УДК 519.21

И. И. Ежов, В. Ф. Каданков (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СИСТЕМА $G|G^{\kappa}|1$ С ГРУППОВЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ ТРЕБОВАНИЙ

For the system $G|G^{\kappa}|1$ with group queueing of requests, we consider distributions of the following characteristics: the duration of busy period, the length of queue in transition and stationary regimes of functioning of the queueing system, the summary queueing time, the outgoing flow of queueing requests, and others.

Для системи обслуговування $G|G^{\kappa}|1$ з груповим обслуговуванням вимог наведено розподіли таких характеристик: довжини періоду зайнятості, довжини черги в перехідному і стаціонарному режимах функціонування системи обслуговування, сумарного часу простою системи обслуговування, вихідного потоку обслугованих вимог та інших.

1. Определение основных случайных процессов. Пусть $\kappa \in N_+ = \{1, 2, \ldots\}$ — положительная целочисленная случайная величина, а $\xi, \eta \in (0, \infty)$ — положительные случайные величины с абсолютно непрерывными функциями распределений

$$F(x) = \mathrm{P}[\eta < x] = \int_0^x f(u)\,du, \qquad G(y) = \mathrm{P}[\xi < y] = \int_0^y g(u)\,du.$$

Будем предполагать, что η, ξ, κ — независимые в совокупности случайные величины с конечными средними значениями.

Рассмотрим последовательности $\{\kappa, \kappa_i'\}$, $\{\eta, \eta_i'\}$, $\{\xi, \xi_i'\}$, $i \in N^+$, независимых и одинаково распределенных (для каждой последовательности) случайных величин и введем последовательные суммы

$$\eta_0 = \xi_0 = \kappa_0 = 0, \qquad \eta_n = \sum_{i=1}^n \eta_i', \qquad \xi_n = \sum_{i=1}^n \xi_i', \qquad \kappa_n = \sum_{i=1}^n \kappa_i'. \tag{1}$$

Для $t \geq 0$ введем случайные процессы:

$$\alpha(t) = \max\{k \geq 0 : \xi_k \leq t\}, \quad \beta(t) = \max\{k \geq 0 : \eta_k \leq t\}, \quad s(t) = \beta(t) - \kappa_{\alpha(t)},$$

$$\xi(t) = t - \xi_{\alpha(t)+1}, \qquad \eta(t) = t - \eta_{\beta(t)+1}, \qquad S_t = \{s(t), \eta(t), \xi(t)\}.$$

Поясним вероятностный смысл введенных процессов:

$\alpha(t)$, $\beta(t) \in N$, $t \geq 0$, — процессы восстановления, порожденные случайными последовательностями $\{\xi_n; n \geq 0\}$, $\{\eta_n; n \geq 0\}$;

$s(t) \in Z = \{0, \pm 1, \ldots\}$, $t \geq 0$, — разность обычного и неординарного процессов восстановления;

$\xi(t)$, $\eta(t) \in R_+$, $t \geq 0$, — возрастающие линейчатые компоненты, дополняющие процессы восстановления $\alpha(t)$, $\beta(t)$ до марковских процессов;

$S_t \in Z \times R_+^2$, $t \geq 0$, — марковский процесс, сопутствующий разности процессов восстановления $s(t)$, $t \geq 0$, с возрастающими линейчатыми компонентами $\xi(t)$, $\eta(t)$.

Введем случайные элементы, порожденные η, ξ, κ и случайными последовательностями (1):

1) σ_k и T_k, $k \geq 0$, — соответственно момент первого достижения уровня $k \geq 0$ случайной последовательностью $\{\kappa_n; n \geq 0\}$ и величина перескока через этот уровень:

$$\sigma_k = \min\{n \geq 0 \colon \kappa_n \geq k\}, \quad T_k = \kappa_{\sigma_k} - k, \quad k \in N; \quad \mathrm{P}[\sigma_0 = T_0 = 0] = 1;$$

совместная производящая функция тройки $\{\sigma_k, T_k; k \geq 0\}$ имеет вид

$$\sum_{k \geq 0} \theta^k \mathrm{M}[t^{\sigma_k} z^{T_k}] = \frac{z}{z-\theta} + \frac{\theta}{z-\theta} \frac{1 - t\mathrm{M}[z^{\kappa}]}{1 - t\mathrm{M}[\theta^{\kappa}]}, \quad |\theta|, |z| \leq 1, \quad t \in [0,1);$$

2) $\zeta^+(s,z)$, $\zeta^+(s)$, ζ^+, $s > 0$, — неотрицательные случайные величины с такими преобразованиями Лапласа:

$$\mathrm{M}[e^{-\lambda\zeta^+(s,z)}] = \frac{E(\lambda,s,z)}{E(0,s,z)}, \quad \mathrm{M}[e^{-\lambda\zeta^+(s)}] = \frac{E(\lambda,s)}{E(0,s)}, \quad \mathrm{M}[e^{-\lambda\zeta^+}] = \frac{E(\lambda,0)}{E(0,0)},$$

где

$$E(\lambda,s,z) = \exp\left\{\sum_{n>0} \frac{1}{n} \mathrm{M}[e^{-\lambda(\eta_{\kappa_n} - \xi_n)} z^{\kappa_n} e^{-s\xi_n}; \eta_{\kappa_n} > \xi_n]\right\}, \quad E(\lambda,s) = E(\lambda,s,1),$$

$$|z| \leq 1, \quad \operatorname{Re}\lambda \geq 0;$$

3) $\zeta^-(s,z)$, $\zeta^-(s)$, ζ^-, $s > 0$, — неотрицательные случайные величины такие, что

$$\mathrm{M}[e^{-\mu\zeta^-(s,z)}] = \frac{F(\mu,s,z)}{F(0,s,z)}, \quad \mathrm{M}[e^{-\mu\zeta^-(s)}] = \frac{F(\mu,s)}{F(0,s)}, \quad \mathrm{M}[e^{-\mu\zeta^-}] = \frac{F(\mu,0)}{F(0,0)},$$

где

$$F(\mu,s,z) = \exp\left\{\sum_{n>0} \frac{1}{n} \mathrm{M}[e^{-\mu(\xi_n - \eta_{\kappa_n})} z^{\kappa_n} e^{-s\eta_{\kappa_n}}; \xi_n > \eta_{\kappa_n}]\right\}, \quad F(\mu,s) = F(\mu,s,1),$$

$$|z| \leq 1, \quad \operatorname{Re}\mu \geq 0.$$

Будем считать, что $\zeta^+(s,z)$, $\zeta^-(s,z)$ не зависят от случайных последовательностей (1). Отметим, что

$$\zeta^+ \doteq \sup_{n \geq 0} \{\eta_{\kappa_n} - \xi_n\}, \quad \zeta^- \doteq \sup_{n \geq 0} \{\xi_n - \eta_{\kappa_n}\},$$

где символ $\doteq$ означает совпадение распределений соответствующих случайных величин. Будем предполагать, что введенные случайные элементы, последовательности, процессы принадлежат основному вероятностному пространству (Ω, F, P).

2. Период занятости. Пусть $(k,x,y) \in N \times R_+^2$ и

$$\tau_k(x,y) = \inf\{t > 0 \colon s(t) < 0 / S_0 = (k,x,y)\}, \quad \tau_k \stackrel{\mathrm{df}}{=} \tau_k(0,0)$$

— момент первого перескока процессом $s(t)$, $t \geq 0$, нулевого уровня.

Процесс $Y_t^{\neq} = S_t$, $0 \leq t < \tau_k(x,y)$, описывает функционирование на интервале $[0, \tau_k(x,y))$ одноканальной системы обслуживания с такими свойствами:

Требования в систему обслуживания поступают по одному, через независимые промежутки времени η_i', одинаково распределенные с η, и становятся в очередь.

В момент поступления первого требования в свободную систему начинается цикл обслуживания. Длительности циклов обслуживания ξ_i' — независимые, одинаково распределенные с ξ промежутки времени. В момент окончания цикла обслуживания t^* систему покидает группа обслуженных требований случайного объема ρ^*, причем если в момент времени t^*-0 в системе находилось $k \in N_+$ требований, то $\rho^* \doteq \min\{k, \kappa\}$. Если в момент t^*+0 в очереди находятся требования, то начинается очередной цикл обслуживания, в противном случае система переходит в свободное состояние и ожидает прихода очередного требования.

Длина очереди в системе предполагается неограниченной, а дисциплина обслуживания — произвольной.

Событие $\{Y_t = (k, x, y)\}$, $(k, x, y) \in N \times R_+^2$, означает, что в момент времени t в системе находится $k+1$ требование, последнее поступление требования в систему произошло в момент $t - x$, текущий цикл обслуживания начался в момент времени $t - y$.

Так введенную систему обслуживания будем обозначать символом $G|G^{\kappa}|1$; индекс κ указывает на тот факт, что требования в системе обслуживаются группами случайного объема κ. В частности, при $\kappa \equiv 1$ получаем классическую систему обслуживания $G|G|1$, в которой требования обслуживаются по одному.

