УДК 517.51

Н. Є. Лінчук, С. С. Лінчук (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРІВ УЗАГАЛЬНЕНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ГЕЛЬФОНДА – ЛЕОНТЬЄВА

In a class of linear continuous operators acting in spaces of functions analytic in domains, we describe in various forms isomorphisms which commute with a degree of the Gelfond – Leontiev generalized integration. We also obtain images of all closed subspaces of a space of analytic functions which are invariant with respect to the degree of the Gelfond – Leontiev generalized integration.

В классе линейных непрерывных операторов, действующих в пространствах аналитических в областях функций, в разных формах описаны изоморфизмы, которые коммутируют со степенью обобщенного интегрирования Гельфонда – Леонтьєва. Получены также изображения всех замкнутых подпространств пространства аналитических функций, инвариантных относительно степени обобщенного интегрирования Гельфонда – Леонтьєва.

Нехай G — довільна зіркова відносно точки $z = 0$ область в $\mathbb{C}$. Через $\mathcal{H}(G)$ позначимо простір усіх аналітичних в G функцій, що наділений топологією компактної збіжності, а символом $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ — множину всіх лінійних неперервних операторів, що діють в $\mathcal{H}(G)$. Для додатної сталої ρ і комплексного числа μ, що задовольняє умову $\operatorname{Re}\mu > 0$, оператор узагальненого інтегрування Гельфонда – Леонтьєва $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$ неперервно діє в $\mathcal{H}(G)$ за правилом

$$(\mathcal{J}_{\rho,\mu} f)(z) = \frac{z}{\Gamma(1/\rho)} \int_0^1 (1-t)^{1/\rho - 1} t^{\mu-1} f(t^{1/\rho} z) dt, \tag{1}$$

де $t^{\mu-1} = \exp((\mu-1)\ln t)$.

У працях [1 – 5] вивчалися різні питання, що пов'язані з операторами узагальненого інтегрування Гельфонда – Леонтьєва. Зокрема, в них досліджено умови повноти деяких систем аналітичних функцій у просторі $\mathcal{H}(G)$, описано структуру замкнених підпросторів простору $\mathcal{H}(G)$, які інваріантні відносно оператора $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$, побудовано згортку для операторів, які є правими оберненими до $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$, описано мультиплікатори цієї згортки, одержано зображення коефіцієнтних мультиплікаторів розвинень аналітичних функцій у ряди за системою функцій Міттаг-Лефлера тощо.

У даній статті досліджуються зображення ізоморфізмів із класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які переставні зі степенем узагальненого інтегрування Гельфонда – Леонтьєва. Для цього побудовано і застосовано метод редукції цієї задачі до аналогічної задачі для першого степеня оператора узагальненого інтегрування Гельфонда – Леонтьєва. Для простору A_R ізоморфізми, що комутують зі степенем звичайного інтегрування, описано в [6], а зі степенем узагальненого інтегрування — у [7]. Як застосування основних результатів даної статті вивчено також структуру всіх замкнених підпросторів простору $\mathcal{H}(G)$, які інваріантні відносно степеня оператора узагальненого інтегрування Гельфонда – Леонтьєва. Зауважимо, що у працях М. К. Нікольського [8], М. І. Нагнибіди [9], В. А. Ткаченка [10] та інших математиків (див. огляд [11]) вивчався опис усіх нетривіальних замкнених інваріантних підпросторів операторів звичайного та узагальненого інтегрувань першого порядку, що діють у різних просторах аналітичних функцій. Інваріантні підпростори квадрата звичайного інтегрування у класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторі функцій, аналітичних у кругових областях, досліджено в [12].

