УДК 517.5

А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ),
С. О. Чайченко (Слов'ян. пед. ун-т)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЛІНІЙНИМ МЕТОДОМ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

On classes of convolutions of analytic functions in uniform and integral metrics, we find asymptotic equations for the least upper bounds of deviations of trigonometric polynomials generated by certain linear approximation method of a special form.

Найдены асимптотические равенства для точных верхних граней отклонений тригонометрических полиномов, порождаемых линейным методом приближения специального вида, на классах сверток аналитических функций в равномерной и интегральной метриках.

Нехай L_p, $1 \le p < \infty$, — простір 2π-періодичних сумовних у p-му степені на періоді функцій f, норма у якому визначається формулою

$$\|f\|_{L_p} = \|f\|_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p};$$

L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій f з нормою

$$\|f\|_{L_\infty} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|;$$

C — простір неперервних 2π-періодичних функцій f, норма в якому задається рівністю

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Нехай, далі, $f \in L_1$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \overset{\text{df}}{=} \sum_{k=0}^\infty A_k(f; x)$$

— її ряд Фур'є. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \beta\frac{\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \beta\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos\beta\frac{\pi}{2}}{\psi(k)} A_k(f; x) - \frac{\sin\beta\frac{\pi}{2}}{\psi(k)} \tilde{A}_k(f; x),$$

$$\tilde{A}_k(f; x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx,$$

де $\psi = \psi(k)$ — фіксована послідовність дійсних чисел, $\beta \in \mathbb{R}$, є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її називають (ψ, β)-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають f_β^ψ. Множину усіх функцій з L_1, що мають (ψ, β)-похідні, позначають через L_β^ψ. Якщо $f \in L_\beta^\psi$ і, крім того, $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з $L_1^0 = \{f : f \in L_1,\ f \perp 1\}$, то пишуть $f \in L_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Крім того, вважають, що $C^{\psi}_{\beta} = C \cap L^{\psi}_{\beta}$, $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} = C \cap L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. У рамках даної роботи роль $\mathfrak{N}$ відіграватимуть множини

$$U^0_p = \left\{\varphi \in L^0_p : \|\varphi\|_p \le 1\right\}, \quad 1 \le p \le \infty.$$

При цьому покладатимемо $L^{\psi}_{\beta}U^0_p = L^{\psi}_{\beta,p}$ $\left(C^{\psi}_{\beta}U^0_p = C^{\psi}_{\beta,p}\right)$. Класифікацію 2π-періодичних функцій за допомогою (ψ, β)-похідних запропонував О. І. Степанець (див., наприклад, [1, с. 131]).

В [1, с. 135] показано, що у випадку, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $\Psi_{\beta}(t)$, функції $f(x)$ з множини L^{ψ}_{β} майже при всіх x можуть бути подані у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{\psi}_{\beta}(x-t)\,\Psi_{\beta}(t)\,dt. \tag{1}$$

У даній роботі будемо вважати, що послідовності $\psi(k) > 0$, $k \in \mathbb{N}$, і задовольняють умову

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \quad q \in [0; 1). \tag{2}$$

Множину таких послідовностей будемо позначати через $\mathcal{D}_q$ [2]. У цьому випадку елементами множин C^{ψ}_{β} є 2π-періодичні функції $f(x)$, які можна регулярно продовжити у смугу $|\operatorname{Im} z| \le \ln 1/q$ комплексної площини (див. [1, с. 289]).

Важливим прикладом ядер, послідовності коефіцієнтів $\psi(k)$ яких належать множині $\mathcal{D}_q$, є ядра Пуассона:

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad q \in (0; 1), \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

У цьому випадку (коли $\psi(k) = q^k$, $k \in \mathbb{N}$, $q \in (0; 1)$) для зручності покладають $L^{\psi}_{\beta,p} = L^{q}_{\beta,p}$ $\left(C^{\psi}_{\beta,p} = C^{q}_{\beta,p}\right)$.