Случайный интервал $[0, \tau_k(x,y))$ назовем периодом занятости системы типа (k,x,y). В частности, интервал $[0,\tau)$, $\tau \doteq \tau_0(0,0)$, — канонический период занятости (в начальный момент времени в свободную систему поступает одно требование и τ — момент ее первого освобождения от требований). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $k \in N$, $s > 0$. *Тогда*

$$M[e^{-s\tau_k}; \tau_k < \infty] = M[e^{-s\xi_{\sigma_k}}; \zeta^+(s) + \eta_{T_k} > \xi_{\sigma_k}].$$

В частности,

$$M[e^{-s\tau}; \tau < \infty] = P[\zeta^+(s) > 0] = 1 - E(0,s)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \tau \doteq \xi_{\chi},$$

где

$$\chi = \inf\{n > 0: \eta_{\kappa_n} - \xi_n > 0\}$$

— момент первого выхода блуждания $\{\eta_{\kappa_n} - \xi_n > 0;\ n > 0\}$ *в положительную полуплоскость и*

$$M[z^{\chi}; \chi < \infty] = 1 - \exp\left\{-\sum_{n>0} \frac{z^n}{n} P[\eta_{\kappa_n} > \xi_n]\right\}, \quad |z| \le 1.$$

Если $M[\xi] < M[\eta\kappa]$, *то*

$$P[\tau_k < \infty] = 1, \quad M[\tau] = M[\xi]M[\chi], \quad M[\chi] = \exp\left\{\sum_{n>0} \frac{1}{n} P[\eta_{\kappa_n} > \xi_n]\right\}.$$

При $M[\xi] > M[\eta\kappa]$

$$P[\tau_{k+1} < \infty] = P[\zeta^+ + \eta_{T_k} > \xi_{\sigma_k}] < 1, \quad k \in N, \quad M[\tau] = \infty.$$

Следствие 1. *Пусть* $\kappa \equiv 1$. *Тогда*

$$\kappa_n = n, \quad \sigma_k = k, \quad T_k = 0, \quad k, n \in N,$$

и

$$\mathrm{M}[e^{-s\tau_k}; \tau_k < \infty] = \mathrm{M}[e^{-s\xi_k}; \zeta^+(s) > \xi_k], \qquad k \in N.$$

***Доказательство теоремы* 1.** Обозначим

$$\varphi_k^s(x,y) = \mathrm{M}[e^{-\tau_k(x,y)}; \tau_k(x,y) < \infty][1-F(x)][1-G(y)], \quad k \in N, \quad x, y \in R_+.$$

Согласно формуле полной вероятности для введенных функций справедливы обратные уравнения Колмогорова за малый интервал времени $\Delta \downarrow 0$;

$$\varphi_k^s(x,y) = \mathrm{M}[e^{-s\Delta}]\Bigg\{\varphi_k^s(x+\Delta, y+\Delta) + \Delta f(x)\varphi_{k+1}^s(\Delta_1, y+\Delta) +$$

$$+ \Delta g(y)\sum_{r=1}^{k}\mathrm{P}[\kappa = r]\varphi_{k-r}^s(x+\Delta, \Delta_2) + \Delta g(y)[1-F(x+\Delta)]\mathrm{P}[\kappa > k]\Bigg\} + o(\Delta),$$

$$\Delta_1, \Delta_2 \in (0, \Delta),$$

где

$$\lim_{\Delta \to 0}\frac{o(\Delta)}{\Delta} = 0.$$

Умножая это уравнение на Δ^{-1} и вычисляя пределы при $\Delta \downarrow 0$, имеем

$$s\varphi_k^s(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\varphi_k^s(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\varphi_k^s(x,y) = g(y)[1-F(x)]\mathrm{P}[\kappa > k] + f(x)\varphi_{k+1}^s(0,y) +$$

$$+ g(y)\sum_{r=1}^{k}\mathrm{P}[\kappa = r]\varphi_{k-r}^s(x,0). \tag{2}$$

Введем обозначения

$$\Phi_\theta^s(\lambda,\mu) = \sum_{k\ge 0}\theta^k\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda x-\mu y}\varphi_k^s(x,y)\,dx\,dy, \qquad R_\theta^s(\lambda) = \sum_{k\ge 0}\theta^k\int_0^\infty e^{-\lambda x}\varphi_k^s(x,0)\,dx,$$

$$Q_\theta^s(\mu) = \sum_{k\ge 0}\theta^k\int_0^\infty e^{-\mu y}\varphi_k^s(0,y)\,dy, \quad s > 0, \quad \operatorname{Re}\lambda, \mu \ge 0, \quad |\theta| \le 1.$$

Переходя в уравнении (2) к преобразованиям Лапласа и производящим функциям, получаем уравнение

$$\Phi_\theta^s(\lambda,\mu)(s-\lambda-\mu) = -R_\theta^s(\lambda)\left(1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[\theta^\kappa]\right) - Q_\theta^s(\mu)\left(1-\frac{1}{\theta}\tilde{f}(\lambda)\right) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(\lambda)Q_0^s(\mu) +$$

$$+ \frac{1-\tilde{f}(\lambda)}{\lambda}\tilde{g}(\mu)\frac{1-\mathrm{M}[\theta^\kappa]}{1-\theta}, \quad s > 0, \quad \operatorname{Re}\lambda, \ \mu \ge 0, \quad |\theta| \le 1, \tag{3}$$

где

$$\tilde{f}(\lambda) = \mathrm{M}[e^{-\lambda\eta}], \qquad \tilde{g}(\mu) = \mathrm{M}[e^{-\mu\xi}].$$

Далее будем предполагать, что для переменных s, λ, μ выполняется равенство

$$s - \lambda - \mu = 0, \qquad s > 0, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda,\ \mu \in [0, s]. \tag{4}$$

С учетом этого равенства уравнение (3) принимает вид

$$\frac{1-\tilde{f}(\lambda)}{\lambda}\tilde{g}(\mu)\frac{1-\mathrm{M}[\theta^{\kappa}]}{1-\theta} = R^{s}_{\theta}(\lambda)\left(1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[\theta^{\kappa}]\right) + Q^{s}_{\theta}(\mu)\left(1-\frac{1}{\theta}\tilde{f}(\lambda)\right) + \frac{1}{\theta}\tilde{f}(\lambda)Q^{s}_{0}(\mu),$$
$$s > 0, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda,\ \mu \in [0, s], \qquad |\theta| \le 1. \tag{5}$$

Полагая в этом равенстве $\theta = \tilde{f}(\lambda)$, имеем

$$\frac{1}{\lambda}\tilde{g}(\mu)\left(1-\mathrm{M}[e^{-\lambda\eta_{\kappa}}]\right) = R^{s}_{\tilde{f}(\lambda)}(\lambda)\left(1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[e^{-\lambda\eta_{\kappa}}]\right) + Q^{s}_{0}(\mu). \tag{6}$$

Поскольку для переменных λ, μ выполняется равенство (4), то справедливо факторизационное разложение

$$\left(1-\mathrm{M}[e^{-\lambda\eta_{\kappa}-\mu\xi}]\right)^{-1} = \exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{M}[e^{-\lambda\eta_{\kappa_n}-\mu\xi_n}e^{-s\xi_n}]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{M}[e^{-\lambda(\eta_{\kappa_n}-\xi_n)}e^{-s\xi_n}; \eta_{\kappa_n} > \xi_n]\right\}\exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{M}[e^{-\mu(\xi_n-\eta_{\kappa_n})}e^{-s\eta_{\kappa_n}}; \xi_n > \eta_{\kappa_n}]\right\} =$$

$$= E(\lambda, s)F(\mu, s), \qquad s > 0, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda,\ \mu \in [0, s]. \tag{7}$$

С учетом этого разложения равенство (6) принимает вид

$$\frac{1}{\lambda}\left[E(\lambda, s)^{-1} - (1-\tilde{g}(\mu))F(\mu, s)\right] = R^{s}_{\tilde{f}(\lambda)}(\lambda)E(\lambda, s)^{-1} + Q^{s}_{0}(\mu)F(\mu, s),$$
$$s > 0, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda,\ \mu \in [0, s]. \tag{8}$$

Пусть функции $A(x)$, $x \in R$, таковы, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}|A(x)|dx < \infty, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda = 0.$$

Введем проекторы для преобразований Лапласа от этих функций

$$I^{+}_{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda x}A(x)dx\right] = \int_{0}^{\infty}e^{-\lambda x}A(x)dx, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda \ge 0,$$
$$I^{+}_{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda x}A(x)dx\right] = \int_{-\infty}^{0}e^{-\lambda x}A(x)dx, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda \le 0. \tag{9}$$

Проверим, что

$$I^{+}_{\lambda}\left[\frac{1}{\lambda}(1-\tilde{g}(\mu))F(\mu, s)\right] = \frac{1}{\lambda}(1-\tilde{g}(s))F(s, s) = \frac{1}{\lambda}E(0, s)^{-1}.$$

Тогда из (8) после стандартных факторизационных рассуждений следует равенство

$$R^s_{\tilde f(\lambda)}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left\{1 - \mathrm{M}[e^{-\lambda\zeta^+(s)}]\right\}. \tag{10}$$

Равенство (10) понадобится в дальнейшем.

