k \to \infty$, яка дорівнює або 0 (коли $q_1 < q_2$), або $\pm\infty$ (коли $q_1 > q_2$). Це означає, що, визначивши послідовність дійсних чисел β_k із проміжку $[0, 4)$ за допомогою рівностей (41), можна гарантувати існування границі послідовності β_k при $k \to \infty$ на цьому проміжку.

Якщо ж $q_1 = q_2 = q$, то можна вказати такі послідовності $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$ із $\mathscr{D}_q$, що визначена ними на проміжку $[0, 4)$ у відповідності з формулами (41) послідовність β_k не буде мати границі. Такими, наприклад, будуть послідовності

$$\psi_1(k) = q^k, \quad \psi_2(k) = q^k\varphi(k), \quad k \in N, \quad 0 < q < 1,$$

де

$$\varphi(k) = \begin{cases} \dfrac{3}{2} - \dfrac{k}{2^{2\nu+1}}, & 2^{2\nu} \le k < 2^{2\nu+1}; \\ \dfrac{k}{2^{2(\nu+1)}}, & 2^{2\nu+1} \le k < 2^{2(\nu+1)}, \; \nu = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Аналог теореми 12 має місце і для класів, що означаються модулями неперервності. Розглядаючи верхні межі обох частин співвідношення (42′) на класах $L^{\psi}_{\beta} H_{\omega_p}$ і $C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}$ і враховуючи, що

$$\sup_{f \in L^{\psi}_{\beta} H_{\omega_p}} \|\rho_n(f;\cdot)\|_s = \sup\left\{ \left\|\rho_n\left(\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}(\varphi;\cdot)\right)\right\|_s : \varphi \in H_{\omega_p}\right\},$$

а також, що в силу нерівності Джексона у просторах L_p і C мають місце нерівності

$$\sup_{\varphi \in H_{\omega_p}} E_n(\varphi)_p \le K\omega_p\left(\frac{1}{n}\right), \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\sup_{\varphi \in H_{\omega}} E_n(\varphi) \le K\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

у яких K — абсолютна стала, одержуємо наступне твердження.

Теорема 12′. *Нехай* $1 \le s \le \infty$, $1 \le p < \infty$ *і* $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$. *Тоді при* $n \to \infty$

$$\mathcal{E}_n\left(L^{\psi}_{\beta} H_{\omega_p}\right)_X = \psi(n)\left(q^{-n}\mathcal{E}_n\left(L^{q}_{\beta} H_{\omega_p}\right)_X + O(1)\frac{\varepsilon_n \omega_p(n^{-1})}{(1-q)^2}\right), \tag{45′}$$

де $X \in L_s$ *або* C;

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}\right)_C = \psi(n)\left(q^{-n}\mathcal{E}_n\left(C^{q}_{\beta} H_{\omega}\right)_C + O(1)\frac{\varepsilon_n \omega(n^{-1})}{(1-q)^2}\right). \tag{46′}$$

У формулах (45′) *і* (46′) *величини* ε_n *і* $O(1)$ *мають той же зміст, що і в теоремі* 12.

Із нерівності (46′), а також із теореми 7 одержуємо наступний результат.

Теорема 15. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$, $\beta \in R$ *і* $\omega(t)$ — *довільний модуль неперервності. Тоді при* $n \to \infty$

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}\right)_C = \psi(n)\left(\frac{2}{\pi} e_n(\omega)\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{\omega(1/n)(\varepsilon_n + 1/n)}{(1-q)^2}\right),$$

де

$$e_n(\omega) = \frac{2\theta_\omega}{\pi}\int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\, dt,$$

$\theta_\omega \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, *причому* $\theta_\omega = 1$, *якщо* $\omega(t)$ — *опуклий модуль неперервності;* $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена по* n, q, β *і* $\psi(k)$.

Наступна теорема встановлює зв'язок між найкращими наближеннями у метриці L_s $\overline{\psi}$-інтегралів $\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}(\varphi)$ при $\psi \in \mathfrak{D}_q$ і найкращими наближеннями інтегралів $\mathcal{J}^{q}_{\beta}(\varphi)$ при $\varphi \in L_p$.

Теорема 16. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$ *і* $\psi(k) > 0$. *Тоді для довільної* $f \in L^{\psi}_{\beta} L_p$ *при* $n \to \infty$ *має місце формула*

$$E_n(f)_s = \psi(n)\left(q^{-n} E_n\left(\mathcal{J}^{q}_{\beta}\left(f^{\psi}_{\beta}\right)\right)_s + O(1)\frac{\varepsilon_n E_n\left(f^{\psi}_{\beta}\right)_p}{(1-q)^2}\right), \quad 1 \le s < \infty. \tag{57}$$

Якщо ж $f \in C^{\psi}_{\beta} L_p$, *то*

$$E_n(f)_C = \psi(n)\left(q^{-n} E_n\left(\mathcal{I}^q_{\beta}\left(f^{\psi}_{\beta}\right)\right)_C + O(1)\frac{\varepsilon_n E_n\left(f^{\psi}_{\beta}\right)_p}{(1-q)^2}\right), \tag{57'}$$

де ε_n *означена рівністю* (44), *а* $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена відносно* $n, p, s, q, \psi(k)$ *і* β_k.