У роботі [1] при дослідженні комутанта оператора $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$ в $\mathcal{H}(G)$ було введено діагональні оператори $A_{\rho,\mu}$, які на степенях z діють за правилом $A_{\rho,\mu}z^n = \frac{\Gamma(n/\rho+\mu)}{\Gamma(n/\rho+1)} z^n$, $n = 0, 1, \ldots$. Кожен з операторів $A_{\rho,\mu}$ продовжується до оператора, який лінійно та неперервно діє в $\mathcal{H}(G)$. Оператор $A_{\rho,\mu}$ є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$, і обернений до нього діє за правилом

$$(A^{-1}_{\rho,\mu}f)(z) = \left(\mu + \frac{z}{\rho}\frac{d}{dz}\right)(\Gamma(\mu))^{-1}\int\limits_0^1 (1-t)^{\mu-1} f(t^{1/\rho}z)dt.$$

За допомогою оператора $A_{\rho,\mu}$ будується неперервна згортка в $\mathcal{H}(G)$ для оператора $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$, тобто білінійна, комутативна та асоціативна операція $*\colon \mathcal{H}(G)\times\mathcal{H}(G) \to \mathcal{H}(G)$, для якої $\mathcal{J}_{\rho,\mu}(f*g) = (\mathcal{J}_{\rho,\mu}f)*g \ \ \forall f,g\in\mathcal{H}(G)$. Ця згортка визначається формулою

$$(f*g)(z) = g(0)f(z) + \frac{z}{\rho\Gamma(\mu)}\int\limits_0^1 (1-t)^{1/\rho-1}t^{\mu-1}(A_{\rho,\mu}g)'(z(1-t)^{1/\rho})f(t^{1/\rho}z)dt. \tag{2}$$

Оператор $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ буде переставним з $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$ в $\mathcal{H}(G)$ тоді і тільки тоді, коли він зображується у вигляді

$$Tf = \psi * f,$$

де $\psi\in\mathcal{H}(G)$, до того ж $\psi = T1$. Звідси випливає, що кожні два оператори, які є переставними з $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$, комутують між собою. Використовуючи той факт, що оператор $A_{\rho,\mu}$ є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$, з попередньої формули одержуємо загальний вигляд операторів $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які переставні з $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$:

$$(Tf)(z) = \varphi(0)f(z) + \frac{z}{\rho}\int\limits_0^1 (1-t)^{1/\rho-1}t^{\mu-1}\varphi'(z(1-t)^{1/\rho})f(t^{1/\rho}z)dt, \tag{3}$$

де $\varphi\in\mathcal{H}(G)$. При цьому $\varphi = (\Gamma(\mu))^{-1}A_{\rho,\mu}\psi$. Для того щоб оператор (3) був ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$, необхідно і достатньо, щоб $\varphi(0)\neq 0$ [1].

Оператор узагальненого диференціювання Гельфонда – Леонтьєва $D_{\rho,\mu}$, який на степенях z діє за правилом $D_{\rho,\mu}z^n = \frac{\Gamma(n/\rho+\mu)}{\Gamma((n-1)/\rho+\mu)} z^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, $D_{\rho,\mu}1 = 0$, формулою

$$D_{\rho,\mu} = A_{\rho,\mu+1/\rho}A^{-1}_{\rho,\mu}\Delta \tag{4}$$

продовжується до лінійного неперервного оператора $D_{\rho,\mu}$, який діє в $\mathcal{H}(G)$. Тут Δ — оператор Помм'є з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, який визначається формулою $(\Delta f)(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$ при $z\neq 0$ і $(\Delta f)(0) = f'(0)$.

За допомогою згортки (2) опишемо комутант степеня оператора узагальненого інтегрування Гельфонда – Леонтьєва $\mathcal{J}^n_{\rho,\mu}$, де n — довільне фіксоване натуральне число. Нагадаємо, що формулою $E_\rho(z,\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{\Gamma(n/\rho+\mu)}$ визначається ціла функція Міттаг-Лефлера. Якщо G є однозв'язною областю в $\mathbb{C}$, то при $\mathrm{Re}\,\mu>$ >0 система $\{E_\rho(\lambda z,\mu)\colon \lambda\in\mathbb{C}\}$ є повною в $\mathcal{H}(G)$. Тому кожний оператор $T\in$ $\in\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ однозначно визначається своєю характеристичною функцією $t(\lambda,z)=$ $=T(E_\rho(\lambda z,\mu))$. Далі ми будемо використовувати такі рівності:

$$D_{\rho,\mu}(E_\rho(\lambda z,\mu))=\lambda E_\rho(\lambda z,\mu),$$

$$\lambda\mathcal{J}_{\rho,\mu}(E_\rho(\lambda z,\mu))=E_\rho(\lambda z,\mu)-\frac{1}{\Gamma(\mu)}$$

при довільних $\lambda\in\mathbb{C}$ і $z\in\mathbb{C}$.