Кожній функції f із класу $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ поставимо у відповідність тригонометричні поліноми $U^*_{n-1}(f;\, x) = U^*_{n-1}(\psi;\, \beta;\, f;\, x)$ вигляду

$$U^*_{n-1}(f;\, x) =$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\lambda^{(n)}_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \nu^{(n)}_k (a_k \sin kx - b_k \cos kx)\right\}, \tag{4}$$

де $a_k = a_k(f^{\psi}_{\beta})$, $b_k = b_k(f^{\psi}_{\beta})$, $k = 1, 2, \ldots,$ — коефіцієнти Фур'є функції f^{ψ}_{β}, а числа $\lambda^{(n)}_k = \lambda^{(n)}_k(\psi;\, \beta)$ і $\nu^{(n)}_k = \nu^{(n)}_k(\psi;\, \beta)$, $k = 1, \ldots, n-1$, $n \in \mathbb{N}$, означаються рівностями

$$\lambda_k^{(n)} = \big(\psi(k) - \psi(2n-k) - \psi(2n+k)\big)\cos\frac{\beta\pi}{2},$$

$$k = \overline{1, n-1}.$$

$$\nu_k^{(n)} = \big(\psi(k) - \psi(2n-k) + \psi(2n+k)\big)\sin\frac{\beta\pi}{2},$$

Поліноми (4) задають лінійний метод наближення, що визначається системами чисел $\lambda_k^{(n)}$ і $\nu_k^{(n)}$, $k = 1, \ldots, n-1$, $n \in \mathbb{N}$. Цей метод було запроваджено у [3]. У роботах [3, 4] досліджувались апроксимативні властивості вказаного методу на класах $(\psi; \beta)$-диференційовних функцій. Зокрема, у [4] знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень поліномів $U_{n-1}^*(f; x)$ на класах інтегралів Пуассона $L_{\beta,p}^q$, $1 \le p \le \infty$, у рівномірній та інтегральній метриках.

У даній роботі встановлено асимптотичні при $n \to \infty$ рівності величин

$$\mathcal{E}\Big(L_{\beta,p}^{\psi}; U_{n-1}^*\Big)_C = \sup_{f \in L_{\beta,p}^{\psi}} \Big\| f(x) - U_{n-1}^*(f; x)\Big\|_C, \tag{5}$$

$$\mathcal{E}\Big(L_{\beta,1}^{\psi}; U_{n-1}^*\Big)_{L_s} = \sup_{f \in L_{\beta,1}^{\psi}} \Big\| f(x) - U_{n-1}^*(f; x)\Big\|_s \tag{6}$$

для довільних $1 \le p,\ s \le \infty$, $\psi \in \mathcal{D}_q$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Зазначимо, що при встановленні асимптотичних рівностей для величин (5), (6) будуть використані результати роботи [4].

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\Big(C_{\beta,p}^{\psi}; U_{n-1}^*\Big)_C = \psi(n)\left(\frac{2^{1/p}\,\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+1/p'}} M_{q,p'} + \right.$$

$$\left. + \ O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p)}} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \tag{7}$$

де

$$M_{q,p'} = \frac{1-q^2}{2}\left\|\frac{1}{1-2q\cos t + q^2}\right\|_{p'}, \tag{8}$$

$$\sigma(p) = \begin{cases} 1, & p = \infty, \\ 2, & 1 \le p < \infty, \end{cases} \qquad \varepsilon_n = \sup_{k \ge n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|, \tag{9}$$

$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, *а* $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена по* n, q, ψ, p *і* β.

Доведення. Нехай $\psi \in \mathcal{D}_q$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді згідно з лемою 2 з роботи [3, с. 302] для будь-якої функції $f \in L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset L_1$, майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ має місце зображення

$$f(x) - U_{n-1}^*(f;\,x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x-t)\cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\Psi_n^*(t)\,dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x-t)\,\Psi_{n,\beta}^*(t)\,dt, \tag{10}$$

у якому

$$\Psi_n^*(t) \overset{\text{df}}{=} \frac{\psi(n)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\psi(n+k)\cos kt$$

і

$$\Psi_{n,\beta}^*(t) \overset{\text{df}}{=} \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k+2n)\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

а функція φ майже скрізь збігається з f_β^ψ.

