УДК 519.21

В. П. Зубченко, Ю. С. Мішура (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ У СХЕМІ ЕЙЛЕРА ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ НЕЛІПШИЦЕВОЮ ДИФУЗІЄЮ ТА ПУАССОНІВСЬКОЮ МІРОЮ*

We study the rate of convergence and some other properties of the Euler scheme for stochastic differential equations with the non-Lipschitz diffusion and the Poisson measure.

Исследована скорость сходимости и некоторые другие свойства схемы Эйлера для стохастических дифференциальных уравнений с нелипшицевой диффузией и пуассоновской мерой.

1. Вступ. Стохастичні диференціальні рівняння широко застосовуються при моделюванні різноманітних природних явищ. При цьому особливого значення набувають чисельні схеми, адже поряд із важливим теоретичним значенням вони дозволяють ефективно проводити комп'ютерне моделювання. Зауважимо, що стохастичні диференціальні рівняння дифузійного типу та відповідні чисельні схеми із гельдеровим коефіцієнтом дифузії активно застосовуються у сфері фінансів та страхування. Зокрема, надзвичайно популярним є використання таких моделей при моделюванні миттєвих стохастичних відсоткових ставок [1]. Останні ж виявляються незамінними при оцінюванні довгострокових відсоткових ставок, побудові фінансових прогнозів, розробці довгострокової стратегії розвитку фінансової установи чи страхової компанії, включаючи аналіз прибутковості та ризику проваджуваної діяльності.

Важливим питанням є дослідження швидкості збіжності чисельних схем. Зокрема, у роботах [2, 3] одержано результати щодо швидкості сильної збіжності у схемі Ейлера для стохастичних диференціальних рівнянь дифузійного типу з однорідними коефіцієнтами та неліпшицевою дифузією, у роботі [4] — для рівняння такого ж типу, але з лінійним коефіцієнтом зносу та додатковою випадковістю. У роботі [5] розглянуто рівняння дифузійного типу з неоднорідними коефіцієнтами та гельдеровою дифузією.

Проте фінансові ринки практично завжди функціонують таким чином, що відсоткові ставки чи інші фінансові індекси у певні моменти часу мають стрибки. Тому природними для використання при моделюванні вказаних характеристик виявляються стохастичні диференціальні рівняння зі стрибковою частиною. Швидкість сильної збіжності чисельних схем для рівнянь такого типу з ліпшицевими коефіцієнтами вивчалася в роботі [6]. Але особливий інтерес становить поєднання неліпшицевості дифузії, властивої більшості стохастичних фінансових моделей, та стрибків, котрі моделюються, наприклад, за допомогою пуассонівської міри.

У зв'язку з цим у даній роботі ми досліджуємо швидкість сильної збіжності у схемі Ейлера для стохастичного диференціального рівняння з неліпшицевою дифузією та пуассонівською мірою. Деякі інші властивості рівнянь такого типу досліджено також у роботах [7, 8].

*Підтримано Європейською комісією у рамках програми "Marie Curie Actins" (грант "Multifractionality" № PIRSES-GA-2008-230804).

Нехай задано ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ з потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, що задовольняє стандартні умови та поповнений усіма подіями з $\mathcal{F}_0$ нульової ймовірності. Будемо досліджувати стохастичне диференціальне рівняння

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(X_s)\,ds + \sigma \int_0^t |X_s|^\alpha\,dW_s + \int_0^t \int_R q(X_s, y)\tilde{\nu}(ds, dy), \tag{1}$$

де W — вінерівський процес; ν — пуассонівська міра, $\mathrm{E}\nu(dt, dy) = \Pi(dy)dt$, $\tilde{\nu}(dt, dy) = \nu(dt, dy) - \Pi(dy)dt$ — центрована пуассонівська міра, Π — сигма-скінченна міра на σ-алгебрі борельових множин $\mathbb{R}$. Вінерівський процес W та центрована пуассонівська міра $\tilde{\nu}$ узгоджені з потоком $\mathcal{F}_t$ та незалежні між собою. Коефіцієнти $a(x)$, $q(x, y)$ — невипадкові функції, вимірні за сукупністю змінних, $\sigma > 0$ — невипадкова стала, $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, $x_0 > 0$.

Опишемо коротко будову статті. У п. 2 описано схему Ейлера для вказаного стохастичного диференціального рівняння та досліджено основні її властивості. У п. 3 одержано локальну оцінку швидкості збіжності схеми Ейлера. Третій, основний, пункт присвячено дослідженню швидкості сильної збіжності схеми Ейлера.

2. Допоміжні результати. Нехай для коефіцієнтів стохастичного диференціального рівняння (1) виконуються умови існування та єдиності невід'ємного сильного розв'язку [8]:

1) $\int_R |q(x, y)|^2 \Pi(dy) \leq C$, C — деяка стала, $\lim\limits_{x_1 \to x_2} \int_R |q(x_1, y) - q(x_2, y)|^2 \Pi(dy) = 0$,

2) $a(x) \geq 0$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$, $a(x) \leq C(1 + |x|)$, C — деяка стала,

3) $|a(x_1) - a(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$, $q(0, y) = 0$ для будь-якого $y \in \mathbb{R}$, $q(x, y) \geq 0$ для будь-яких $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}$ та задовольняє умову $\int_R |q(x_1, y) - q_1(x_2, y)|\,\Pi(dy) \leq k|x_1 - x_2|$ для всіх $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, k — деяка стала.

Нехай $(X_t,\ t \geq 0)$ — розв'язок стохастичного диференціального рівняння (1). Для фіксованого $T > 0$ розглянемо наступну симетризовану схему Ейлера $\left(\overline{X}_{t_j},\ j = 0, \ldots, N\right)$:

$$\overline{X}_{t_{j+1}} = \Bigg| \overline{X}_{t_j} + a(\overline{X}_{t_j})\Delta t + \sigma \overline{X}_{t_j}^\alpha (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) +$$
$$+ \int_R q(\overline{X}_{t_j}, y)(\tilde{\nu}(t_{j+1}, dy) - \tilde{\nu}(t_j, dy)) \Bigg|, \quad j = 0, \ldots, N-1, \quad \overline{X}_0 = x_0 > 0, \tag{2}$$

$t_j = j\Delta t$, $\Delta t > 0$, $N\Delta t = T$. Далі будемо використовувати неперервну версію запису схеми Ейлера:

$$\overline{X}_t = \Bigg| \overline{X}_{\eta(t)} + (t - \eta(t))a(\overline{X}_{\eta(t)}) + \sigma \overline{X}_{\eta(t)}^\alpha (W_t - W_{\eta(t)}) +$$
$$+ \int_R q(\overline{X}_{\eta(t)}, y)(\tilde{\nu}(t, dy) - \tilde{\nu}(\eta(t), dy)) \Bigg|,$$

де $\eta(s) = \sup\limits_{j\in\{1,\ldots,N\}} \{t_j; t_j \le s\}$. Випадковий процес $\overline{X}_t$, $0 \le t \le T$, з імовірністю 1 є невід'ємним. Індукцією по $j = 0, \ldots, N-1$ за допомогою формули Мейєра – Іто доведемо, що випадковий процес $\overline{X}_t$, $0 \le t \le T$, є семімартингалом із локальним часом $L^0(\overline{X}_t)$, $0 \le t \le T$, в нулі. Для випадку $q \equiv 0$ це доведено у роботі [2].