Якщо область G є інваріантною відносно повороту навколо початку координат на кут $2\pi/n$, тобто $\omega G=G$, де $\omega=\exp\left(\dfrac{2\pi i}{n}\right)$, то формулами $(P_jf)(z)=$ $=\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{-kj}f(\omega^k z)$ визначаються проектори $P_j\in\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, $j=\overline{0,n-1}$.

Теорема 1. *Нехай область G є зірковою відносно точки $z=0$ в $\mathbb{C}$ і інваріантною відносно повороту навколо цієї точки на кут $2\pi/n$. Для того щоб оператор $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ був переставним з оператором $\mathcal{J}^n_{\rho,\mu}$ в $\mathcal{H}(G)$, необхідно і достатньо, щоб він зображувався у вигляді*

$$(Tf)(z)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(j/\rho+\mu)}D^j_{\rho,\mu}\left(\psi_j*(P_jf)\right)(z), \tag{5}$$

де $\psi_j(z)$ — деякі функції з $\mathcal{H}(G)$, причому $\psi_j(z)=Tz^j$, $j=\overline{0,n-1}$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай оператор $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ з характеристичною функцією $t(\lambda,z)=T(E_\rho(\lambda z,\mu))$ є переставним з $\mathcal{J}^n_{\rho,\mu}$. Подіявши обома частинами рівності $T\mathcal{J}^n_{\rho,\mu}=\mathcal{J}^n_{\rho,\mu}T$ на функцію $E_\rho(\lambda z,\mu)$ і врахувавши, що

$$\lambda^n\mathcal{J}^n_{\rho,\mu}E_\rho(\lambda z,\mu)=E_\rho(\lambda z,\mu)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(\lambda z)^j}{\Gamma(j/\rho+\mu)},$$

для характеристичної функції $t(\lambda,z)$ оператора T при $\lambda\in\mathbb{C}$ і $z\in G$ одержимо співвідношення

$$t(\lambda,z)-\lambda^n\mathcal{J}^n_{\rho,\mu}(t(\lambda,z))=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda^j\psi_j(z)}{\Gamma(j/\rho+\mu)}, \tag{6}$$

де $\psi_j(z)=Tz^j$, $j=\overline{0,n-1}$. Розв'язок цього рівняння запишемо у вигляді ряду Неймана

$$t(\lambda,z)=\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda^n\mathcal{J}^n_{\rho,\mu})^k\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda^j\psi_j(z)}{\Gamma(j/\rho+\mu)},$$

який збігається для кожного $\lambda\in\mathbb{C}$ за топологією $\mathcal{H}(G)$.

Перетворимо вираз для $t(\lambda,z)$, скориставшись тим, що оператор $D_{\rho,\mu}$ є лівим оберненим до $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$ в $\mathcal{H}(G)$, і очевидною рівністю

$$(\mathcal{J}^n_{\rho,\mu}f)(z)=\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(n/\rho+\mu)}\left(z^n*f(z)\right),\quad n=0,1,\ldots,$$

де згортка $*$ визначається формулою (2). При $\lambda \in \mathbb{C}$ і $z \in G$ маємо

$$t(\lambda, z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\Gamma(j/\rho + \mu)} D^{j}_{\rho,\mu} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{nk+j} (\mathcal{J}^{nk+j}_{\rho,\mu} \psi_j)(z) \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(j/\rho + \mu)} D^{j}_{\rho,\mu} \left(\psi_j(z) * \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^{nk+j}}{\Gamma((nk+j)/\rho + \mu)} \right) \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(j/\rho + \mu)} D^{j}_{\rho,\mu} \left(\psi_j(z) \underset{z}{*} P_j(E_\rho(\lambda z, \mu)) \right).$$

Враховуючи визначення характеристичної функції оператора T, переконуємося, що для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$ при $z \in G$ є правильною рівність (5).