Зрозуміло, що якщо $f \in C_{\beta,p}^\psi$, то рівність (10) виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$. Покажемо, що для будь-якої послідовності $\psi \in \mathcal{D}_q$ і $n \in \mathbb{N}$ виконуються співвідношення

$$\Psi_n^*(t) = \psi(n)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt + r_{q,n}^*(t)\right), \tag{11}$$

$$\left|r_{q,n}^*(t)\right| \le \frac{\varepsilon_n}{(1-q)(1-q-\varepsilon_n)}, \tag{12}$$

$$\Psi_{n,\beta}^*(t) = \psi(3n)\left(q^{-n}\sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) + r_{q,\beta,n}^*(t)\right), \tag{13}$$

$$\left|r_{q,\beta,n}^*(t)\right| \le \frac{\varepsilon_{3n}}{(1-q)(1-q-\varepsilon_{3n})},$$

де величина ε_n визначається формулою (9). Для цього використаємо міркування, що застосовувались при доведенні леми 1 з роботи [2].

Виконуючи елементарні перетворення, знаходимо

$$\Psi_n^*(t) = \psi(n)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(n+k)}{\psi(n)}\cos kt\right) =$$

$$= \psi(n)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\psi(n+j+1)}{\psi(n+j)}\cos kt\right) =$$

$$= \psi(n)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt + r_{q,n}^*(t)\right), \tag{14}$$

де

$$r_{q,n}^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\psi(n+j+1)}{\psi(n+j)} - q^k\right]\cos kt.$$

Переконаємось у справедливості оцінки (12). Очевидно, що

$$\left| r^*_{q,n}(t) \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left| \tilde{q}_k - q^k \right|, \qquad \tilde{q}_k \stackrel{\text{df}}{=} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\psi(n+j+1)}{\psi(n+j)}. \tag{15}$$

Якщо, наприклад, $\tilde{q}_k - q^k \ge 0$, то

$$\left| \tilde{q}_k - q^k \right| = \tilde{q}_k - q^k \le \prod_{j=0}^{k-1} (q + \varepsilon_n) - q^k = (q+\varepsilon_n)^k - q^k.$$

Якщо ж $\tilde{q}_k - q^k < 0$, то внаслідок опуклості функції t^k, $k = 1, 2, \ldots$,

$$\left| \tilde{q}_k - q^k \right| = q^k - \tilde{q}_k \le q^k - \prod_{j=0}^{k-1} (q - \varepsilon_n) =$$

$$= q^k - (q - \varepsilon_n)^k \le (q + \varepsilon_n)^k - q^k.$$

Отже, завжди

$$\left| \tilde{q}_k - q^k \right| \le (q + \varepsilon_n)^k - q^k. \tag{16}$$

Оскільки послідовність ε_n монотонно спадає до нуля, то починаючи з деякого номера n_0 буде виконуватись нерівність $\varepsilon_n < 1 - q$. Отже, враховуючи співвідношення (15) і (16), для $n \ge n_0$ отримуємо

$$\left| r^*_{q,n}(t) \right| \le \sum_{i=1}^{\infty} (q+\varepsilon_n)^k - q^k = \frac{\varepsilon_n}{(1-q)(1-q-\varepsilon_n)},$$

і оцінку (12) доведено. Співвідношення (13) є наслідком леми 1 з роботи [2].