Нагадаємо формулу Мейєра – Іто [9, с. 217]:

$$f(X_t) - f(X_0) = \int\limits_{0+}^{t} f'(X_{s-})\,dX_s +$$

$$+\sum_{0<s\le t}\Big\{f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s\Big\} + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu(da)L_t^a,$$

де μ — заряд, що є узагальненою похідною f в узагальнено-функціональному сенсі. Позначимо

$$\overline{Z}_t = \overline{X}_{\eta(t)} + (t-\eta(t))a(\overline{X}_{\eta(t)}) +$$

$$+\sigma\overline{X}^{\alpha}_{\eta(t)}(W_t - W_{\eta(t)}) + \int\limits_R q(\overline{X}_{\eta(t)}, y)(\tilde{\nu}(t,dy) - \tilde{\nu}(\eta(t),dy)). \tag{3}$$

Тоді $\overline{X}_t = |\overline{Z}_t|$. Застосовуючи формулу Мейєра – Іто до функції $f(x) = |x|$, одержуємо

$$\overline{X}_t = x_0 + \int\limits_0^t \operatorname{sgn}(\overline{Z}_{s-})a(\overline{X}_{\eta(s)})\,ds + \sigma\int\limits_0^t \operatorname{sgn}(\overline{Z}_{s-})\overline{X}^{\alpha}_{\eta(s)}dW_s +$$

$$+\int\limits_0^t \operatorname{sgn}(\overline{Z}_{s-})q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)\tilde{\nu}(ds,dy) +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_R \Big[|\overline{Z}_{s-} + q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)| - |\overline{Z}_{s-}| - \operatorname{sgn}(\overline{Z}_{s-})q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)\Big]\nu(ds,dy) + L_t^0(\overline{X}).$$

Враховуючи, що $\nu(ds,dy) = \tilde{\nu}(ds,dy) + \Pi(dy)ds$, отримуємо

$$\overline{X}_t = x_0 + \int\limits_0^t \operatorname{sgn}(\overline{Z}_{s-})a(\overline{X}_{\eta(s)})\,ds +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_R \big[|\overline{Z}_{s-} + q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)| - |\overline{Z}_{s-}| - \operatorname{sgn}(\overline{Z}_{s-})q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)\big]\Pi(dy)ds +$$

$$+\sigma\int\limits_0^t \operatorname{sgn}(\overline{Z}_{s-})\overline{X}^{\alpha}_{\eta(s)}dW_s +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_R \big[|\overline{Z}_{s-} + q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)| - |\overline{Z}_{s-}|\big]\tilde{\nu}(ds,dy) + L_t^0(\overline{X}). \tag{4}$$

Далі літерою C будемо позначати сталі, що залежать лише від T, x_0, інших фіксованих параметрів та не залежать від N.

Лема 1. *Нехай при деякому $p \geq 1$ для коефіцієнтів стохастичного диференціального рівняння* (1) *виконуються умови* $1-3$ *та для $l = 2p$ умова*

C$_1$) $\displaystyle\int_R |q(x,y)|^l \Pi(dy) \leq C = C(p) > 0$ *для всіх $x \in \mathbb{R}^+$.*

Тоді

$$\mathrm{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]} X_t^{2p}\Big) + \mathrm{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]} \overline{X}_t^{2p}\Big) \leq C. \tag{5}$$

Доведення. Доведемо (5) для випадкового процесу $\big(\overline{X}_t,\, 0 \leq t \leq T\big)$ $\big($для випадкового процесу $\big(X_t,\, 0 \leq t \leq T\big)$ доведення аналогічне$\big)$. Застосуємо узагальнену формулу Іто до функції $f(x) = x^{2p}$ та візьмемо до уваги, що $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \overline{X}_s^{2p-1} dL^0(\overline{X}_s) = 0$. Із зображення (4) одержуємо

$$\overline{X}_t^{2p} = x_0^{2p} + 2p\int\limits_0^t \overline{X}_s^{2p-1}\,\mathrm{sgn}(\overline{Z}_{s-})a(\overline{X}_{\eta(s)})\,ds +$$

$$+2p\int\limits_0^t\int\limits_R \overline{X}_s^{2p-1}\Big[|\overline{Z}_{s-} + q(\overline{X}_{\eta(s)},y)| - |\overline{Z}_{s-}| - \mathrm{sgn}(\overline{Z}_{s-})q(\overline{X}_{\eta(s)},y)\Big]\Pi(dy)ds +$$

$$+\sigma^2 p(2p-1)\int\limits_0^t \overline{X}_s^{2p-2}\overline{X}_{\eta(s)}^{2\alpha}\,ds + 2p\sigma\int\limits_0^t \overline{X}_s^{2p-1}\,\mathrm{sgn}(\overline{Z}_{s-})\overline{X}_{\eta(s)}^{\alpha}dW_s +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_R \Big[(\overline{X}_s + |\overline{Z}_{s-} + q(\overline{X}_{\eta(s)},y)| - |\overline{Z}_{s-}|)^{2p} -$$

$$-\overline{X}_s^{2p} - \overline{X}_s^{2p-1}2p(|\overline{Z}_{s-} + q(\overline{X}_{\eta(s)},y)| - |\overline{Z}_{s-}|)\Big]\Pi(dy)ds +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_R \Big[(\overline{X}_s + |\overline{Z}_{s-} + q(\overline{X}_{\eta(s)},y)| - |\overline{Z}_{s-}|)^{2p} - \overline{X}_s^{2p}\Big]\tilde{\nu}(ds,dy).$$

Означимо послідовність $(\tau_n)_{n\geq 0}$ моментів зупинки таким чином: $\tau_n = \inf\{0 \leq s \leq T | \overline{X}_{\eta(s)} \geq n\} \wedge T$, $\inf\{\varnothing\} = T$. Зауважимо, що для будь-якого $\omega \in \Omega$ існує таке $n_0 = n_0(\omega)$, що для всіх $n \geq n_0$ маємо $\tau_n = T$.