Достатність. Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що оператор T, який визначається формулою (5), задовольняє рівність $T\mathcal{J}^{n}_{\rho,\mu} = \mathcal{J}^{n}_{\rho,\mu} T$ для $f(z) = E_\rho(\lambda z, \mu)$ при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ і $z \in G$. Ця рівність є правильною і для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$, оскільки $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, а система $\{E_\rho(\lambda z, \mu) \colon \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ є повною в $\mathcal{H}(G)$.

***Зауваження* 1.** При $\mu = 1$ комутант оператора $\mathcal{J}^{n}_{\rho,1}$ в $\mathcal{H}(G)$ описав іншим методом І. Х. Дімовський [2].

Опишемо далі ізоморфізми із множини $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які переставні з $\mathcal{J}^{n}_{\rho,\mu}$. Для цього нам знадобиться ще одне зображення комутанта оператора $\mathcal{J}^{n}_{\rho,\mu}$.

Наведемо спочатку деякі допоміжні твердження. Нехай G — довільна зіркова відносно точки $z = 0$ область в $\mathbb{C}$, яка є інваріантною відносно повороту навколо цієї точки на кут $\dfrac{2\pi}{n}$, а $\mathcal{H}_k(G)$, $k = \overline{0, n-1}$, — замкнені підпростори простору $\mathcal{H}(G)$, які визначаються таким чином:

$$\mathcal{H}_k(G) = \Big\{ f \in \mathcal{H}(G) \colon f(\omega z) = \omega^k f(z) \ \ \forall z \in G \Big\}.$$

Лема 1 [2]**.** *Простір* $\mathcal{H}(G)$ *є прямою сумою своїх підпросторів* $\mathcal{H}_k(G)$, $k = \overline{0, n-1}$, *тобто*

$$\mathcal{H}(G) = \mathcal{H}_0(G) \oplus \mathcal{H}_1(G) \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_{n-1}(G).$$

При доведенні цієї леми в [2] встановлено, що кожна функція $f \in \mathcal{H}(G)$ єдиним чином подається у вигляді $f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z)$, де $f_k \in \mathcal{H}_k(G)$, $k = \overline{0, n-1}$, при цьому $f_k(z) = (P_k f)(z)$.

Позначимо через G^n множину вигляду $G^n = \{z^n \colon z \in G\}$. Зрозуміло, що область G^n є зірковою відносно $z = 0$, оскільки такою є G.

Лема 2. *Кожен із підпросторів* $\mathcal{H}_k(G)$, $k = \overline{0, n-1}$, *є ізоморфним до простору* $\mathcal{H}(G^n)$, *причому ізоморфізмом простору* $\mathcal{H}(G^n)$ *на* $\mathcal{H}_k(G)$ *є оператор* U_k, *який діє за правилом*

$$(U_k f)(z) = z^k f(z^n).$$

Леми 2 випливає з тверджень $6^\circ - 8^\circ$ статті [13].

Лема 3. *Для* $k = \overline{0, n-1}$ *кожен з операторів* D_k, *який на степенях* z *діє за правилом*

$$D_k z^m = \frac{\Gamma\left((nm+k)/\rho+\mu\right)\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(nm/\rho+\mu\right)\Gamma\left(k/\rho+\mu\right)} z^m, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

продовжується до ізоморфізму простору $\mathcal{H}(G^n)$ на себе.

Доведення. Нехай ρ, $\operatorname{Re}\mu_1$, $\operatorname{Re}\mu_2$ — додатні числа. Тоді оператор $S^{(\rho)}_{\mu_1,\mu_2}$, який на степенях z визначається співвідношеннями

$$S^{(\rho)}_{\mu_1,\mu_2} z^m = \frac{\Gamma\left(m/\rho+\mu_1\right)}{\Gamma\left(m/\rho+\mu_2\right)} z^m, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

формулою $S^{(\rho)}_{\mu_1,\mu_2} = A_{\rho,\mu_1} A^{-1}_{\rho,\mu_2}$ продовжується до ізоморфізму простору $\mathcal{H}(G)$. Правильність леми 3 випливає з рівності

$$D_k = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(k/\rho+\mu\right)} S^{(\rho/n)}_{k/\rho+\mu,\mu}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Лема 4. *Простір $\mathcal{H}(G)$ ізоморфний прямій сумі n екземплярів просторів $\mathcal{H}(G^n)$, тобто простору $\mathcal{H}^{(n)}(G^n)$. При цьому оператор $U\colon \mathcal{H}(G) \to \mathcal{H}^{(n)}(G^n)$, що діє за правилом*

$$(Uf)(z) = \left((D_0 U_0^{-1} P_0 f)(z), (D_1 U_1^{-1} P_1 f)(z), \ldots, (D_{n-1} U_{n-1}^{-1} P_{n-1} f)(z)\right),$$

здійснює вказаний ізоморфізм.