Введем обозначения

$$A_\theta(\lambda,\mu) = \left\{\left(1-\frac{1}{\theta}\tilde f(\lambda)\right)\left(1-\tilde g(\mu)\mathrm{M}[\theta^\kappa]\right)\right\}^{-1},\ A(\lambda,\mu) = \left(1-\tilde g(\mu)\mathrm{M}[e^{-\lambda\eta_\kappa}]\right)^{-1},\ |\theta| = 1,$$

$$a^0_\theta(\lambda,\mu) = \sum_{k\ge 0}\theta^k \mathrm{M}[e^{-\mu\xi_{\sigma_k}} e^{-\lambda\eta_{\tau_k}}],\quad a_\theta(\lambda,\mu) = a^0_\theta(\lambda,\mu)-1,\quad \mathrm{Re}\,\lambda,\mu \ge 0,\quad |\theta|\le 1.$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма. *Справедливы равенства*

$$A_\theta(\lambda,\mu) = A(\lambda,\mu)a^0_\theta(\lambda,\mu) + A(\lambda,\mu)\frac{\tilde f(\lambda)/\theta}{1-\tilde f(\lambda)/\theta},\quad |\theta| = 1,\quad \mathrm{Re}\,\lambda,\mu \ge 0,$$

$$\left(1-\tilde g(\mu)\mathrm{M}[\theta^\kappa]\right)^{-1} = A(\lambda,\mu)\left\{a^0_\theta(\lambda,\mu) - \frac{1}{\theta}\tilde f(\lambda)a_\theta(\lambda,\mu)\right\},\quad |\theta|\le 1,\quad \mathrm{Re}\,\lambda,\mu \ge 0.$$

Доказательство леммы в случае, когда $\eta,\xi\in N^+$, приведено в [1] и естественным образом переносится на случай, когда $\eta,\xi\in(0,\infty)$.

Продолжим анализ рассматриваемых уравнений. Умножая уравнение (5) на $A_\theta(\lambda,\mu)$, находим

$$\frac{1}{1-\theta}\frac{1-\tilde f(\lambda)}{\lambda}\left[\frac{1}{1-\tilde f(\lambda)/\theta} - (1-\tilde g(\mu))A_\theta(\lambda,\mu)\right] = \frac{R^s_\theta(\lambda)}{1-\tilde f(\lambda)/\theta} +$$

$$+\frac{Q^s_\theta(\mu)}{1-\tilde g(\mu)\mathrm{M}[\theta^\kappa]} + \frac{1}{\theta}\tilde f(\lambda)Q^s_0(\mu)A_\theta(\lambda,\mu),\quad s>0,\quad \mathrm{Re}\,\lambda,\ \mu\in[0,s],\quad |\theta| = 1.$$

Это равенство — суть равенство рядов Лорана по переменной θ. Приравнивая правильные части рядов, находящихся в левой и правой частях этого уравнения, и используя при этом первое равенство в утверждении леммы, получаем уравнение

$$\frac{1}{\lambda}\frac{1}{1-\theta} - \frac{1}{1-\theta}(1-\tilde g(\mu))A(\lambda,\mu)a_\theta(\lambda,\mu)\frac{1-\tilde f(\lambda)}{\lambda} - \frac{1}{1-\theta}(1-\tilde g(\mu))A(\lambda,\mu)a_\theta(\lambda,\mu) =$$

$$= C^s_\theta(\lambda) + \frac{Q^s_\theta(\mu)}{1-\tilde g(\mu)\mathrm{M}[\theta^\kappa]} + \frac{1}{\theta}\tilde f(\lambda)a_\theta(\lambda,\mu)Q^s_0(\mu),\quad s>0,\quad \mathrm{Re}\,\lambda,\ \mu\in[0,s],\quad |\theta|\le 1, \tag{11}$$

где

$$C^s_\theta(\lambda) = \frac{R^s_\theta(\lambda) - \tilde f(\lambda)R^s_{\tilde f(\lambda)}(\lambda)/\theta}{1-\tilde f(\lambda)/\theta}. \tag{12}$$

Умножая уравнение (6) на $-a^0_\theta(\lambda,\mu)A(\lambda,\mu)$, прибавляя полученное равенство к уравнению (11) и используя при этом (10) и второе равенство в утверждении леммы, имеем

$$\frac{1}{\lambda}\left\{\sum_{k\ge0}\theta^k \mathrm{M}\left[e^{-\mu\xi_{\sigma_k}}\right]-a_\theta^0(\lambda,\mu)\mathrm{M}\left[e^{-\lambda\zeta^+(s)}\right]\right\} = C_\theta^s(\lambda)+\frac{Q_\theta^s(\mu)-Q_0^s(\mu)}{1-\tilde g(\mu)\mathrm{M}[\theta^\kappa]} \qquad (13)$$

$$\left(s-\lambda-\mu=0,\quad s>0,\quad \operatorname{Re}\lambda,\mu\in[0,s],\quad |\theta|\le1\right).$$

Далее,

$$I_\lambda^+\left[\frac{1}{\lambda}\sum_{k\ge0}\theta^k\mathrm{M}\left[e^{-\mu\xi_{\sigma_k}}\right]\right] = \frac{1}{\lambda}\sum_{k\ge0}\theta^k\mathrm{M}\left[e^{-s\xi_{\sigma_k}}\right],$$

$$I_\lambda^+\left[a_\theta^0(\lambda,\mu)\mathrm{M}\left[e^{-\lambda\zeta^+(s)}\right]\right] = \frac{1}{\lambda}\sum_{k\ge0}\theta^k\mathrm{M}\left[e^{-s\xi_{\sigma_k}};\ \zeta^+(s)+\eta_{T_k}\le\xi_{\sigma_k}\right]+$$

$$+\frac{1}{\lambda}\sum_{k\ge0}\theta^k\mathrm{M}\left[e^{-\lambda(\zeta^+(s)+\eta_{T_k}-\xi_{\sigma_k})}e^{-s\xi_{\sigma_k}};\ \zeta^+(s)+\eta_{T_k}>\xi_{\sigma_k}\right],\quad |\theta|\le1,\quad \operatorname{Re}\lambda\ge0.$$

После стандартных факторизационных рассуждений из уравнения (13) получаем

$$C_\theta^s(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k\ge0}\theta^k\mathrm{M}\left[\left(1-e^{-\lambda(\zeta^+(s)+\eta_{T_k}-\xi_{\sigma_k})}\right)e^{-s\xi_{\sigma_k}};\ \zeta^+(s)+\eta_{T_k}>\xi_{\sigma_k}\right]. \qquad (14)$$

Умножая обе части этого равенства на λ и устремляя $\lambda\to\infty$, находим

$$C_\theta^s = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda C_\theta^s(\lambda) = \sum_{k\ge0}\theta^k\mathrm{M}\left[e^{-s\xi_{\sigma_k}};\ \zeta^+(s)+\eta_{T_k}>\xi_{\sigma_k}\right]. \qquad (15)$$

Но поскольку из равенства (12) следует, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda C_\theta^s(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda R_\theta^s(\lambda) = \sum_{k\ge0}\theta^k\varphi_k^s(0,0) = \sum_{k\ge0}\theta^k\mathrm{M}\left[e^{-s\tau_k};\ \tau_k<\infty\right],$$

то равенство (15) и завершает доказательство теоремы 1.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ в свободную систему поступает требование и $[0,\tau]$ — канонический период занятости; h — число требований, поступивших в систему обслуживания на интервале $[0,\tau]$; d — число требований, обслуженных системой на интервале $[0,\tau]$; ε — величина простоя системы после канонического периода занятости; $\gamma=-s(\tau+0)$ — величина перескока процесса $s(t)$, $t\ge0$, через нулевой уровень.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $s>0$, $|z|,|u|\le1$, $\operatorname{Re}\omega\ge0$. *Тогда*

$$\mathrm{M}\left[e^{-s\tau}z^du^\gamma;\ \tau<\infty\right] =$$

$$= zF(0,s,z)\sum_{k\ge0}z^k\mathrm{M}\left[u^{\kappa-k};\ \kappa>k\right]\mathrm{M}\left[e^{-s(\xi+\zeta^-(s,z))};\ \eta_k\le\xi+\zeta^-(s,z))<\eta_{k+1}\right]. \qquad (16)$$

$$\mathrm{M}\left[e^{-s\tau}z^{d+\gamma};\ \tau<\infty\right] = z\left[1-E(0,s,z)^{-1}\right] \quad\Rightarrow\quad \tau\doteq\xi_\chi,\quad d+\gamma\doteq1+\kappa_\chi. \qquad (17)$$

$$\mathrm{M}\left[e^{-s\tau}z^d;\ \tau<\infty\right] =$$

$$= F(0,s,z)\sum_{k\ge0}z^{k+1}\mathrm{P}[\kappa>k]\,\mathrm{M}\left[e^{-s(\xi+\zeta^-(s,z))};\ \eta_k\le\xi+\zeta^-(s,z))<\eta_{k+1}\right]. \qquad (18)$$

$$h \doteq d, \qquad \tau+\varepsilon \doteq \eta_d,$$

$$\mathrm{M}\left[e^{-s(\tau+\varepsilon)}z^d;\ \tau<\infty\right] =$$

$$= F(0,s,z)\sum_{k\geq 0} z^{k+1}\mathrm{P}[\kappa>k]\,\mathrm{M}\left[e^{-s\eta_{k+1}};\ \eta_k \leq \xi+\zeta^-(s,z))<\eta_{k+1}\right], \qquad (19)$$

$$\mathrm{M}\left[e^{-s(\tau+\varepsilon)}e^{-\omega\varepsilon};\ \tau<\infty\right] =$$

$$= F(0,s)\sum_{k\geq 0}\mathrm{P}[\kappa>k]\,\mathrm{M}\left[e^{-\omega(\eta_{k+1}-\xi+\zeta^-(s))}e^{-s\eta_{k+1}};\ \eta_k\leq\xi+\zeta^-(s))<\eta_{k+1}\right]. \quad (20)$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{P}[Y_0^{\varepsilon}=(k,x,y)]=1$ и $d_k(x,y)$ — число требований, обслуженных системой на интервале $[0,\tau_k(x,y)]$, $\gamma_k(x,y)=-s(\tau_k(x,y)+0)$. Обозначим

$$D_k^s(x,y,z,u) = \mathrm{M}\left[e^{-s\tau_k(x,y)}z^{d_k(x,y)}u^{\gamma_k(x,y)},\ \tau_k(x,y)<\infty\right], \quad |z|,|u|\leq 1, \quad s>0.$$