Оцінимо $\mathrm{E}\overline{X}_t^{2p} 1_{\{t<\tau_n\}}$:

$$\mathrm{E}\overline{X}_t^{2p} 1_{\{t<\tau_n\}} \leq x_0^{2p} + 2p\mathrm{E}\int\limits_0^t \overline{X}_s^{2p-1}|a(\overline{X}_{\eta(s)})| 1_{\{s<\tau_n\}}\,ds +$$

$$+2p\mathrm{E}\int\limits_0^t\int\limits_R \overline{X}_s^{2p-1}\big||\overline{Z}_{s-} + q(\overline{X}_{\eta(s)},y)| - |\overline{Z}_{s-}| -$$

$$-\,\mathrm{sgn}(\overline{Z}_{s-})q(\overline{X}_{\eta(s)},y)\big| 1_{\{s<\tau_n\}}\Pi(dy)ds +$$

$$+\sigma^2 p(2p-1)\mathrm{E}\int\limits_0^t \overline{X}_s^{2p-2}\overline{X}_{\eta(s)}^{2\alpha} 1_{\{s<\tau_n\}}\,ds+$$

$$+\mathrm{E}\int\limits_0^t\int\limits_R \big|(\overline{X}_s+|\overline{Z}_{s-}+q(\overline{X}_{\eta(s)},y)|-|\overline{Z}_{s-}|)^{2p}-$$

$$-\overline{X}_s^{2p}-\overline{X}_s^{2p-1}2p(|\overline{Z}_{s-}+q(\overline{X}_{\eta(s)},y)|-|\overline{Z}_{s-}|)\big|1_{\{s<\tau_n\}}\Pi(dy)ds :=$$

$$:= x_0^{2p}+I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Оцінимо вищевказані доданки. Для оцінок використаємо нерівність Юнга

$$I_1\le(2p-1)\mathrm{E}\int\limits_0^t \overline{X}_s^{2p}1_{\{s<\tau_n\}}\,ds+\mathrm{E}\int\limits_0^t |a(\overline{X}_{\eta(s)})|^{2p}1_{\{s<\tau_n\}}\,ds\le$$

$$\le C+C\mathrm{E}\int\limits_0^t \overline{X}_s^{2p}1_{\{s<\tau_n\}}\,ds+C\mathrm{E}\int\limits_0^t \overline{X}_{\eta(s)}^{2p}1_{\{s<\tau_n\}}\,ds.$$

При оцінюванні I_2 врахуємо, що $q(x,y)\ge 0$ для будь-яких $x\in\mathbb{R}^+$, $y\in\mathbb{R}$, скористаємось очевидною нерівністю $|a+b|-|a|-\operatorname{sgn} a\cdot b\le 2b$, де $b\ge 0$, та врахуємо, що внаслідок умови 3 $\int_R q(x,y)\Pi(dy)\le kx$ для будь-якого $x\in\mathbb{R}^+$. Тому

$$I_2\le 4p\mathrm{E}\int\limits_0^t\left[\overline{X}_s^{2p-1}1_{\{s<\tau_n\}}\int\limits_R q(\overline{X}_{\eta(s)},y)\Pi(dy)\right]ds\le$$

$$\le 2(2p-1)\mathrm{E}\int\limits_0^t \overline{X}_s^{2p}1_{\{s<\tau_n\}}\,ds+2\mathrm{E}\int\limits_0^t\left[\int\limits_R q(\overline{X}_{\eta(s)},y)1_{\{s<\tau_n\}}\Pi(dy)\right]^{2p}ds\le$$

$$\le C\mathrm{E}\int\limits_0^t \overline{X}_s^{2p}1_{\{s<\tau_n\}}\,ds+C\mathrm{E}\int\limits_0^t \overline{X}_{\eta(s)}^{2p}1_{\{s<\tau_n\}}\,ds.$$

При оцінюванні I_3 знову скористаємось нерівністю Юнга та тим, що $x^\alpha\le 1+x$, $\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right)$, $x>0$:

$$I_3\le C+C\mathrm{E}\int\limits_0^t \overline{X}_s^{2p}1_{\{s<\tau_n\}}\,ds+C\mathrm{E}\int\limits_0^t \overline{X}_{\eta(s)}^{2p}1_{\{s<\tau_n\}}\,ds.$$

При оцінюванні інтеграла I_4 зауважимо, що він має вигляд

$$\mathrm{E}\int\limits_0^t\int\limits_R |f(\overline{X}_s+Y_s)-f(\overline{X}_s)-f'(\overline{X}_s)Y_s|1_{\{s<\tau_n\}}\Pi(dy)ds,$$

де $Y_s = |\overline{Z}_{s-} + q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)| - |\overline{Z}_{s-}|$, $f(x) = x^{2p}$. Застосувавши формулу Лагранжа, одержимо оцінку

$$|I_4| \leq \mathrm{E}\int\limits_0^t \int\limits_R |Y_s|\,|f'(\theta) - f'(\overline{X}_s)| 1_{\{s<\tau_n\}} \Pi(dy)ds \leq$$

$$\leq C\mathrm{E}\int\limits_0^t \int\limits_R q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)(\overline{X}_s^{2p-1} + \left[q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)\right]^{2p-1}) 1_{\{s<\tau_n\}} \Pi(dy)ds \leq$$

$$\leq C\mathrm{E}\int\limits_0^t \overline{X}_s^{2p} 1_{\{s<\tau_n\}}\, ds +$$

$$+ C\mathrm{E}\int\limits_0^t \left[\int\limits_R q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)\Pi(dy)\right]^{2p} 1_{\{s<\tau_n\}}\, ds + C\mathrm{E}\int\limits_0^T \int\limits_R \left[q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)\right]^{2p} \Pi(dy)ds \leq$$

$$\leq C + C\mathrm{E}\int\limits_0^t \overline{X}_s^{2p} 1_{\{s<\tau_n\}}\, ds + C\mathrm{E}\int\limits_0^t \overline{X}_{\eta(s)}^{2p} 1_{\{s<\tau_n\}}\, ds,$$

де θ позначає деяке проміжне значення між $\overline{X}_s$ та $\overline{X}_s + Y_s$.