Лема 4 випливає з лем 1 – 3.

***Наслідок* 1.** *Між операторами $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{(n)}(G^n))$ існує взаємно однозначна відповідність, яка визначається формулою*

$$\tilde{T} = UTU^{-1}. \tag{7}$$

За характеристикою лінійних неперервних операторів, які діють у прямій сумі просторів [14], справджується наступне твердження.

Лема 5. *Кожен оператор $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{(n)}(G^n))$ однозначно визначається операторною матрицею $[T_{ij}]_{i,j=0}^{n-1}$, де $T_{ij} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G^n))$. При цьому для $g(z) = (g_0(z), g_1(z), \ldots, g_{n-1}(z)) = (g_k(z))_{k=0}^{n-1} \in \mathcal{H}^{(n)}(G^n)$*

$$(\tilde{T}g)_k(z) = \sum_{i=0}^{n-1} (T_{ki} g_i)(z), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Нехай оператор $\tilde{T}$ з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{(n)}(G^n))$ визначається операторною матрицею $[T_{ij}]_{i,j=0}^{n-1}$. Тоді за наслідком 1 йому відповідає оператор $T \in \mathcal{L}(H(G))$, який визначається формулою $T = U^{-1}\tilde{T}U$. Наведемо зображення оператора T в явному вигляді (через оператори $[T_{ij}]_{i,j=0}^{n-1}$). Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що для $g(z) = (g_k(z))_{k=0}^{n-1} \in \mathcal{H}^{(n)}(G^n)$

$$(U^{-1}g)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (U_k D_k^{-1} g_k)(z).$$

Тому для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$ є правильною формула

$$Tf = (U^{-1}\tilde{T}U)f = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} U_k D_k^{-1} T_{ki} D_i U_i^{-1} \right) (P_i f). \tag{8}$$

Навпаки, для оператора $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ оператор $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{(n)}(G^n))$, який йому відповідає за формулою (7), діє за правилом

$$\tilde{T}g = \left(\sum_{i=0}^{n-1} D_k U_k^{-1} P_k T U_i D_i^{-1} g_i\right)_{k=0}^{n-1},$$

де $g = (g_k)_{k=0}^{n-1} \in \mathcal{H}^{(n)}(G^n)$. З цього співвідношення та леми 5 випливає, що

$$T_{ki} = D_k U_k^{-1} P_k T U_i D_i^{-1}, \quad k, i = \overline{0, n-1}. \tag{9}$$

Таким чином, формулами (8) і (9) у явному вигляді встановлюється взаємозв'язок між операторами $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{(n)}(G^n))$. Користуючись (7), переконуємося в тому, що для оператора $\mathcal{J}_{\rho,\mu}^n \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ відповідний йому оператор $\tilde{\mathcal{J}}_{\rho,\mu}^n \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{(n)}(G^n))$ визначається матрицею

$$[\tilde{\mathcal{J}}_{\rho,\mu}^n] = [\delta_{ki} \mathcal{J}_{\rho_1,\mu}]_{k,i=0}^{n-1}, \tag{10}$$

де $\rho_1 = \dfrac{\rho}{n}$, а δ_{ki} — символ Кронекера.