Розглядаючи верхні межі обох частин співвідношень (57) і (57′) на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ і $C^{\psi}_{\beta,p}$ і враховуючи, що

$$\sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} E_n(f)_s = \sup_{\substack{\|\varphi\|_p \le 1 \\ \varphi \perp 1}} E_n\left(\mathcal{I}^{\psi}_{\beta}(\varphi)\right)_s,$$

одержуємо наступне твердження.

Теорема 17. *Нехай* $1 \le p \le \infty$ *і* $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$. *Тоді при* $n \to \infty$

$$E_n\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_s = \psi(n)\left(q^{-n} E_n\left(L^q_{\beta,p}\right)_s + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right), \quad 1 \le s < \infty, \tag{58}$$

$$E_n\left(C^{\psi}_{\beta,p}\right)_C = \psi(n)\left(q^{-n} E_n\left(C^q_{\beta,p}\right)_C + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right), \tag{58'}$$

де ε_n — *та ж, що й у теоремі* 16, *а* $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені відносно* $n, p, s, q, \psi(k)$ *і* β_k.

Можна довести, що величини $q^{-n} E_n\left(L^q_{\beta,p}\right)_s$, $1 \le s < \infty$, і $q^{-n} E_n\left(C^q_{\beta,p}\right)_C$ при $n \to \infty$ обмежені зверху і знизу деякими додатними числами, залежними, можливо, тільки від q, p і s, тобто

$$C^{(2)}_{p,s} \le q^{-n} E_n\left(L^q_{\beta,p}\right)_s \le C^{(1)}_{p,s}(1-q)^{-1},$$

$$1 \le s < \infty, \quad C^{(1)}_{p,s},\ C^{(2)}_{p,s} > 0, \tag{59}$$

$$C^{(2)}_p \le q^{-n} E_n\left(C^q_{\beta,p}\right)_C \le C^{(1)}_p(1-q)^{-1}, \qquad C^{(1)}_p,\ C^{(2)}_p > 0. \tag{59'}$$

Оскільки послідовність ε_n прямує до нуля при $n \to \infty$, то з урахуванням (59) і (59′) у випадку, коли відомі асимптотичні рівності для величин $E_n\left(L^q_{\beta,p}\right)_s$ і $E_n\left(C^q_{\beta,p}\right)_C$, співвідношення (58) і (58′) дають можливість записати асимптотичні рівності для величин $E_n\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_s$ і $E_n\left(C^{\psi}_{\beta,p}\right)_C$.

На даний час відомі точні значення величин $E_n\left(L^q_{\beta,1}\right)_1$ і $E_n\left(C^q_{\beta,\infty}\right)_C$, $0 < q < 1$, $\beta \in R$ (див., наприклад, [18, 19]).

Теорема B. *Нехай* $0 < q < 1$, $\beta \in R$, $n \in N$. *Тоді*

$$E_n\left(C^q_{\beta,\infty}\right)_C = E_n\left(L^q_{\beta,1}\right)_1 = \frac{1}{\pi} E_n\left(P_{q,\beta}\right)_1 = \left\| P_{q,\beta} * \operatorname{sign}\sin n(\cdot)\right\|_\infty =$$

$$= \frac{4}{\pi}\max_t\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1}\sin\left((2\nu+1)t - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|. \tag{60}$$

Із рівностей (60) випливає

$$E_n\left(C^q_{\beta,\infty}\right)_C = E_n\left(L^q_{\beta,1}\right)_1 = \frac{4}{\pi}\left(q^n + \delta_n\right), \quad |\delta_n| < \frac{q^{3n}}{3(1-q^{2n})}. \tag{61}$$

Співвідношення (51), а також теорема 17 дозволяють записати наступне твердження.

Теорема 18. *Нехай* $\beta \in R$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$. *Тоді при* $n \to \infty$ *мають місце асимптотичні рівності*

$$\left.\begin{matrix} E_n\left(C^\psi_{\beta,\infty}\right)_C & (62) \\ E_n\left(L^\psi_{\beta,1}\right)_1 & (62') \end{matrix}\right\} = \psi(n)\left(\frac{4}{\pi} + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)\right),$$

де ε_n *— та ж, що й у теоремі* 17, $O(1)$ *— рівномірно обмежена величина відносно* n, q, β *і* $\psi(k)$.

Аналізуючи доведення теореми В, наведене у [19, с. 128 – 129], можна переконатися, що рівності (60) залишаються в силі, якщо замість β, що фігурує в означенні класів $C^q_{\beta,\infty}$ і $L^q_{\beta,1}$, та ядра $P_{q,\beta}$ взяти послідовність $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in R$, $k \in N$. Тобто має місце наступна теорема.