Тому з вищенаведених оцінок одержуємо

$$\mathrm{E}\overline{X}_t^{2p} 1_{\{t<\tau_n\}} \leq C + C\mathrm{E}\int\limits_0^t \overline{X}_s^{2p} 1_{\{s<\tau_n\}}\, ds + C\mathrm{E}\int\limits_0^t \overline{X}_{\eta(s)}^{2p} 1_{\{s<\tau_n\}}\, ds. \qquad (6)$$

Далі з означення $\overline{X}_s$ одержуємо

$$\mathrm{E}\overline{X}_s^{2p} 1_{\{s<\tau_n\}} = \mathrm{E}\Bigg|\overline{X}_{\eta(s)} + (s - \eta(s))a(\overline{X}_{\eta(s)}) + \sigma\overline{X}_{\eta(s)}^{\alpha}(W_s - W_{\eta(s)}) +$$

$$+ \int\limits_R q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)(\tilde{\nu}(s, dy) - \tilde{\nu}(\eta(s), dy))\Bigg|^{2p} 1_{\{s<\tau_n\}} \leq$$

$$\leq C + C\mathrm{E}\overline{X}_{\eta(s)}^{2p} 1_{\{s<\tau_n\}} + C\mathrm{E}(1 + \overline{X}_{\eta(s)})^{2p} 1_{\{s<\tau_n\}} + C\mathrm{E}\overline{X}_{\eta(s)}^{2\alpha p} 1_{\{s<\tau_n\}} +$$

$$+ C\mathrm{E}\left(\int\limits_R q(\overline{X}_{\eta(s)}, y) 1_{\{s<\tau_n\}} \tilde{\nu}(s, dy)\right)^{2p} +$$

$$+ C\mathrm{E}\left(\int\limits_R q(\overline{X}_{\eta(s)}, y) 1_{\{s<\tau_n\}} \tilde{\nu}(\eta(s), dy)\right)^{2p} \leq C + C\mathrm{E}\overline{X}_{\eta(s)}^{2p} 1_{\{s<\tau_n\}}. \qquad (7)$$

У вищенаведених оцінках ми використали умови на коефіцієнти стохастичного диференціального рівняння та нерівність Буркхолдера – Девіса – Ганді. Тому з оцінки (6), використовуючи (7), одержуємо

$$\mathrm{E}\overline{X}_t^{2p} 1_{\{t<\tau_n\}} \le C + C\mathrm{E}\int_0^t \overline{X}_{\eta(s)}^{2p} 1_{\{s<\tau_n\}}\, ds,$$

звідки

$$\mathrm{E}\overline{X}_{\eta(t)}^{2p} 1_{\{\eta(t)<\tau_n\}} \le C + C\mathrm{E}\int_0^{\eta(t)} \overline{X}_{\eta(s)}^{2p} 1_{\{s<\tau_n\}}\, ds \le C + C\mathrm{E}\int_0^t \overline{X}_{\eta(s)}^{2p} 1_{\{\eta(s)<\tau_n\}}\, ds.$$

Використовуючи лему Гронуолла, маємо

$$\sup_{j=0,\ldots,N} \mathrm{E}\big(\overline{X}_{t_j}^{2p}\big) 1_{\{t_j<\tau_n\}} \le C.$$

Переходячи до границі при $n\to\infty$, отримуємо

$$\sup_{j=0,\ldots,N} \mathrm{E}\big(\overline{X}_{t_j}^{2p}\big) \le C.$$

З оцінки (7) випливає, що $\mathrm{E}\overline{X}_t^{2p} \le C$, а тому й $\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{E}\overline{X}_t^{2p} \le C$. Використовуючи цю оцінку, нерівність Буркхолдера – Девіса – Ганді та оцінки $I_1,\ldots,I_4$, завершуємо доведення леми.

Лема 2. *Нехай випадковий процес* $\{X_t,\, 0\le t\le T\}$ *є розв'язком стохастичного диференціального рівняння* (1), *для коефіцієнтів якого виконуються умови* 1 – 3 *та умова* $a(0)>0$. *Тоді для будь-якого* $p>0$ *існує стала* $C=C(p)>0$ *така, що*

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{E}\frac{1}{X_t^p} \le C.$$

Доведення. Застосувавши узагальнену формулу Іто до функції $f(x)=x^{-p}$ та розв'язку X_t рівняння (1), поки що формально запишемо

$$X_t^{-p} = x_0^{-p} - p\int_0^t X_s^{-p-1} a(X_s)\, ds +$$

$$+\frac{1}{2}p(p+1)\int_0^t X_s^{-p-2}\sigma^2 X_s^{2\alpha}\, ds - p\int_0^t X_s^{-p-1} X_s^{\alpha}\, dW_s +$$

$$+\int_0^t\int_R \Big\{(X_s+q(X_s,y))^{-p} - X_s^{-p} + pX_s^{-p-1}q(X_s,y)\Big\}\Pi(dy)ds +$$

$$+\int_0^t\int_R \Big\{(X_s+q(X_s,y))^{-p} - X_s^{-p}\Big\}\tilde{\nu}(dy,ds). \tag{8}$$

Розглянемо наступні моменти зупинки: $\tau_\varepsilon = \inf\{0<s\le T\colon X_s\le\varepsilon\}$, $\inf\{\varnothing\}=T$, $\varepsilon>0$. Домножаючи ліву й праву частини зображення (8) на $1_{\{t<\tau_\varepsilon\}}$, використовуючи те, що $a(x)\ge a(0)-kx$ для будь-якого $x\in\mathbb{R}^+$, та умови 2, 3, одержуємо

$$\mathrm{E}X_t^{-p}1_{\{t<\tau_\varepsilon\}} \leq x_0^{-p} - p\mathrm{E}\int\limits_0^t X_s^{-p-1}a(X_s)1_{\{t<\tau_\varepsilon\}}\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}p(p+1)\mathrm{E}\int\limits_0^t X_s^{-p-2}\sigma^2 X_s^{2\alpha}1_{\{t<\tau_\varepsilon\}}\,ds +$$

$$+\mathrm{E}\int\limits_0^t\int\limits_R \Big\{(X_s+q(X_s,y))^{-p} - X_s^{-p} + pX_s^{-p-1}q(X_s,y)\Big\}1_{\{t<\tau_\varepsilon\}}\,\Pi(dy)ds \leq$$

$$\leq x_0^{-p} + kp\mathrm{E}\int\limits_0^t X_s^{-p}1_{\{s<\tau_\varepsilon\}}\,ds +$$