З формули (7) випливає, що співвідношення $T\mathcal{J}_{\rho,\mu}^n = \mathcal{J}_{\rho,\mu}^n T$ рівносильне наступному:

$$\tilde{T}\tilde{\mathcal{J}}_{\rho,\mu}^n = \tilde{\mathcal{J}}_{\rho,\mu}^n \tilde{T}. \tag{11}$$

Запишемо рівність (11) у матричній формі. Позначивши $\tilde{T} = [T_{ki}]_{k,i=0}^{n-1}$ і використавши (10), одержимо, що співвідношення (11) еквівалентне виконанню рівностей

$$T_{ki}\mathcal{J}_{\rho_1,\mu} = \mathcal{J}_{\rho_1,\mu} T_{ki}, \quad k,\, i = \overline{0, n-1}. \tag{12}$$

Тому за формулою (3)

$$(T_{ki} g)(z) = \varphi_{ki}(0) g(z) + \frac{z}{\rho_1} \int_0^1 (1-t)^{1/\rho_1 - 1} t^{\mu-1} \varphi_{ki}'(z(1-t)^{1/\rho_1}) g(t^{1/\rho_1} z) dt, \tag{13}$$

де $\varphi_{ki},\, k,\, i = \overline{0, n-1},$ — деякі функції з простору $\mathcal{H}(G^n)$.

Таким чином, справджується наступне твердження.

Теорема 2. *Для того щоб оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ був переставним з $\mathcal{J}_{\rho,\mu}^n$ в $\mathcal{H}(G)$, необхідно і достатньо, щоб він зображувався у вигляді* (8), *де оператори T_{ki} визначаються формулою* (13), *в якій $\varphi_{ki}(z)$ — деякі функції з $\mathcal{H}(G^n)$, $k, i = \overline{0, n-1}$.*

Вивчимо далі опис ізоморфізмів $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які переставні з $\mathcal{J}_{\rho,\mu}^n$.

Теорема 3. *Загальний вигляд ізоморфізмів T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, переставних з $\mathcal{J}_{\rho,\mu}^n$, дається формулою* (8), *в якій T_{ki} визначаються співвідношеннями* (13), *$\varphi_{ki} \in \mathcal{H}(G^n)$, причому $\det\|\varphi_{ki}(0)\|_{k,i=0}^{n-1} \neq 0$.*

Доведення. За теоремою 2 і наслідком 1 оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ буде ізоморфізмом, що комутує з $\mathcal{J}_{\rho,\mu}^n$, тоді і тільки тоді, коли він подається у вигляді (8), де T_{ki} визначаються формулою (13), і оператор $\tilde{T} = [T_{ki}]_{k,i=0}^{n-1}$ є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}^{(n)}(G^n)$. Але кожні два оператори матриці $\tilde{T}$ переставні між собою, оскільки вони комутують з $\mathcal{J}_{\rho_1,\mu}$. Тому оператор $\tilde{T}$ буде ізоморфізмом простору $\mathcal{H}^{(n)}(G^n)$ тоді і тільки тоді, коли ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G^n)$ буде оператор $T' = \det\|T_{ki}\|$

[14]. Оскільки оператор T' також переставний з $\mathcal{J}_{\rho_1,\mu}$ в $\mathcal{H}(G^n)$, то він зображується відповідною формулою до (3), тобто у вигляді

$$(T'g)(z) = \varphi(0)g(z) + \frac{z}{\rho_1}\int_0^1 (1-t)^{1/\rho_1-1}t^{\mu-1}\varphi'(z(1-t)^{1/\rho_1})g(t^{1/\rho_1}z)dt. \quad (14)$$

Але, як було зазначено раніше, оператор T' буде ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G^n)$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi(0) \neq 0$. Залишилося виразити $\varphi(0)$ через $\varphi_{ki}(0)$, $k, i = \overline{0, n-1}$. З формули (14) випливає, що $\varphi(0) = (T'1)(0)$. Тому $\varphi(0) = \det\|\varphi_{ki}(0)\|_{k,i=0}^{n-1}$.