Согласно формуле полной вероятности для введенных функций справедливо следующее уравнение за малый промежуток времени $\Delta\downarrow 0$:

$$D_k^s(x,y,z,u) = (1-\Delta s)\left\{\frac{1-G(y+\Delta)}{1-G(y)}\frac{1-F(x+\Delta)}{1-F(x)}D_k^s(x+\Delta,y+\Delta,z,u)+\right.$$

$$+\Delta\frac{f(x)}{1-F(x)}\frac{1-G(y+\Delta)}{1-G(y)}D_{k+1}^s(\Delta_1,y+\Delta,z,u)+$$

$$+\Delta\frac{g(y)}{1-G(y)}\frac{1-F(x+\Delta)}{1-F(x)}\sum_{r=1}^{k}z^r\,\mathrm{P}[\kappa=k]D_{k-r}^s(x+\Delta,\Delta_2,z,u)+$$

$$\left.+\Delta\frac{g(y)}{1-G(y)}\frac{1-F(x+\Delta)}{1-F(x)}z^{k+1}\mathrm{M}[u^{\kappa-k};\ \kappa>k]\right\}+o(\Delta), \qquad \Delta_1,\Delta_2\in(0,\Delta).$$

Переходя в этом равенстве к пределам при $\Delta\downarrow 0$, для функций

$$\hat{D}_k^s(x,y,z,u) = D_k^s(x,y,z,u)[1-F(x)][1-G(y)]$$

получаем уравнение

$$s\hat{D}_k^s(x,y,z,u)-\frac{\partial}{\partial x}\hat{D}_k^s(x,y,z,u)-\frac{\partial}{\partial y}\hat{D}_k^s(x,y,z,u) = f(x)D_{k+1}^s(0,y,z,u)+$$

$$+g(y)\sum_{r=1}^{k}z^r\mathrm{P}[\kappa=k]\,\hat{D}_{k-r}^s(x,0,z,u)+z^{k+1}g(y)[1-F(x)]\,\mathrm{M}[u^{\kappa-k};\ \kappa>k]. \quad (21)$$

Введем обозначения

$$\hat{D}_\theta^s(\lambda,\mu,z,u) = \sum_{k\geq 0}\theta^k\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda x-\mu y}\hat{D}_k^s(x,y,z,u)\,dx\,dy,$$

$$R_\theta^s(\lambda,z,u) = \sum_{k\geq 0}\theta^k\int_0^\infty e^{-\lambda x}\hat{D}_k^s(x,0,z,u)\,dx,$$

$$Q_{\theta}^{s}(\mu, z, u) = \sum_{k\geq 0}\theta^{k}\int_{0}^{\infty} e^{-\mu y}\hat{D}_{k}^{s}(0, y, z, u)dy.$$

Переходя в равенстве (21) к преобразованиям Лапласа и производящим функциям, для введенных функций получаем уравнение

$$\tilde{D}_{\theta}^{s}(\lambda, \mu, z, u)(s-\lambda-\mu) = -R_{\theta}^{s}(\lambda, z, u)(1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[(\theta z)^{\kappa}]) -$$

$$-Q_{\theta}^{s}(\mu, z, u)\left(1-\frac{1}{\theta}\tilde{f}(\lambda)\right) - Q_{0}^{s}(\mu, z, u)\frac{1}{\theta}\tilde{f}(\lambda) + z\frac{1-\tilde{f}(\lambda)}{\lambda}\tilde{g}(\mu)\frac{\mathrm{M}[u^{\kappa}]-\mathrm{M}[(\theta z)^{\kappa}]}{1-\theta z/u}, \quad (22)$$

$$s>0, \quad |\theta|, |u|, |z| \leq 1, \quad \operatorname{Re}\lambda, \mu \geq 0.$$

Далее будем предполагать, что $\theta = \tilde{f}(\lambda)$ и для переменных s, λ, μ выполняется равенство

$$s-\lambda-\mu = 0, \quad s>0, \quad \operatorname{Re}\lambda, \mu \in [0, s]. \quad (23)$$

С учетом этого равенства уравнение (22) принимает вид

$$R_{\tilde{f}(\lambda)}^{s}(\lambda, z, u)\left(1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[(z\tilde{f}(\lambda))^{\kappa}]\right) + Q_{0}^{s}(\mu, z, u) =$$

$$= z\frac{1-\tilde{f}(\lambda)}{\lambda}\tilde{g}(\mu)\frac{\mathrm{M}[u^{\kappa}]-\mathrm{M}[(z\tilde{f}(\lambda))^{\kappa}]}{1-z\tilde{f}(\lambda)/u}, \quad \operatorname{Re}\lambda, \mu \in [0, s]. \quad (24)$$

В силу равенства (23) справедливо факторизационное разложение

$$\left(1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[(z\tilde{f}(\lambda))^{\kappa}]\right)^{-1} = E(\lambda, s, z)F(\mu, s, z), \quad s>0, \quad \operatorname{Re}\lambda, \mu \in [0, s]. \quad (25)$$

Используя это разложение, из равенства (24) получаем

$$R_{\tilde{f}(\lambda)}^{s}(\lambda, z, u)E^{-1}(\lambda, s, z) + Q_{0}^{s}(\mu, z, u)F(\mu, s, z) =$$

$$= z\frac{1-\tilde{f}(\lambda)}{\lambda}\frac{1}{1-z\tilde{f}(\lambda)/u}E^{-1}(\lambda,s,z) - z\frac{1-\tilde{f}(\lambda)}{\lambda}\frac{1}{1-z\tilde{f}(\lambda)/u}\left(1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[u^{\kappa}]\right)F(\mu,s,z),$$

$$s>0, \quad \operatorname{Re}\lambda, \mu \in [0, s]. \quad (26)$$

Проверяем, что

$$I_{\lambda}^{+}\left[\frac{1-\tilde{f}(\lambda)}{\lambda}\frac{1}{1-z\tilde{f}(\lambda)/u}\left(1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[u^{\kappa}]\right)F(\mu,s,z)\right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda}F(0,s,z)\sum_{k\geq 0}\left(\frac{z}{u}\right)^{k}\mathrm{M}\left[e^{-\lambda[\eta_k-\zeta^{-}(s,z)]}e^{-s\zeta^{-}(s,z)}; \eta_k > \zeta^{-}(s,z)\right] -$$

$$-\frac{1}{\lambda}F(0,s,z)\sum_{k\geq 0}\left(\frac{z}{u}\right)^{k}\mathrm{M}\left[e^{-\lambda[\eta_{k+1}-\zeta^{-}(s,z)]}e^{-s\zeta^{-}(s,z)}; \eta_{k+1} > \zeta^{-}(s,z)\right] -$$

$$- \frac{1}{\lambda} F(0,s,z) \mathrm{M}[u^{\kappa}] \sum_{k \ge 0} \left(\frac{z}{u}\right)^k \mathrm{M}\left[e^{-\lambda[\eta_k - \xi - \zeta^-(s,z)]} e^{-s[\xi+\zeta^-(s,z)]};\, \eta_k > \xi + \zeta^-(s,z)\right] +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} F(0,s,z) \mathrm{M}[u^{\kappa}] \sum_{k \ge 0} \left(\frac{z}{u}\right)^k \mathrm{M}\left[e^{-\lambda[\eta_{k+1} - \xi - \zeta^-(s,z)]} e^{-s[\xi+\zeta^-(s,z)]};\, \eta_{k+1} > \xi + \zeta^-(s,z)\right] +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} F(0,s,z) \sum_{k \ge 0} \left(\frac{z}{u}\right)^k \mathrm{M}\left[e^{-s\zeta^-(s,z)};\, \eta_k \le \zeta^-(s,z) < \eta_{k+1}\right] -$$

$$- \frac{1}{\lambda} F(0,s,z) \sum_{k \ge 0} \left(\frac{z}{u}\right)^k \mathrm{M}\left[u^{\kappa} e^{-s[\xi+\zeta^-(s)]};\, \eta_k \le \xi + \zeta^-(s,z) < \eta_{k+1}\right] \overset{\mathrm{df}}{=} I_1(\lambda).$$