$$+\mathrm{E}\int\limits_0^t (p(p+1)\frac{\sigma^2}{2}X_s^{-p+2(\alpha-1)} - pa(0)X_s^{-p-1})1_{\{t<\tau_\varepsilon\}}\,ds +$$

$$+\mathrm{E}\int\limits_0^t\int\limits_R \Big\{(X_s+q(X_s,y))^{-p} - X_s^{-p}\Big\}1_{\{t<\tau_\varepsilon\}}\,\Pi(dy)ds +$$

$$+\mathrm{E}\int\limits_0^t\int\limits_R pX_s^{-p-1}(q(X_s,y)-q(0,y))\}1_{\{t<\tau_\varepsilon\}}\,\Pi(dy)ds \leq$$

$$\leq x_0^{-p} + kp\mathrm{E}\int\limits_0^t X_s^{-p}1_{\{s<\tau_\varepsilon\}}\,ds +$$

$$+\mathrm{E}\int\limits_0^t \left(p(p+1)\frac{\sigma^2}{2}X_s^{-p+2(\alpha-1)} - pa(0)X_s^{-p-1}\right)1_{\{t<\tau_\varepsilon\}}\,ds +$$

$$+kp\mathrm{E}\int\limits_0^t X_s^{-p}1_{\{s<\tau_\varepsilon\}}\,ds,$$

де в останній нерівності для оцінки останнього доданка ми скористались тим, що $q(0,y)=0$ для будь-якого $y\in\mathbb{R}$. Також неважко переконатись, що

$$p(p+1)\frac{\sigma^2}{2}x^{-p+2(\alpha-1)} - pa(0)x^{-p-1}$$

при будь-якому $x>0$ обмежене зверху деякою додатною сталою C. Тому

$$\mathrm{E}X_t^{-p}1_{\{t<\tau_\varepsilon\}} \leq x_0^{-p} + C + 2kp\mathrm{E}\int\limits_0^t X_s^{-p}1_{\{s<\tau_\varepsilon\}}\,ds.$$

Використовуючи нерівність Гронуолла, маємо

$$\mathrm{E}X_t^{-p}1_{\{t<\tau_\varepsilon\}} \leq C.$$

Переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$, одержуємо

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{E}\frac{1}{X_t^p} \le C.$$

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Нехай випадковий процес* $\{X_t,\, 0 \le t \le T\}$ *є розв'язком стохастичного диференціального рівняння* (1), *для коефіцієнтів якого виконуються умови* $1-3$ *та умова* $a(0) > 0$. *Тоді*:

1) *існує таке* n_0, *що для будь-якого n — кількості інтервалів у розбитті відрізка* $[0,T]$, $n \ge n_0$, *виконується нерівність*

$$\mathbb{P}(\overline{Z}_t \le 0) \le \frac{1}{2}\mathrm{E}\exp\left(-\frac{\overline{X}_{\eta(t)}^{2-2\alpha}(1-2k\Delta t)^2}{2\sigma^2\Delta t}\right),$$

де $\overline{Z}_t$ *означено в* (3);

2) *при цьому у випадку* $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *існує таке* $\beta_0 > 0$, *що*

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{P}(\overline{Z}_t \le 0) \le \exp\left(-\frac{C}{(\Delta t)^{\beta_0}}\right).$$

Доведення. 1. Зауважимо, що внаслідок умови $q(0,y) = 0$ для всіх $y \in \mathbb{R}$ у випадку $\overline{X}_{\eta(t)} = 0$ маємо $\overline{Z}_t = (t-\eta(t))a(0) > 0$, тому далі будемо розглядати лише умовну ймовірність при $\overline{X}_{\eta(t)} > 0$. Тоді

$$\mathbb{P}(\overline{Z}_t \le 0) = \mathbb{P}\Bigg(\overline{X}_{\eta(t)} + (t-\eta(t))a(\overline{X}_{\eta(t)}) +$$

$$+\sigma\overline{X}_{\eta(t)}^{\alpha}(W_t - W_{\eta(t)}) + \int\limits_R q(\overline{X}_{\eta(t)}, y)(\tilde{\nu}(t,dy) - \tilde{\nu}(\eta(t),dy)) \le 0\Bigg) =$$

$$= \mathbb{P}\Bigg(\overline{X}_{\eta(t)} + (t-\eta(t))a(\overline{X}_{\eta(t)}) + \sigma\overline{X}_{\eta(t)}^{\alpha}(W_t - W_{\eta(t)}) +$$

$$+ \int\limits_R q(\overline{X}_{\eta(t)}, y)(\nu(t,dy) - \nu(\eta(t),dy)) \le \int\limits_R q(\overline{X}_{\eta(t)}, y)\,\Pi(dy)(t-\eta(t))\Bigg),$$

де в останній рівності ми використали те, що $\tilde{\nu}(ds,dy) = \nu(ds,dy) - \Pi(dy)ds$, та умову 3, за якою $\int_R q(x,y)\,\Pi(dy) \le kx$ для всіх $x \in \mathbb{R}^+$. Одержуємо

$$\mathbb{P}(\overline{Z}_t \le 0) \le \mathbb{P}\Bigg(\overline{X}_{\eta(t)} + (t-\eta(t))a(\overline{X}_{\eta(t)}) + \sigma\overline{X}_{\eta(t)}^{\alpha}(W_t - W_{\eta(t)}) +$$

$$+ \int\limits_R q(\overline{X}_{\eta(t)}, y)(\nu(t,dy) - \nu(\eta(t),dy)) \le k\overline{X}_{\eta(t)}(t-\eta(t))\Bigg) =$$

$$= \mathbb{P}\Bigg(\overline{X}_{\eta(t)}(1 - k(t-\eta(t))) + (t-\eta(t))a(\overline{X}_{\eta(t)}) + \sigma\overline{X}_{\eta(t)}^{\alpha}(W_t - W_{\eta(t)}) +$$

$$+\int\limits_R q(\overline{X}_{\eta(t)},y)(\nu(t,dy)-\nu(\eta(t),dy))\leq 0\Bigg)\leq$$

$$\leq\mathbb{P}\Bigg(W_t-W_{\eta(t)}\leq\frac{-\overline{X}_{\eta(t)}(1-k(t-\eta(t)))-(t-\eta(t))a(\overline{X}_{\eta(t)})}{\sigma\overline{X}^{\alpha}_{\eta(t)}}-$$

$$-\frac{\int_R q(\overline{X}_{\eta(t)},y)(\tilde{\nu}(t,dy)-\tilde{\nu}(\eta(t),dy))}{\sigma\overline{X}^{\alpha}_{\eta(t)}},\ \overline{X}_{\eta(t)}>0\Bigg).$$