Теорема 4. *Загальний вигляд ізоморфізмів $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, переставних з $\mathcal{J}_{\rho,\mu}^n$ в $\mathcal{H}(G)$, дається формулою* (5), *в якій $\psi_i \in \mathcal{H}(G)$, $i = \overline{0, n-1}$, і виконується умова*

$$\det\|\psi_i^{(p)}(0)\|_{p,i=0}^{n-1} \neq 0.$$

Доведення. Оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ комутує з $\mathcal{J}_{\rho,\mu}^n$ в $\mathcal{H}(G)$ тоді і тільки тоді, коли за теоремою 1 він зображується у вигляді (5), а згідно з теоремою 2 — у вигляді (8). Встановимо взаємозв'язок між функціями $\psi_i \in \mathcal{H}(G)$, $i = \overline{0, n-1}$, з формули (5) і $\varphi_{ki} \in \mathcal{H}(G^n)$, $k, i = \overline{0, n-1}$, за допомогою яких оператор T подається у вигляді (8). Оскільки $\psi_m(z) = Tz^m$, $m = \overline{0, n-1}$, то, подіявши обома частинами (8) на функції z^m і врахувавши, що $\varphi_{km} = \dfrac{1}{\Gamma(\mu)} A_{\rho_1,\mu} T_{km} 1$, одержимо

$$\psi_m(z) = \Gamma(\mu)\sum_{k=0}^{n-1}(U_k D_k^{-1} A_{\rho_1,\mu}^{-1}\varphi_{km})(z) = \sum_{k=0}^{n-1}\varphi_{km}(0)z^k + \Phi_m(z),$$

де

$$\Phi_m(z) = \Gamma(\mu)\sum_{k=0}^{n-1} U_k D_k^{-1} A_{\rho_1\mu}^{-1}(\varphi_{km}(z) - \varphi_{km}(0)).$$

Оскільки $(D_{\rho,\mu}^p \Phi_m)(0) = 0$ і $(D_{\rho,\mu}^p \psi_m)(0) = \dfrac{\psi_m^{(p)}(0)}{p!}\dfrac{\Gamma(p/\rho + \mu)}{\Gamma(\mu)}$, $p = \overline{0, n-1}$, $m = \overline{0, n-1}$, то $\varphi_{pm}(0) = \dfrac{\psi_m^{(p)}(0)}{p!}$. Тому

$$\det\|\varphi_{pm}(0)\|_{p,m=0}^{n-1} = \left(\prod_{p=0}^{n-1}\frac{1}{p!}\right)\det\|\psi_m^{(p)}(0)\|_{p,m=0}^{n-1}.$$

Правильність теореми 4 випливає з теореми 3.

Опишемо далі всі замкнені підпростори простору $\mathcal{H}(G)$, що інваріантні відносно степеня оператора узагальненого інтегрування Гельфонда – Леонтьєва.

Теорема 5. *Нехай G — довільна зіркова відносно точки $z = 0$ область в $\mathbb{C}$, яка інваріантна відносно повороту на кут $2\pi/n$ навколо початку координат. Загальний вигляд замкненого підпростору $M \subset \mathcal{H}(G)$, який інваріантний відносно оператора $\mathcal{J}_{\rho,\mu}^n$, дається формулою*

$$M = T\Big(z^{m_0 n}\mathcal{H}_0(G) \oplus z^{m_1 n}\mathcal{H}_1(G) \oplus \ldots \oplus z^{m_{n-1}n}\mathcal{H}_{n-1}(G)\Big), \quad (15)$$

де T — деякий ізоморфізм простору $\mathcal{H}(G)$, який комутує з $\mathcal{J}_{\rho,\mu}^n$, а m_k, $k = \overline{0, n-1}$, — деякі цілі невід'ємні числа або символи $+\infty$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай M — замкнений підпростір $\mathcal{H}(G)$, який інваріантний відносно оператора $\mathcal{J}^n_{\rho,\mu}$, тобто $\mathcal{J}^n_{\rho,\mu}M \subset M$. Використаємо той факт, що простір $\mathcal{H}(G)$ є ізоморфним прямій сумі n екземплярів просторів $\mathcal{H}(G^n)$, тобто $\mathcal{H}^n(G^n)$. При цьому ізоморфізм між цими просторами здійснюється за допомогою оператора $U\colon \mathcal{H}(G) \to \mathcal{H}^{(n)}(G^n)$ (див. лему 4). Тому замкнений підпростір $M \subset \mathcal{H}(G)$ буде інваріантним відносно $\mathcal{J}^n_{\rho,\mu}$ тоді і тільки тоді, коли M подається у вигляді