Теорема Г. *Нехай* $0 < q < 1$, $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in R$, $k \in N$. *Тоді*

$$E_n\left(C^q_{\bar\beta,\infty}\right)_C = E_n\left(L^q_{\bar\beta,1}\right)_1 = \frac{1}{\pi} E_n\left(P_{q,\bar\beta}\right)_1 = \left\| P_{q,\bar\beta} * \operatorname{sign} \sin n(\cdot)\right\|_\infty =$$

$$= \frac{4}{\pi}\max_t \left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1}\sin\left((2\nu+1)t - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|. \tag{63}$$

Співставляючи теорему 17 і теорему Г, одержуємо наступне твердження.

Теорема 18′. *Нехай* $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in R$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$, $k \in N$. *Тоді при* $n \to \infty$ *мають місце асимптотичні рівності*

$$\left.\begin{matrix} E_n\left(C^\psi_{\bar\beta,\infty}\right)_C & (64) \\ E_n\left(L^\psi_{\bar\beta,1}\right)_1 & (64') \end{matrix}\right\} = \psi(n)\left(\frac{4}{\pi} + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)\right),$$

де ε_n, $O(1)$ *— величини, що мають той же зміст, що й у теоремі* 18.

Зауваження 3. Асимптотичні рівності (64) і (64′) залишаються в силі і у випадку $q = 0$. При цьому як β_k можуть використовуватись послідовності дійсних чисел, тобто у випадку, коли $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\psi(k) > 0$, $\beta_k \in R$, $k \in N$, при $n \to \infty$ мають місце асимптотичні рівності

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{E}_n\left(C^\psi_{\bar\beta,\infty}\right)_C & (65) \\ \mathcal{E}_n\left(L^\psi_{\bar\beta,1}\right)_1 & (65') \end{matrix}\right\} = \frac{4}{\pi}\psi(n) + O(1)\psi(n+1),$$

у яких $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені відносно n, β_k і $\psi(k)$.

Співставляючи співвідношення (48) і (48′) із (62) і (62′), бачимо, що якщо $\psi(k) > 0$ і $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, то верхні межі наближень у метриках C і L, які доставляють суми Фур'є та многочлени найкращих наближень, на класах $C^\psi_{\beta,\infty}$ і $L^\psi_{\beta,1}$ залишаються рівними за порядком, але асимптотично не збігаються. У випадку ж $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\psi(k) > 0$ верхні межі наближень за допомогою сум Фур'є на класах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ і $L^{\psi}_{\beta,1}$ асимптотично збігаються із значеннями верхніх меж найкращих наближень для цих класів у просторах C і L відповідно.

Таким чином, апроксимативні властивості сум Фур'є у порівнянні із поліномами найкращих наближень погіршуються із зменшенням гладкості наближуваних функцій, що виражається у збільшенні значень величин $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathscr{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}\right)_C}{E_n\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}\right)_C}$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathscr{E}_n\left(L^{\psi}_{\beta,1}\right)_1}{E_n\left(L^{\psi}_{\beta,1}\right)_1}$ від 1 до $+\infty$ при зростанні q від 0 до 1.

Повні доведення теорем 11 – 18 містяться у роботі [17].

1. *Колмогоров А. Н.* Zur Grössenordnung des Restliedes Fouriershen Reihen differenzierbaren Funktionen // Ann. Math. – 1935. – **36**. – S. 521 – 526.
2. *Пинкевич В. Т.* О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1940. – **4**, № 5. – С. 521 – 528.
3. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1945. – **15**. – С. 1 – 76.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207 – 256.
5. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **62**. – С. 61 – 97.
6. *Ефимов А. В.* Линейные методы приближения непрерывных периодических функций // Мат. сб. – 1961. – **54**, № 1. – С. 51 – 90.
7. *Ефимов А. В.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 2. – С. 243 – 296.
8. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
9. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\bar{\psi}$-интегралов // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069 – 1113.
10. *Степанец А. И.* Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). I // Там же. – 1998. – **50**, № 2. – С. 274 – 291.
11. *Степанец А. И.* Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). II // Там же. – № 3. – С. 388 – 400.
12. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье дял дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126 – 151.
13. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.
14. *Степанец А. И.* Решение задачи Колмогорова – Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сб. – 2001. – **192**, № 1. – С. 113 – 138.
15. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Неравенства Лебега для интегралов Пуассона // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 6. – С. 798 – 808.
16. *Степанец А. И.* К неравенству Лебега на классах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Там же. – 1989. – **41**, № 4. – С. 499 – 510.
17. *Степанец А. И, Сердюк А. С.* Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Там же. – 2000. – **52**, № 3. – С. 375 – 395.
18. *Бушанский А. В.* О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций // Исследования по теории приближения функций и их приложения. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1978. – С. 29 – 37.
19. *Шевалдин В. Т.* Поперечники классов сверток с ядром Пуассона // Мат. заметки. – 1992. – **51**, № 6. – С. 121 – 136.

Одержано 22.02.2002