Внаслідок ліпшицевості коефіцієнта зносу $a(x)\geq a(0)-kx$ для всіх $x\in\mathbb{R}^+$. Використовуючи нерівність для гауссівських випадкових величин, одержуємо

$$\mathbb{P}(\overline{Z}_t\leq 0)\leq\frac{1}{2}\mathrm{E}1_{\{\overline{X}_\eta(t)>0\}}\exp\Bigg[-\frac{\big(\overline{X}_{\eta(t)}(1-2k(t-\eta(t)))+a(0)(t-\eta(t))\big)}{2\sigma^2\overline{X}^{2\alpha}_{\eta(t)}(t-\eta(t))}+$$

$$+\frac{\int_R q(\overline{X}_{\eta(t)},y)(\nu(t,dy)-\nu(\eta(t),dy))\big)^2}{2\sigma^2\overline{X}^{2\alpha}_{\eta(t)}(t-\eta(t))}\Bigg]\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\mathrm{E}1_{\{\overline{X}_\eta(t)>0\}}\exp\Bigg[-\frac{\big(\overline{X}_{\eta(t)}(1-2k\Delta t)+a(0)(t-\eta(t))\big)}{2\sigma^2\overline{X}^{2\alpha}_{\eta(t)}\Delta t}+$$

$$+\frac{\int_R q(\overline{X}_{\eta(t)},y)(\nu(t,dy)-\nu(\eta(t),dy))\big)^2}{2\sigma^2\overline{X}^{2\alpha}_{\eta(t)}\Delta t}\Bigg].\qquad(9)$$

При достатньо великому n — кількості інтервалів у розбитті відрізка $[0,T]$ — маємо $1-2k\Delta t>0$. Тому

$$\mathbb{P}(\overline{Z}_t\leq 0)\leq\frac{1}{2}\mathrm{E}\Bigg(\exp\Bigg[-\frac{\overline{X}^2_{\eta(t)}(1-2k\Delta t)^2}{2\sigma^2\overline{X}^{2\alpha}_{\eta(t)}\Delta t}\Bigg]1_{\{\overline{X}_\eta(t)>0\}}\Bigg)\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\mathrm{E}\exp\Bigg[-\frac{\overline{X}^{2-2\alpha}_{\eta(t)}(1-2k\Delta t)^2}{2\sigma^2\Delta t}\Bigg],$$

звідки одержуємо перше твердження леми.

2. Розглянемо тепер випадок $\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. При достатньо великому n — кількості інтервалів у розбитті відрізка $[0,T]$ — маємо $1-2k\Delta t\geq\frac{1}{2}$. Тому з оцінки (9) одержуємо

$$\mathbb{P}(\overline{Z}_t\leq 0)\leq\frac{1}{2}\mathrm{E}\Bigg(\exp\Bigg[-\frac{\overline{X}^{2(1-\alpha)}_{\eta(t)}}{8\sigma^2\Delta t}\Bigg]\exp\Bigg(-\frac{a(0)}{2\sigma^2\overline{X}^{2\alpha-1}_{\eta(t)}}\Bigg)1_{\{\overline{X}_\eta(t)>0\}}\Bigg).$$

Розглядаючи події $(\overline{X}_{\eta(t)} \le \sqrt{\Delta t})$ та $(\overline{X}_{\eta(t)} > \sqrt{\Delta t})$, отримуємо

$$\mathbb{P}(\overline{Z}_t \le 0) \le \frac{1}{2}\mathrm{E}\Bigg[\exp\left(-\frac{(\sqrt{\Delta t})^{2(1-\alpha)}}{8\sigma^2 \Delta t}\right)1_{\{\overline{X}_\eta(t) > \sqrt{\Delta t}\}} +$$

$$+\exp\left(-\frac{a(0)}{2\sigma^2(\sqrt{\Delta t})^{2\alpha-1}}\right)1_{\{0<\overline{X}_\eta(t)\le\sqrt{\Delta t}\}}\Bigg],$$

що й завершує доведення другого твердження леми.

Лема 4. *Нехай виконано умови леми* 1. *Тоді існує така стала* $C = C(p) > 0$, *що для всіх* $t,\, s \in [0,T]$ *маємо*

$$\mathrm{E}|\overline{X}_t - \overline{X}_s|^{2p} \le C|t-s|^p.$$

Доведення. 1. Розглянемо спочатку випадок, коли s та t належать одному відрізку розбиття: $t_j \le s, t \le t_{j+1}$ для деякого j, $0 \le j \le n-1$, n — кількість інтервалів розбиття. Тоді

$$\mathrm{E}|\overline{X}_t - \overline{X}_s|^{2p} = \mathrm{E}\Bigg|a(\overline{X}_{t_j})(t-s) + \sigma\overline{X}_{t_j}^{\alpha}(W_t - W_s) +$$

$$+\int\limits_R q(\overline{X}_{t_j}, y)(\tilde{\nu}(t,dy) - \tilde{\nu}(s,dy))\Bigg|^{2p} \le$$

$$\le C|t-s|^{2p}\mathrm{E}|a(\overline{X}_{t_j})|^{2p} + C|t-s|^p\mathrm{E}|\sigma\overline{X}_{t_j}^{\alpha}|^{2p} +$$

$$+C\mathrm{E}\left|\int\limits_s^t\int\limits_R q^2(X_{t_j}, y)\,\Pi(dy)du\right|^p.$$

Використовуючи оцінку (5) та умови 1, 2 на коефіцієнти стохастичного диференціального рівняння, одержуємо

$$\mathrm{E}|\overline{X}_t - \overline{X}_s|^{2p} \le C|t-s|^{2p} + C|t-s|^p \le C|t-s|^p$$

для достатньо дрібного розбиття.

2. Розглянемо тепер загальний випадок $\eta(s) < \eta(t)$, $\eta(s) = t_i$, $\eta(t) = t_j$ для деяких i, j, $0 \le i, j \le n$. Тоді

$$\mathrm{E}|\overline{X}_t - \overline{X}_s|^{2p} \le C\mathrm{E}|\overline{X}_t - \overline{X}_{t_j}|^{2p} + C\mathrm{E}\sum_{r=i+1}^{j-1}|\overline{X}_{t_{r+1}} - \overline{X}_{t_r}|^{2p} + C\mathrm{E}|\overline{X}_s - \overline{X}_{t_{i+1}}|^{2p}.$$

Кожен із доданків суми задовольняє перший випадок, розглянутий при доведенні даної леми. Тому

$$\mathrm{E}|\overline{X}_t - \overline{X}_s|^{2p} \le C|t-t_j|^p + C\sum_{r=i+1}^{j-1}|t_{r+1} - t_r|^p + C|s - t_{i+1}|^p \le$$

$$\le C\left(|t-t_j| + \sum_{r=i+1}^{j-1}|t_{r+1} - t_r| + |s - t_{i+1}|\right)^p = C|t-s|^p.$$

Лему 4 доведено.