$$M = U^{-1}\tilde{M},$$

де $\tilde{M}$ — деякий замкнений підпростір простору $\mathcal{H}^{(n)}(G^n)$, який інваріантний відносно оператора $\tilde{\mathcal{J}}^n_{\rho,\mu} = U\mathcal{J}^n_{\rho,\mu}U^{-1}$. Але згідно з (10) оператор $\tilde{\mathcal{J}}^n_{\rho,\mu} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{(n)}(G^n))$ визначається матрицею $[\tilde{\mathcal{J}}^n_{\rho,\mu}] = \left[\delta_{ki}\mathcal{J}^n_{\frac{\rho}{n},\mu}\right]^{n-1}_{k,i=0}$, де δ_{ki} — символ Кронекера. Використовуючи зображення інваріантних підпросторів матричних операторів відносно оператора узагальненого інтегрування Гельфонда – Леонтьєва, описаного в [4], переконуємося, що M подається у вигляді (15), де T — деякий ізоморфізм простору $\mathcal{H}(G)$, що переставний з $\mathcal{J}^n_{\rho,\mu}$.

Достатність є очевидною.

Зауваження 2. Якщо $m_k = 0$ при $k = \overline{0, n-1}$, то $M = \mathcal{H}(G)$. Якщо ж $m_k = +\infty$ при $k = \overline{0, n-1}$, то відповідний підпростір M є нульовим. В інших випадках формулою (15) визначається нетривіальний замкнений підпростір простору $\mathcal{H}(G)$, який інваріантний відносно оператора $\mathcal{J}^n_{\rho,\mu}$.

1. *Линчук Н. Е.* Представление коммутантов оператора обобщенного интегрирования Гельфонда – Леонтьева // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 5. – С. 72 – 74.
2. *Dimovski I. H.* Convolutional calculus // Math. and its Appl. – 1990. – **43**. – 208 p.
3. *Звоздецький Т. І., Лінчук С. С.* Узагальнення згортки Берга – Дімовського в просторах аналітичних функцій // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 7. – С. 910 – 919.
4. *Лінчук Н. Є.* Інваріантні підпростори операторів узагальненого інтегрування в прямій сумі просторів аналітичних функцій // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2004. – Вип. 191 – 192. С. 76 – 78.
5. *Zvozdetskyi T. I.* On the equivalence of some operators related to generalized Gelfond – Leontiev integration and differentiation in spaces of analytic functions // Ukr. Math. Bull. – 2005. – **2**, № 4. – P. 495 – 506.
6. *Нагнибида Н. И.* Изоморфизмы пространства аналитических функций в круге, перестановочные со степенью оператора интегрирования // Теория функций, функцион. анализ и их прил.: Респ. межвед. науч. сб. – 1968. – Вып. 6. – С. 184 – 188.
7. *Царьков М. Ю.* Изоморфизмы аналитических пространств, перестановочные со степенью оператора интегрирования // Там же. – 1971. – Вып. 13. – С. 54 – 63.
8. *Никольский Н. К.* Инвариантные подпространства и базисы из обобщенных первообразных в смысле А. О. Гельфонда – А. Ф. Леонтьева // Мат. исследования: Респ. межвед. науч. сб. – 1968. – **3**, вып. 7. – С. 101 – 116.
9. *Нагнибида Н. И.* О некоторых свойствах операторов обобщенного интегрирования в аналитическом пространстве // Сиб. мат. журн. – 1966. – **7**, № 6. – С.1306 – 1318.
10. *Ткаченко В. А.* Инвариантные подпространства и одноклеточность операторов обобщенного интегрирования в пространствах аналитических функционалов // Мат. заметки. – 1977. – **22**, № 2. – С. 221 – 230.
11. *Никольский Н. К.* Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций // Мат. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1974. – **12**. – С. 199 – 412.
12. *Нагнибіда М. І.* Класичні оператори в просторах аналітичних функцій. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – 297 с.
13. *Березовская Г. М., Березовский Н. И.* Описание изоморфизмов пространства голоморфных функций, перестановочных с кратным умножением // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 5. – С. 611 – 615.
14. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. – М.: Мир, 1970. – 352 с.

Одержано 27.11.07