Проводя стандартные факторизационные рассуждения, из (26) получаем

$$R^s_{\tilde f(\lambda)}(\lambda, z, u) E^{-1}(\lambda, s, z) = z \frac{1 - \tilde f(\lambda)}{\lambda} \frac{E^{-1}(\lambda, s, z)}{1 - z\tilde f(\lambda)/u} - z I_1(\lambda), \quad \operatorname{Re}\lambda \ge 0, \quad s > 0.$$

Умножая это уравнение на λ и вычисляя пределы при $\lambda \to \infty$, имеем

$$\mathrm{M}[e^{-s\tau} z^d u^{\gamma};\, \tau < \infty] = z - zF(0,s,z) \sum_{k \ge 0} \left(\frac{z}{u}\right)^k \mathrm{M}\left[e^{-s\zeta^-(s,z)};\, \eta_k \le \zeta^-(s,z) < \eta_{k+1}\right] +$$

$$+ zF(0,s,z) \sum_{k \ge 0} z^k \mathrm{M}[u^{\kappa}] \mathrm{M}\left[e^{-s[\xi+\zeta^-(s,z)]};\, \eta_k \le \xi + \zeta^-(s,z) < \eta_{k+1}\right]. \tag{27}$$

Выделяя в правой части этого равенства степенной ряд по переменной u с положительными показателями степеней, находим

$$\mathrm{M}[e^{-s\tau} z^d u^{\gamma};\, \tau < \infty] =$$

$$= zF(0,s,z) \sum_{k \ge 0} z^k \mathrm{M}[u^{\kappa - k};\, \kappa > k] \mathrm{M}\left[e^{-s[\xi+\zeta^-(s,z)]};\, \eta_k \le \xi + \zeta^-(s,z) < \eta_{k+1}\right], \tag{28}$$

$$s > 0, \quad |z|,\, |u| \le 1.$$

Полагая в равенстве (27) $u = z$, получаем

$$\mathrm{M}[e^{-s\tau} z^{d+\gamma};\, \tau < \infty] = z - z(1 - \tilde g(s)\mathrm{M}[z^{\kappa}]) F(s,s,z) = z[1 - E(0,s,z)^{-1}]. \tag{29}$$

Из этого равенства следует, что

$$\tau \doteq \xi_{\chi}, \quad d + \gamma \doteq \kappa_{\chi} + 1,$$

где

$$\chi = \inf\{n > 0:\, \eta_{\kappa_n} > \xi_n\}, \quad \mathrm{M}[z^{\chi}, \xi < \infty] = 1 - \exp\left\{-\sum_{n>0} \frac{z^n}{n} \mathrm{P}[\eta_{\kappa_n} > \xi_n]\right\}.$$

Полагая в (28) $u = 1$, находим

$$\mathrm{M}[e^{-s\tau} z^d;\, \tau < \infty] =$$

$$= F(0,s,z) \sum_{k \ge 0} z^{k+1} \mathrm{M}[\kappa > k] \mathrm{M}\left[e^{-s[\xi+\zeta^-(s)]};\, \eta_k \le \xi + \zeta^-(s,z) < \eta_{k+1}\right]. \tag{30}$$

Поскольку число обслуженных требований на интервале $[0,\tau]$ равно числу поступивших требований на этом интервале, то $h \doteq d$. Поступление последнего требования на интервале $[0,\tau]$ произошло в момент времени $t=\eta_{h-1}$, поэтому $\tau \in (\eta_{d-1}, \eta_d)$ и для величины простоя системы обслуживания ε после канонического периода занятости справедливо стохастическое равенство

$$\tau + \varepsilon \doteq \eta_d. \tag{31}$$

Из этого соотношения и (30) следуют равенства

$$\mathrm{M}[e^{-s(\tau+\varepsilon)} z^d;\ \tau<\infty] = \mathrm{M}[(z\tilde f(s))^d;\ \tau<\infty] =$$

$$= F(0,0,z\tilde f(s)) \sum_{k\ge 0} z^{k+1} \mathrm{P}[\kappa>k]\, \mathrm{M}\left[e^{-s\eta_{k+1}};\ \eta_k \le \xi + \zeta^-(0,z\tilde f(s)) < \eta_{k+1}\right].$$

Далее,

$$F(\mu,0,z\tilde f(s)) = F(\mu,s,z) \Rightarrow \zeta^-(0,z\tilde f(s)) \doteq \zeta^-(s,z),$$

и поэтому предыдущее равенство принимает вид

$$\mathrm{M}[e^{-s(\tau+\varepsilon)} z^d;\ \tau<\infty] =$$

$$= F(0,s,z) \sum_{k\ge 0} z^{k+1} \mathrm{P}[\kappa>k]\, \mathrm{M}\left[e^{-s\eta_{k+1}};\ \eta_k \le \xi + \zeta^-(s,z) < \eta_{k+1}\right]. \tag{32}$$

Из (30), (31) следует равенство

$$\mathrm{M}[e^{-s(\tau+\varepsilon)} e^{-\omega\varepsilon};\ \tau<\infty] = \mathrm{M}[e^{-\omega\tau} f(s+\omega)^d;\ \tau<\infty] =$$

$$= F(0,-\omega,\tilde f(s+\omega)) \sum_{k\ge 0} \mathrm{P}[\kappa>k] \times$$

$$\times\ \mathrm{M}\left[e^{-\omega[\eta_{k+1}-\xi-\zeta^-(-\omega,\tilde f(s+\omega))]} e^{-s\eta_{k+1}};\ \eta_k \le \xi + \zeta^-(-\omega,\tilde f(s+\omega)) < \eta_{k+1}\right].$$

Поскольку

$$F(0,-\omega,\tilde f(s+\omega)) = F(\mu,s) \Rightarrow \zeta^-(-\omega,\tilde f(s+\omega)) \doteq \zeta^-(s),$$

предыдущее равенство окончательно принимает вид

$$\mathrm{M}[e^{-s(\tau+\varepsilon)} e^{-\omega\varepsilon};\ \tau<\infty] =$$

$$= F(0,s) \sum_{k\ge 0} \mathrm{P}[\kappa>k]\, \mathrm{M}\left[e^{-\omega(\eta_{k+1}-\xi-\zeta^-(s))} e^{-s\eta_{k+1}};\ \eta_k \le \xi + \zeta^-(s) < \eta_{k+1}\right]. \tag{33}$$

Теорема доказана.

3. Длина очереди. Введем случайный процесс $Y_t \in N \times R_+^2 \cup R_+$, $t \ge 0$, $Y_0 \doteq (0,0,0)$, посредством стохастического рекуррентного соотношения

$$Y_t = \begin{cases} Y_t^{*}, & 0 \le t < \tau; \\ \tau+\varepsilon-t, & \tau \le t < \tau+\varepsilon; \\ Y_{t-(\tau+\varepsilon)}, & t \ge \tau+\varepsilon. \end{cases}$$

Так введенный процесс описывает функционирование системы обслуживания $G|G^{\kappa}|1$ для всех $t \geq 0$. Событие $\{Y_t = (k, x, y)\}$, $k \in N$, $x, y \in R_+$, означает, что в момент времени t в системе находится $k+1$ требование; последнее поступление требования произошло в момент времени $t - x$, последний обслуживающий цикл произошел в момент времени $t - y$. Событие $\{Y_t = x\}$, $x \in R_+$, означает, что в момент времени t система свободна от требований и очередное поступление требования произойдет в момент $t + x$. В частности, событие $B_t = \{Y_t \in N \times R_+^2\}$ означает, что в момент времени t система находится в занятом состоянии, а событие $A_t = \{Y_t \in R_+\}$ означает, что в момент времени t система свободна от требований. Таким образом,

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} [l(t,\omega), \xi(t,\omega), \eta(t,\omega)], & \omega \in B_t; \\ \hat{\varepsilon}(t,\omega), & \omega \in A_t, \end{cases}$$

где $l(t) \in N^+$ — длина очереди в системе обслуживания в момент времени t; $\eta(t)$ — время, прошедшее с момента последнего поступления требования в систему; $\xi(t)$ — время, прошедшее с момента окончания последнего обслуживающего цикла; $\hat{\varepsilon}(t)$ — время, через которое в свободную систему поступит очередное требование. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть в начальный момент времени* $t = 0$ *в свободную систему поступает требование и* ν_s *— показательно распределенная случайная величина с параметром* $s > 0$: $\mathrm{P}[\nu_s > t] = \exp\{-st\}$, $t \geq 0$. *Тогда*

$$\mathrm{P}[l(\nu_s) = r+1, \tau > \nu_s] = s\mathrm{M}[\xi] F(0,s) \mathrm{M}\left[e^{-s(\hat{\xi} + \zeta^-(s))}; \eta_r \leq \hat{\xi} + \zeta^-(s) < \eta_{r+1}\right], \quad r \in N,$$

$$\mathrm{P}[l(\nu_s) = r+1] = s\mathrm{M}[\xi] \mathrm{M}\left[e^{-s(\hat{\xi} + \zeta^-(s))}; \eta_r \leq \hat{\xi} + \zeta^-(s) < \eta_{r+1}\right] c^{-1}(s), \quad r \in N,$$

$$\mathrm{P}[A_{\nu_s}] = 1 - [1 - \tilde{g}(s)] \frac{F(s,s)}{F(0,s)} c^{-1}(s), \qquad \mathrm{P}[B_{\nu_s}] = [1 - \tilde{g}(s)] \frac{F(s,s)}{F(0,s)} c^{-1}(s),$$