У наступній лемі та подальших твердженнях ми обмежуємо розгляд випадком $\alpha \in \left[\frac{3}{4}, 1\right)$.

Лема 5. *Нехай випадковий процес* $\{X_t,\ 0 \le t \le T\}$ *є розв'язком стохастичного диференціального рівняння* (1), *для коефіцієнтів якого виконуються умови* $1-3$ *та умова* $a(0) > 0$. *Нехай* $\alpha \in \left[\frac{3}{4}, 1\right)$. *Тоді для будь-якого* $\mu \ge 0$ *існує стала* $C = C(T, x_0, \mu)$ *така, що*

$$\mathrm{E}\exp\left(\mu \int_0^T X_s^{2(\alpha-1)}\, ds\right) \le C.$$

Доведення. За нерівністю Йєнсена

$$\mathrm{E}\exp\left(\mu \int_0^T X_s^{2(\alpha-1)}\, ds\right) \le \mathrm{E}\int_0^T \exp\Big(\mu X_s^{2(\alpha-1)}\Big)\, ds.$$

Застосуємо формулу Іто до функції $f(x) = \exp(\mu x^{2(\alpha-1)})$. При цьому $f'(x) = 2\mu(\alpha-1)x^{2\alpha-3}\exp(\mu x^{2(\alpha-1)})$, $f''(x) = 2\mu(\alpha-1)(2\alpha-3)x^{2(\alpha-2)}\exp(\mu x^{2(\alpha-1)}) + 4\mu^2(\alpha-1)^2 x^{4\alpha-6}\exp(\mu x^{2(\alpha-1)})$. Тоді

$$\exp(\mu X_t^{2(\alpha-1)}) = \exp(\mu x_0^{2(\alpha-1)}) + \int_0^t 2\mu(\alpha-1)X_s^{2\alpha-3}\exp(\mu X_s^{2(\alpha-1)})a(X_s)\, ds +$$

$$+ \int_0^t \sigma^2 X_s^{2\alpha}\exp(\mu X_s^{2(\alpha-1)})\Big\{\mu(\alpha-1)(2\alpha-3)X_s^{2(\alpha-2)} + 2\mu^2(\alpha-1)^2 X_s^{4\alpha-6}\Big\}ds +$$

$$+ \int_0^t \int_R \Big\{\exp(\mu(X_s + q(X_s,y))^{2(\alpha-1)}) - \exp(\mu X_s^{2(\alpha-1)}) -$$

$$-2\mu(\alpha-1)X_s^{2\alpha-3}\exp(\mu X_s^{2(\alpha-1)})q(X_s,y)\Big\}\Pi(dy)ds +$$

$$+ \int_0^t 2\mu(\alpha-1)X_s^{3(\alpha-1)}\exp(\mu X_s^{2(\alpha-1)})\sigma X^{\alpha}\, dW_s +$$

$$+ \int_0^t \int_R \Big\{\exp(\mu(X_s + q(X_s,y))^{2(\alpha-1)}) - \exp(\mu X_s^{2(\alpha-1)})\Big\}\tilde{\nu}(ds,dy). \qquad (10)$$

При оцінюванні другого доданка правої частини (10) врахуємо те, що $a(x) \ge a(0) - kx$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}^+$. При оцінюванні четвертого доданка скористаємося тим, що різниця перших двох підінтегральних виразів недодатна і $\int_R q(x,y)\Pi(dy) \le kx$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}^+$. Тоді

$$\mathrm{E}\exp(\mu X_t^{2(\alpha-1)}) \le$$

$$\le \exp(\mu x_0^{2(\alpha-1)}) + \mathrm{E}\int_0^t 2\mu(\alpha-1)X_s^{2\alpha-3}\exp(\mu X_s^{2(\alpha-1)})a(X_s)ds+$$

$$+\int_0^t \sigma^2 X_s^{2\alpha}\exp(\mu X_s^{2(\alpha-1)})\Big\{\mu(\alpha-1)(2\alpha-3)X_s^{2(\alpha-2)}+2\mu^2(\alpha-1)^2X_s^{4\alpha-6}\Big\}ds-$$

$$-\mathrm{E}\int_0^t\int_R 2\mu(\alpha-1)X_s^{2\alpha-3}\exp(\mu X_s^{2(\alpha-1)})q(X_s,y)\Pi(dy)ds \le$$

$$\le \exp(\mu x_0^{2(\alpha-1)}) + \mathrm{E}\int_0^t 2\mu(\alpha-1)(a(0)-kX_s)X_s^{2\alpha-3}\exp(\mu X_s^{2(\alpha-1)})\,ds+$$

$$+\int_0^t \sigma^2 X_s^{2\alpha}\exp(\mu X_s^{2(\alpha-1)})\{\mu(\alpha-1)(2\alpha-3)X_s^{2(\alpha-2)}+2\mu^2(\alpha-1)^2X_s^{4\alpha-6}\}ds-$$

$$-\mathrm{E}\int_0^t\int_R 2\mu(\alpha-1)kX_s^{2(\alpha-1)}\exp(\mu X_s^{2(\alpha-1)})ds \le$$

$$\le \exp(\mu x_0^{2(\alpha-1)}) + \mathrm{E}\int_0^t \exp(\mu X_s^{2(\alpha-1)})X_s^{2\alpha-3}\Big\{2\mu(\alpha-1)a(0)+$$

$$+4\mu(1-\alpha)kX_s+\sigma^2\mu(\alpha-1)(2\alpha-3)X_s^{2\alpha-1}+2\sigma^2\mu^2(\alpha-1)^2X_s^{4\alpha-3}\Big\}\,ds.$$