Рівності (11) і (13) разом з очевидною оцінкою

$$\frac{\varepsilon_n}{(1-q)(1-q-\varepsilon_n)} = O(1) \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}$$

дозволяють переписати зображення (10) у вигляді

$$f(x) - U^*_{n-1}(f; x) = \frac{2\,\psi(n)}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x-t) \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2} \right) \mathcal{P}_q(t)\, dt -$$

$$- \frac{\psi(3n)}{\pi q^n} \int_0^{2\pi} \varphi(x-t) \mathcal{P}_{q,\beta,n}(t)\, dt + O(1) \frac{\psi(n)\, \varepsilon_n}{(1-q)^2}, \tag{17}$$

де

$$\mathcal{P}_q(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt, \qquad \mathcal{P}_{q,\beta,n}(t) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2} \right).$$

Звідси, внаслідок інваріантності множини U_p^0 відносно зсуву аргументу, для довільного $1 \le p \le \infty$ маємо

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,p}; U^*_{n-1} \right)_C = \frac{2\psi(n)}{\pi} \sup_{\varphi \in U_p^0} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2} \right) \mathcal{P}_q(t)\, dt +$$

$$+ O(1) \left(\frac{\psi(3n)}{\pi q^n} \sup_{\varphi \in U_p^0} \left\| \int_0^{2\pi} \varphi(x-t) \mathcal{P}_{q,\beta,n}(t)\, dt \right\|_C + \frac{\psi(n)\, \varepsilon_n}{(1-q)^2} \right). \tag{18}$$

Для завершення доведення теореми 1 залишилось скористатися результатами роботи [4, с. 978 – 980], згідно з якими

$$\sup_{\varphi\in U_p^0}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)\,dt = \inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)-\lambda\right\|_{p'} =$$

$$= \frac{\|\cos t\|_{p'}}{(2\pi)^{1/p'}}\left\|\mathcal{P}_q(t)\right\|_{p'} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p)}}, \tag{19}$$

де

$$\sigma(p) = \begin{cases} 1, & p=\infty, \\ 2, & 1\le p<\infty, \end{cases}$$

і

$$\sup_{\varphi\in U_p^0}\left\|\int_0^{2\pi}\varphi(x-t)\,\mathcal{P}_{q,\beta,n}(t)\,dt\right\|_C = O(1)\frac{q^n}{1-q}.$$

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай* $1\le p\le\infty$, $\psi\in\mathcal{D}_q$, $0<q<1$, $\beta\in\mathbb{R}$ *і* $n\in\mathbb{N}$. *Тоді при* $n\to\infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,1}^{\psi};\,U_{n-1}^{*}\right)_{L_p} = \psi(n)\left(\frac{2^{1-1/p}\,\|\cos t\|_p}{\pi^{1+1/p}}M_{q,p} + \right.$$

$$\left. + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p')}}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \tag{20}$$

де $M_{q,p}$, $\sigma(p)$ *та* ε_n *визначаються за допомогою формул* (8) *та* (9), *а величина* $O(1)$ *рівномірно обмежена по* n, q, ψ, p *і* β.

Доведення. Виходячи із зображення (17), для довільного $1\le p\le\infty$ можемо записати рівність

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,1}^{\psi};\,U_{n-1}^{*}\right)_{L_p} = \frac{2\,\psi(n)}{\pi}\sup_{\varphi\in U_1^0}\left\|\int_0^{2\pi}\varphi(x-t)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)\,dt\right\|_p +$$

$$+ O(1)\left(\frac{\psi(3n)}{\pi q^n}\sup_{\varphi\in U_1^0}\left\|\int_0^{2\pi}\varphi(x-t)\,\mathcal{P}_{q,\beta,n}(t)\,dt\right\|_p + \frac{\psi(n)\,\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right). \tag{21}$$

Використовуючи далі результати роботи [4, с. 981, 982], згідно з якими

$$\sup_{\varphi\in U_1^0}\left\|\int_0^{2\pi}\varphi(x-t)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)\,dt\right\|_p =$$

$$= \frac{\|\cos t\|_p}{(2\pi)^{1/p}}\left\|\mathcal{P}_q(t)\right\|_p + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p')}} \tag{22}$$

і

$$\sup_{\varphi \in U_1^0} \left\| \int_0^{2\pi} \varphi(x - t)\, \mathcal{P}_{q,\beta,n}(t)\, dt \right\|_p = O(1) \frac{q^n}{1 - q},$$

переконуємось у справедливості формули (20).