где

$$\mathrm{P}[\hat{\xi} < y] = \frac{1}{\mathrm{M}[\xi]} \int_0^y \mathrm{P}[\xi > u] du, \qquad \mathrm{P}[\hat{\kappa} = k] = \frac{1}{\mathrm{M}[\kappa]} \mathrm{P}[\kappa > k],$$

$$c(s) = \mathrm{M}[\kappa][1 - \tilde{f}(s)] \mathrm{M}\left[e^{-s\eta_{\hat{\kappa}}}; \xi + \zeta^-(s) > \eta_{\hat{\kappa}}\right].$$

Следствие 2. *Пусть загрузка системы* $\rho = \dfrac{\mathrm{M}[\xi]}{\mathrm{M}[\eta\kappa]} < 1$. *Тогда существует*

$$l = \lim_{t \to \infty} l(t)$$

и

$$\mathrm{P}[l = r+1] = \rho \mathrm{P}[\eta_r \leq \hat{\xi} + \zeta^- < \eta_{r+1}] c^{-1}, \qquad r \in N,$$

$$\mathrm{P}[A] = 1 - \rho c^{-1}, \qquad \mathrm{P}[B] = \rho c^{-1},$$

где

$$c = \mathrm{P}[\xi+\zeta^- > \eta_{\hat{\kappa}}],$$

$\mathrm{P}[A]$ $(\mathrm{P}[B])$ — *вероятность застать систему в стационарном режиме свободной (занятой).*

Следствие 3. *Пусть* $\kappa \equiv 1$ *и в начальный момент времени* $t=0$ *в классическую систему* $G|G|1$, *находящуюся в свободном состоянии, поступает требование. Тогда*

$$\mathrm{P}[\hat{\kappa}=0] = 1, \qquad c(s) = 1-\tilde{f}(s), \qquad \rho = \frac{\mathrm{M}[\xi]}{\mathrm{M}[\eta]}$$

и

$$\mathrm{P}[l(\nu_s)=r+1] = \frac{s\mathrm{M}[\xi]}{1-\tilde{f}(s)}\mathrm{M}\Big[e^{-s(\hat{\xi}+\zeta^-(s))}; \eta_r \le \hat{\xi}+\zeta^-(s) < \eta_{r+1}\Big], \qquad r \in N,$$

$$\mathrm{P}[A_{\nu_s}] = 1 - \frac{1-\tilde{g}(s)}{1-\tilde{f}(s)}\frac{F(s,s)}{F(0,s)}, \qquad \mathrm{P}[B_{\nu_s}] = \frac{1-\tilde{g}(s)}{1-\tilde{f}(s)}\frac{F(s,s)}{F(0,s)}.$$

При $\rho<1$ *существует* $l = \lim_{t\to\infty} l(t)$ *и*

$$\mathrm{P}[l=r+1] = \rho\mathrm{P}[\eta_r \le \hat{\xi}+\zeta^- < \eta_{r+1}], \qquad r \in N,$$

$$\mathrm{P}[A] = 1-\rho, \qquad \mathrm{P}[B] = \rho,$$

где

$$\zeta^- \doteq \sup_{n\ge 0}\{\xi_n - \eta_n\}.$$

Доказательство теоремы 3. Пусть $d(t)$ — число требований, обслуженных системой на интервале $[0,t]$, $\mathrm{P}[Y_0^{\#}=(k,x,y)] = 1$, $k\in N$, $x,y\in R_+$, и обозначим

$$L_k^t(x,y,z) = \mathrm{M}[z^{d(t)}; l(t)=r+1, \tau_k(x,y)>t][1-F(x)][1-G(y)], \qquad |z|\le 1.$$

Согласно формуле полной вероятности, для введенных функций справедливы обратные уравнения Колмогорова за малый промежуток времени $\Delta\downarrow 0$:

$$L_k^{t+\Delta}(x,y,z) = L_k^t(x+\Delta, y+\Delta, z) + \Delta g(y)\sum_{r=1}^{k} z^r \mathrm{P}[\kappa=r] L_{k-r}^t(x+\Delta,\Delta_1,z) +$$

$$+ \Delta f(x) L_{k+1}^t(\Delta_2, y+\Delta, z) + o(\Delta), \qquad \Delta_1,\Delta_2 \in (0,\Delta).$$

Стандартным образом из этого уравнения получаем дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial t}L_k^t(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial x}L_k^t(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y}L_k^t(x,y,z) =$$

$$= f(x)L_{k+1}^t(0,y,z) + g(y)\sum_{r=1}^{k} z^r\mathrm{P}[\kappa=r]L_{k-r}^t(x,0,z), \qquad |z|\le 1, \tag{34}$$

с начальным условием

$$L_k^0(x,y,z) = [1-F(x)][1-G(y)]\delta_{kr},$$

где δ_{kr} — символ Кронекера.

Введем обозначения

$$\tilde{L}_\theta^s(\lambda,\mu,z) = \sum_{k\ge 0}\theta^k \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda x-\mu y-st} L_k^t(x,y,z)\,dx\,dy\,dt,$$

$$R_\theta^s(\lambda,z) = \sum_{k\ge 0}\theta^k \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda x-st} L_k^t(x,0,z)\,dx\,dt = \lim_{\mu\to\infty}\mu\tilde{L}_\theta^s(\lambda,\mu,z),$$

$$Q_\theta^s(\lambda,z) = \sum_{k\ge 0}\theta^k \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\mu y-st} L_k^t(0,y,z)\,dy\,dt = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\tilde{L}_\theta^s(\lambda,\mu,z),$$

$$s>0, \quad |\theta|, |z|\le 1, \quad \operatorname{Re}\lambda,\mu\ge 0.$$

Переходя в (34) к преобразованиям Лапласа и производящим функциям и используя начальное условие, для введенных функций получаем уравнение

$$\tilde{L}_\theta^s(\lambda,\mu,z)(s-\lambda-\mu) = \theta^r\frac{1-\tilde{f}(\lambda)}{\lambda}\frac{1-\tilde{g}(\mu)}{\mu} - R_\theta^s(\lambda,z)(1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[(z\theta)^\kappa]) -$$

$$- Q_\theta^s(\lambda,z)\left(1-\frac{1}{\theta}\tilde{f}(\lambda)\right) - Q_0^s(\lambda,z)\frac{1}{\theta}\tilde{f}(\lambda), \quad s>0, \quad |\theta|, |z|\le 1, \quad \operatorname{Re}\lambda,\mu\ge 0. \tag{35}$$

Далее будем предполагать, что $\theta=\tilde{f}(\lambda)$ и для переменных s, λ, μ выполняется равенство (23). Используя равенство (23) и факторизационное разложение (25), из уравнения (34) получаем

$$R_{\tilde{f}(\lambda)}^s(\lambda,z)E(\lambda,s,z)^{-1} + Q_0^s(\lambda,z)F(\mu,s,z) =$$

$$= \tilde{f}(\lambda)^r\frac{1-\tilde{f}(\lambda)}{\lambda}\mathrm{M}[\xi]F(0,s,z)\,\mathrm{M}[e^{-\mu(\hat{\xi}+\zeta^-(s,z))}]. \tag{36}$$

Проверяем, что

$$I_\lambda^+\left[\tilde{f}(\lambda)^r\frac{1-\tilde{f}(\lambda)}{\lambda}\mathrm{M}[e^{-\mu(\hat{\xi}+\zeta^-(s,z))}]\right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\mathrm{M}\left[e^{-\lambda(\eta_r-\hat{\xi}-\zeta^-(s,z))}e^{-s(\hat{\xi}+\zeta^-(s,z))};\ \hat{\xi}+\zeta^-(s,z)<\eta_r\right] -$$

$$-\frac{1}{\lambda}\mathrm{M}\left[e^{-\lambda(\eta_{r+1}-\hat{\xi}-\zeta^-(s,z))}e^{-s(\hat{\xi}+\zeta^-(s,z))};\ \hat{\xi}+\zeta^-(s,z)<\eta_{r+1}\right] +$$

$$+\frac{1}{\lambda}\mathrm{M}\left[e^{-s(\hat{\xi}+\zeta^-(s,z))};\ \eta_r\le\hat{\xi}+\zeta^-(s,z)<\eta_{r+1}\right] = I_2(\lambda).$$

После стандартных факторизационных рассуждений из (36) находим

$$R_{\tilde{f}(\lambda)}^s(\lambda,z)E(\lambda,s,z)^{-1} = \mathrm{M}[\xi]F(0,s,z)I_2(\lambda).$$

Умножая последнее равенство на λ и вычисляя пределы при $\lambda\to\infty$, находим

$$\mathrm{M}[z^{d(\nu_s)};\ l(\nu_s) = r+1,\ \tau > \nu_s] =$$

$$= s\mathrm{M}[\xi]F(0,s,z)\,\mathrm{M}\left[e^{-s(\hat{\xi}+\zeta^-(s,z))};\ \eta_r \le \hat{\xi} + \zeta^-(s,z) < \eta_{r+1}\right], \quad r \in N. \tag{37}$$

В частности,

$$\mathrm{M}[z^{d(\nu_s)};\ \tau > \nu_s] = (1-\tilde{g}(s))F(s,s,z). \tag{38}$$

Пусть $h(t)$, $t \ge 0$, — число требований, поступивших в систему на интервале $[0,t]$. Очевидно, что

$$h(t) = l(t) + d(t),$$

поэтому

$$\mathrm{M}[z^{d(\nu_s)};\ l(\nu_s) = r+1,\ \tau > \nu_s] =$$

$$= sz^{r+1}\mathrm{M}[\xi]F(0,s,z)\mathrm{M}\left[e^{-s(\hat{\xi}+\zeta^-(s,z))};\ \eta_r \le \hat{\xi} + \zeta^-(s,z) < \eta_{r+1}\right], \quad r \in N. \tag{39}$$

Согласно формуле полной вероятности справедливы уравнения

$$\mathrm{M}[z^{d(\nu_s)};\ l(\nu_s) = r+1,\ B_{\nu_s}] = \mathrm{M}[z^{d(\nu_s)};\ l(\nu_s) = r+1,\ \tau > \nu_s] +$$

$$+ \mathrm{M}[e^{-s(\tau+\varepsilon)}z^d;\ \tau < \infty]\mathrm{M}[z^{d(\nu_s)};\ l(\nu_s) = r+1,\ B_{\nu_s}], \quad r \in N,$$

$$\mathrm{M}[z^{d(\nu_s)};\ A_{\nu_s}] = \mathrm{M}[z^d; \tau \le \nu_s < \tau+\varepsilon] + \mathrm{M}[e^{-s(\tau+\varepsilon)}z^d; \tau < \infty]\mathrm{M}[z^{d(\nu_s)}; A_{\nu_s}]. \tag{40}$$

Из первого равенства в (40) находим

$$\mathrm{M}[z^{d(\nu_s)};\ l(\nu_s) = r+1,\ B_{\nu_s}] =$$

$$= \mathrm{M}[z^{d(\nu_s)}; l(\nu_s) = r+1, \tau > \nu_s]\left(1 - \mathrm{M}[e^{-s(\tau+\varepsilon)}z^d; \tau < \infty]\right)^{-1}. \tag{41}$$

Используя (19) и факторизационное разложение (25), нетрудно получить равенство

$$\mathrm{M}[e^{-s(\tau+\varepsilon)}z^d; \tau < \infty] = 1 - F(0,s,z)[1 - z\tilde{f}(s)]\mathrm{M}[\kappa]\mathrm{M}\left[e^{-s\eta_{\hat{\kappa}}}z^{\hat{\kappa}}; \xi + \zeta^-(s,z) > \eta_{\hat{\kappa}}\right].$$

Учитывая это равенство и (37), из (41) имеем

$$\mathrm{M}[z^{d(\nu_s)};\ l(\nu_s) = r+1,\ B_{\nu_s}] =$$

$$= s\mathrm{M}[\xi]\mathrm{M}\left[e^{-s(\hat{\xi}+\zeta^-(s,z))}; \eta_r \le \hat{\xi} + \zeta^-(s,z) < \eta_{r+1}\right]c^{-1}(s,z), \quad r \in N,$$

где

$$c(s,z) = [1 - z\tilde{f}(s)]\mathrm{M}[\kappa]\mathrm{M}\left[e^{-s\eta_{\hat{\kappa}}}z^{\hat{\kappa}}; \xi + \zeta^-(s,z) > \eta_{\hat{\kappa}}\right].$$

В частности,

$$\mathrm{M}[z^{d(\nu_s)}; B_{\nu_s}] = [1 - \tilde{g}(s)]\mathrm{M}[e^{-s\zeta^-(s,z)}]c^{-1}(s,z),$$

$$\mathrm{P}[l(\nu_s)=r+1,\ B_{\nu_s}] = s\mathrm{M}[\xi]\,\mathrm{M}\left[e^{-s(\hat{\xi}+\zeta^-(s,z))};\ \eta_r \le \hat{\xi}+\zeta^-(s)<\eta_{r+1}\right]c^{-1}(s),$$

$$\mathrm{P}[B_{\nu_s}] = [1-\tilde{g}(s)]\,\frac{F(s,s)}{F(0,s)}\,c^{-1}(s),$$

где

$$c(s) = c(s,1) = \mathrm{M}[\kappa][1-\tilde{f}(s)]\,\mathrm{M}\left[e^{-s\eta_{\hat{\kappa}}};\xi+\zeta^-(s)>\eta_{\hat{\kappa}}\right].$$

Из второго уравнения в (40) находим

$$\mathrm{M}[z^{d(\nu_s)};\ A_{\nu_s}] =$$

$$= \Big(\mathrm{M}[e^{-s\tau}z^d;\ \tau<\infty]-\mathrm{M}[e^{-s(\tau+\varepsilon)}z^d;\ \tau<\infty]\Big)\Big(1-\mathrm{M}[e^{-s(\tau+\varepsilon)}z^d;\ \tau<\infty]\Big)^{-1} =$$

$$= 1-\Big(1-\mathrm{M}[e^{-s\tau}z^d;\ \tau<\infty]\Big)\Big(1-\mathrm{M}[e^{-s(\tau+\varepsilon)}z^d;\ \tau<\infty]\Big)^{-1}. \qquad (42)$$

Используя (18) и факторизационное разложение (25), нетрудно получить равенство

$$\mathrm{M}[z^{-s\tau}z^d;\ \tau<\infty] = 1-[1-\tilde{g}(s)]\,F(s,s,z)-$$

$$-(1-z)\,\mathrm{M}[\kappa]\,F(0,s,z)\,\mathrm{M}\left[z^{\hat{\kappa}}e^{-s(\xi+\zeta^-(s,z))};\ \xi+\zeta^-(s,z)>\eta_{\hat{\kappa}}\right].$$

Учитывая это равенство, из (42) находим

$$\mathrm{M}[z^{d(\nu_s)};\ A_{\nu_s}] = 1-[1-\tilde{g}(s)]\,\frac{F(s,s)}{F(0,s)}c^{-1}(s,z)-$$

$$-(1-z)\,\mathrm{M}[\kappa]\,\mathrm{M}\left[z^{\hat{\kappa}}e^{-s(\xi+\zeta^-(s,z))};\ \xi+\zeta^-(s,z)>\eta_{\hat{\kappa}}\right]c^{-1}(s,z).$$

В частности,

$$\mathrm{P}[A_{\nu_s}] = 1-[1-\tilde{g}(s)]\,\frac{F(s,s)}{F(0,s)}c^{-1}(s).$$

Теорема доказана.

Отметим, что попутно мы нашли распределение потока обслуженных требований $d(t),\ t\ge 0$.

4. Поток обслуженных требований и суммарное время простоя. В предыдущем пункте в процессе доказательства теоремы 3 мы получили распределения выходящего потока обслуженных требований $d(t),\ t\ge 0$. Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть в начальный момент времени* $t=0$ *в свободную систему поступает требование и* $d(t),\ t\ge 0$, *— число требований, обслуженных системой на интервале* $[0,t]$, $d=d(\tau)$. *Тогда*

$$\mathrm{M}\left[z^{d(\nu_s)};\ l(\nu_s)=r+1,\ \tau>\nu_s\right] =$$

$$= s\mathrm{M}[\xi]\,F(0,s,z)\,\mathrm{M}\left[z^{-s(\hat{\xi}+\zeta^-(s,z))};\ \eta_r\le\hat{\xi}+\zeta^-(s,z)<\eta_{r+1}\right],\quad r\in N,$$

$$\mathrm{M}\left[z^{d(\nu_s)};\ \tau > \nu_s\right] = [1-\tilde{g}(s)]\,F(s,s,z),$$

$$\mathrm{M}[z^{-s\tau}z^{d};\tau<\infty] =$$

$$= F(0,s,z)\sum_{k\geq 0} z^{k+1}P[\kappa>k]\,\mathrm{M}\left[e^{-s(\xi-\zeta^{-}(s,z))};\ \eta_k\leq \xi+\zeta^{-}(s,z)<\eta_{k+1}\right],$$

$$\mathrm{M}\left[z^{d(\nu_s)};\ l(\nu_s)=r+1,\ B_{\nu_s}\right] =$$

$$= s\mathrm{M}[\xi]\,\mathrm{M}\left[z^{-s(\hat{\xi}+\zeta^{-}(s,z))};\ \eta_r\leq \hat{\xi}+\zeta^{-}(s,z)<\eta_{r+1}\right]c^{-1}(s,z), \qquad r\in N,$$

$$\mathrm{M}\left[z^{d(\nu_s)};\ B_{\nu_s}\right] = [1-g(s)]\frac{F(s,s,z)}{F(0,s,z)}c^{-1}(s,z),$$

$$\mathrm{M}\left[z^{d(\nu_s)};\ A_{\nu_s}\right] = 1-(1-\tilde{g}(s))\frac{F(s,s,z)}{F(0,s,z)}c^{-1}(s,z)-$$

$$-(1-z)\,\mathrm{M}[\kappa]\,\mathrm{M}\left[z^{\hat{\kappa}}e^{-s(\xi+\zeta^{-}(s,z))};\ \xi+\zeta^{-}(s,z)>\eta_{\hat{\kappa}}\right]c^{-1}(s,z),$$

$$\mathrm{M}\left[z^{d(\nu_s)}\right] = 1-(1-z)\,\mathrm{M}[\kappa]\,\mathrm{M}\left[z^{\hat{\kappa}}e^{-s(\xi+\zeta^{-}(s,z))};\ \xi+\zeta^{-}(s,z)>\eta_{\hat{\kappa}}\right]c^{-1}(s,z),$$

где

$$c(s,z) = [1-z\tilde{f}(s)]\,\mathrm{M}[\kappa]\,\mathrm{M}\left[e^{-s\eta_{\hat{\kappa}}};\ \xi+\zeta^{-}(s)>\eta_{\hat{\kappa}}\right].$$

Замечание. Используя формулу (39), аналогичные равенства можно привести для входящего потока требований $h(t)$.