Теорему 2 доведено.

Як нескладно переконатися, умовам теорем 1 і 2 задовольняють модулі коефіцієнтів Фур'є полігармонічних ядер Пуассона вигляду

$$P_{q,\beta}(m, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_m(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad \beta \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{23}$$

де

$$\psi_m(k) = q^k \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(1 - q^2)^j}{j!\,2^j} \prod_{l=0}^{j-1} (k + 2l), \qquad q \in (0, 1) \tag{24}$$

(див. [5, с. 256, 257]). Для коефіцієнтів $\psi(k) = \psi_m(k)$, $m = 2, 3, \ldots,$ вигляду (24) можемо записати

$$\varepsilon_n = \sup_{k \ge n} \left| \frac{\psi_m(k+1)}{\psi_m(k)} - q \right| =$$

$$= q \sup_{k \ge n} \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(1-q^2)^j}{j!\,2^j} \prod_{l=0}^{j-1} (k + 2l) \left(\prod_{l=0}^{j-1} \frac{k + 1 + 2l}{k + 2l} - 1 \right)}{\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(1-q^2)^j}{j!\,2^j} \prod_{l=0}^{j-1} (k + 2l)} \le$$

$$\le q \sup_{k \ge n} \left(\prod_{l=0}^{m-2} \frac{k + 1 + 2l}{k + 2l} - 1 \right) \le \frac{(2m - 3)\, q}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

При $m = 1$ маємо $\psi_m(k) = q^k$ і, отже,

$$\varepsilon_n \equiv 0, \quad m = 1. \tag{26}$$

Із теорем 1 та 2 і співвідношень (25) та (26) одержуємо наступне твердження.

Наслідок. *Нехай* $1 \le p \le \infty$ *і класи* $C_{\beta,p}^{\psi}$ *та* $L_{\beta,1}^{\psi}$ *породжуються послідовностями* $\psi(k) = \psi_m(k)$ *вигляду* (24). *Тоді при* $n \to \infty$ *виконуються асимптотичні рівності*

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,p}^{\psi}; U_{n-1}^*\right)_C = q^n \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(1-q^2)^j}{j!\,2^j} \prod_{l=0}^{j-1} (n + 2l) \times$$

$$\times \left(\frac{2^{1/p} \|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+1/p'}} M_{q,p'} + O(1) \frac{mq}{n(1-q)^{\sigma(p',m)}} \right), \tag{27}$$

$$\mathcal{E}\left(L_{\beta,1}^{\psi}; U_{n-1}^*\right)_{L_p} = q^n \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(1-q^2)^j}{j!\,2^j} \prod_{l=0}^{j-1} (n + 2l) \times$$

$$\times \left(\frac{2^{1-1/p} \|\cos t\|_{p}}{\pi^{1+1/p}} M_{q,p} + O(1) \frac{mq}{n(1-q)^{\sigma(p,m)}} \right), \tag{28}$$

в яких $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1,$

$$\sigma(p, m) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad m = 1, \qquad p = 1, \\ 2, & \text{якщо} \quad \begin{bmatrix} m = 1, & 1 < p \le \infty, \\ m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, & 1 \le p \le \infty, \end{bmatrix} \end{cases}$$

величини $M_{q,p'}$ *та* $M_{q,p}$ *означаються формулою* (8), *а* $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені по* n, q, p, β *і* m.

При $m = 1$ формули (27) та (28) одержано в роботі [4, с. 977, 980, 981].

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. I. – 427 с.
2. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Приближения суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 3. – С. 375 – 395.
3. *Сердюк А. С.* Про один лінійний метод наближення періодичних функцій // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2004. – **1**, № 1. – С. 295 – 336.
4. *Сердюк А. С.* Наближення інтегралів Пуассона одним лінійним методом наближення в рівномірній та інтегральній метриках // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 7. – С. 976 – 982.
5. *Тиман М. Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. – Киев: Наук. думка, 2009. – 376 с.

Одержано 07.07.10