Через $\varepsilon(t)$ обозначим суммарное время простоя системы обслуживания на интервале $[0,t]$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть в начальный момент времени $t=0$ в свободную систему поступает требование и $\varepsilon(t)$, $t\geq 0$, — суммарное время простоя системы обслуживания на интервале $[0,t]$. Тогда*

$$\mathrm{M}[e^{-\omega\varepsilon(\nu_s)};B_{\nu_s}] = \frac{E(s+\omega,s)}{E(0,s)}(1-b(s,\omega))^{-1},$$

$$\mathrm{M}[e^{-\omega\varepsilon(\nu_s)};A_{\nu_s}] = \frac{s}{s+\omega}\left\{1-\frac{E(s+\omega,s)}{E(0,s)}(1-b(s,\omega))^{-1}\right\},$$

$$\mathrm{M}[e^{-\omega\varepsilon(\nu_s)}] = \frac{s}{s+\omega}+\frac{\omega}{s+\omega}\frac{E(s+\omega,s)}{E(0,s)}(1-b(s,\omega))^{-1}, \quad s>0, \quad \operatorname{Re}\omega\geq 0,$$

где

$$b(s,\omega) = \mathrm{M}[\kappa][1-\tilde{f}(s+\omega)]E(s+\omega,s)F(0,s)\mathrm{M}[e^{-\omega(\eta_{\hat{\kappa}}-\xi-\zeta^{-}(s))}e^{-s\eta_{\hat{\kappa}}};\xi+\zeta^{-}(s)<\eta_{\hat{\kappa}}].$$

Следствие 4. *Пусть $\kappa\equiv 1$ и в начальный момент времени $t=0$ в классическую систему $G|G|1$ поступает требование. Тогда*

$$\mathrm{P}[\hat{\kappa}=0]=1, \qquad b(s,\omega)\equiv 0$$

и

$$\mathrm{M}[e^{-\omega\varepsilon(\nu_s)}; B_{\nu_s}] = \frac{E(s+\omega, s)}{E(0,s)}, \qquad \mathrm{M}[e^{-\omega\varepsilon(\nu_s)}; A_{\nu_s}] = \frac{s}{s+\omega}\left\{1 - \frac{E(s+\omega, s)}{E(0,s)}\right\},$$

$$\mathrm{M}[e^{-\omega\varepsilon(\nu_s)}] = \frac{s}{s+\omega} + \frac{\omega}{s+\omega}\frac{E(s+\omega, s)}{E(0,s)}, \quad s > 0, \quad \operatorname{Re}\omega \ge 0,$$

где

$$E(\lambda, s) = \exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{M}\left[e^{-\lambda(\eta_n - \xi_n)}e^{-s\xi_n};\ \eta_n > \xi_n\right]\right\}, \quad \operatorname{Re}\lambda \ge 0.$$

Доказательство теоремы 5. Согласно формуле полной вероятности справедливы уравнения

$$\mathrm{M}[e^{-\omega\varepsilon(\nu_s)}; B_{\nu_s}] = \mathrm{P}[\tau > \nu_s] + \mathrm{M}[e^{-s(\tau+\varepsilon)}e^{-\omega\varepsilon};\ \tau < \infty]\mathrm{M}[e^{-\omega\varepsilon(\nu_s)}; B_{\nu_s}],$$

$$\mathrm{M}[e^{-\omega\varepsilon(\nu_s)}; A_{\nu_s}] = s\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{M}[e^{-\omega(t-\tau)};\ \tau < t < \tau+\varepsilon] +$$

$$+ \mathrm{M}[e^{-s(\tau+\varepsilon)}e^{-\omega\varepsilon};\ \tau < \infty]\mathrm{M}[e^{-\omega\varepsilon(\nu_s)}; A_{\nu_s}]. \tag{43}$$

Из первого уравнения в (43) находим

$$\mathrm{M}[e^{-\omega\varepsilon(\nu_s)}; A_{\nu_s}] = \mathrm{P}[\tau > \nu_s]\left(1 - \mathrm{M}[e^{-s(\tau+\varepsilon)}e^{-\omega\varepsilon};\ \tau < \infty]\right)^{-1}.$$

Используя (20) и факторизационное разложение (25), нетрудно получить

$$\mathrm{M}[e^{-s(\tau+\varepsilon)}e^{-\omega\varepsilon};\ \tau < \infty] = 1 - E(s+\omega, s)^{-1} +$$

$$+ \mathrm{M}[\kappa][1 - \tilde{f}(s+\omega)]F(0,s)\,\mathrm{M}[e^{-\omega(\eta_{\dot\kappa} - \xi - \zeta^-(s))}e^{-s\eta_{\dot\kappa}};\ \xi + \zeta^-(s) < \eta_{\dot\kappa}] =$$

$$= 1 - E^{-1}(s+\omega, s)(1 - b(s,\omega)), \quad s > 0, \quad \operatorname{Re}\omega \ge 0.$$

Из (17) (при $z = 1$) следует

$$\mathrm{P}[\tau > \nu_s] = 1 - \mathrm{M}[e^{-s\tau};\ \tau < \infty] = E(0,s)^{-1}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{M}[e^{-\omega\varepsilon(\nu_s)}; B_{\nu_s}] = \frac{E(s+\omega, s)}{E(0,s)}(1 - b(s,\omega))^{-1}, \quad s > 0, \quad \operatorname{Re}\omega \ge 0. \tag{44}$$

Из второго уравнения в (43) находим

$$\mathrm{M}[e^{-\omega\varepsilon(\nu_s)}; A_{\nu_s}] = \frac{s}{s+\omega}\left(\mathrm{M}[e^{-s\tau}z^d;\ \tau < \infty] - \mathrm{M}[e^{-s(\tau+\varepsilon)}e^{-\omega\varepsilon};\ \tau < \infty]\right) \times$$

$$\times\left(1 - \mathrm{M}[e^{-s(\tau+\varepsilon)}e^{-\omega\varepsilon};\ \tau < \infty]\right)^{-1} = \frac{s}{s+\omega}\left\{1 - \frac{E(s+\omega, s)}{E(0,s)}(1 - b(s,\omega))^{-1}\right\},$$

$$s > 0, \qquad \operatorname{Re}\omega \ge 0. \tag{45}$$

Складывая равенства (44), (45), получаем

$$\mathrm{M}[e^{-\omega\varepsilon(\nu_s)}] = \frac{s}{s+\omega} + \frac{\omega}{s+\omega}\frac{E(s+\omega,s)}{E(0,s)}(1-b(s,\omega))^{-1}, \quad s > 0, \quad \mathrm{Re}\,\omega \ge 0.$$

Теорема 5 доказана.

В работе [2] для анализа системы $G^{\kappa}|G|1$ с групповым поступлением требований использовались прямые уравнения Колмогорова. В данной статье для исследования системы $G|G^{\kappa}|1$ с групповым обслуживанием требований применяются обратные уравнения Колмогорова. Использовать обратные уравнения для анализа систем обслуживания общего вида предложил И. И. Ежов в работе [3]. Один из функционалов (период занятости) другими методами изучался в [4].

1. *Ежов И. И., Каданков В. Ф.* О распределении максимума разности независимых процессов восстановления с дискретным временем // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 10. – С. 1426 – 1432.
2. *Ежов И. И., Каданков В. Ф.* Основные вероятностные характеристики системы обслуживания $G^{\kappa}|G|1$ // Там же. – 2001. – **53**, № 10. – С. 1343 – 1357.
3. *Ежов И. И.* О распределении длины очереди в классической системе $G|G|1$ с дискретным временем // Докл. РАН России. – 1993. – **332**, № 4. – С. 408 – 410.
4. *Братійчук Н. С., Пірджанов Б.* Період зайнятості системи обслуговування $GI|G|1$ // Допов. АН України. – 1991. – № 9. – С. 48 – 51.

Получено 10.04.2001