При оцінюванні останнього інтеграла врахуємо, що оскільки $\alpha \in \left[\frac{3}{4}, 1\right)$ та $2\mu(\alpha-$ $-1)a(0) < 0$, то існує таке $\varepsilon_1 > 0$, що

$$2\mu(\alpha-1)a(0)+4\mu(1-\alpha)k\varepsilon+\sigma^2\mu(\alpha-1)(2\alpha-3)\varepsilon^{2\alpha-1}+2\sigma^2\mu^2(\alpha-1)^2\varepsilon^{4\alpha-3}<0$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$. Тому

$$\mathrm{E}\exp(\mu X_t^{2(\alpha-1)}) \le \exp(\mu x_0^{2(\alpha-1)}) + \mathrm{E}\int_0^t \exp(\mu X_s^{2(\alpha-1)})\Big\{4\mu(1-\alpha)kX_s^{2(\alpha-1)}+$$

$$+\sigma^2\mu(\alpha-1)(2\alpha-3)X_s^{4(\alpha-1)}+2\sigma^2\mu^2(\alpha-1)^2X_s^{6(\alpha-1)}\Big\}\,ds \le$$

$$\le \exp(\mu x_0^{2(\alpha-1)}) + T\exp(\mu\varepsilon_1^{2(\alpha-1)})\Big\{4\mu(1-\alpha)k\varepsilon_1^{2(\alpha-1)}+$$

$$+\sigma^2\mu(\alpha-1)(2\alpha-3)\varepsilon_1^{4(\alpha-1)}+2\sigma^2\mu^2(\alpha-1)^2\varepsilon_1^{6(\alpha-1)}\Big\} = C,$$

звідки й випливає твердження леми.

3. Локальна оцінка швидкості збіжності. Означимо випадковий процес $(\gamma(t))_{t\geq 0}$ таким чином:

$$\gamma(t) = \int_0^t \frac{ds}{(X_s^{1-\alpha} + \overline{X}_{\eta(s)}^{1-\alpha})^2}.$$

Коректність означення даного випадкового процесу випливає з того, що випадкові процеси X та $\overline{X}$ з імовірністю 1 невід'ємні, та з леми 2.

Означимо момент зупинки τ_λ:

$$\tau_\lambda = \inf\big\{s \in [0,T],\, \gamma(s) + s \geq \lambda\big\}, \quad \inf\varnothing = T. \tag{11}$$

Нам знадобиться наступний результат.

Теорема 1. *Нехай випадковий процес* $\{X_t,\ 0 \leq t \leq T\}$ *є розв'язком стохастичного диференціального рівняння* (1), *для коефіцієнтів якого виконуються умови* $1-3$ *та умова* $a(0) > 0$, $\alpha \in \Big[\dfrac{3}{4}, 1\Big)$. *Нехай також для деякого цілого* $p \geq 1$ *при* $l = 2p$ *виконуються умова* C_1) *та наступна умова*:

C_2) $\displaystyle\int_R |q(x_1,y) - q(x_2,y)|^l \Pi(dy) \leq k|x_1 - x_2|^l$ *для будь-яких* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$.

Тоді для всіх $\lambda \geq 0$ *існує стала* $\tilde{C}(p,T) > 0$, *що не залежить від* Δt *та* λ, *для якої*

$$\mathrm{E}|\overline{X}_{\tau_\lambda} - X_{\tau_\lambda}|^{2p} \leq \tilde{C}(p,T)(\Delta t)^p \exp(\tilde{C}(p,T)\lambda).$$

Доведення. Означимо випадковий процес $(\varepsilon_t)_{0\leq t\leq T}$ таким чином: $\varepsilon_t := \overline{X}_t - X_t$. Використовуючи зображення (4) для випадкового процесу $\overline{X}$, одержуємо

$$\varepsilon_t = \int_0^t \Big(\operatorname{sgn}(\overline{Z}_{s-})a(\overline{X}_{\eta(s)}) - a(X_s)\Big)\,ds +$$

$$+ \int_0^t \int_R \Big[|\overline{Z}_{s-} + q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)| - |\overline{Z}_{s-}| - \operatorname{sgn}(\overline{Z}_{s-})q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)\Big]\Pi(dy)ds +$$

$$+\sigma \int_0^t \Big(\operatorname{sgn}(\overline{Z}_{s-})\overline{X}_{\eta(s)}^\alpha - X_s^\alpha\Big)\,dW_s +$$

$$+ \int_0^t \int_R \Big[|\overline{Z}_{s-} + q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)| - |\overline{Z}_{s-}| - q(X_s, y)\Big]\tilde{\nu}(ds, dy) + L_t^0(\overline{X}).$$

Для довільного моменту зупинки $\tau \in [0,T]$ застосуємо узагальнену формулу Іто до випадкового процесу ε_t та функції $f(x) = x^{2p}$. При цьому врахуємо, що $\displaystyle\int_0^\tau (\varepsilon_s)^{2p-1}\,dL_s^0(\overline{X}) = \int_0^\tau (-X_s)^{2p-1}\,dL_s^0(\overline{X}) \leq 0$. Тому

$$\mathrm{E}\varepsilon_\tau^{2p} = 2p\mathrm{E}\int_0^\tau \varepsilon_s^{2p-1}\Big(\operatorname{sgn}(\overline{Z}_{s-})a(\overline{X}_{\eta(s)}) - a(X_s)\Big)\,ds +$$

$$+2p\mathrm{E}\int_0^\tau\int_R \varepsilon_s^{2p-1}\Big[|\overline{Z}_{s-}+q(\overline{X}_{\eta(s)},y)|-|\overline{Z}_{s-}|-\mathrm{sgn}(\overline{Z}_{s-})q(\overline{X}_{\eta(s)},y)\Big]\Pi(dy)ds+$$

$$+p(2p-1)\sigma^2\mathrm{E}\int_0^\tau \varepsilon_s^{2p-2}\Big(\mathrm{sgn}(\overline{Z}_{s-})\overline{X}^\alpha_{\eta(s)}-X_s^\alpha\Big)^2 ds+$$

$$+\mathrm{E}\int_0^\tau\int_R \Big[(\varepsilon_s+\tilde{q}(s,y))^{2p}-\varepsilon_s^{2p}-2p\varepsilon_s^{2p-1}\tilde{q}(s,y)\Big]\Pi(dy)ds := I_1+I_2+I_3+I_4,$$

де $\tilde{q}(s,y) := |\overline{Z}_{s-}+q(\overline{X}_{\eta(s)},y)|-|\overline{Z}_{s-}|-q(X_s,y)$.

Оцінимо I_2. Зауважимо, що підінтегральний вираз в I_2 має вигляд $\varepsilon_s^{2p-1}[|a+b|-|a|-\mathrm{sgn}\ a\cdot b]$, де $b\geq 0$. Скористаємось очевидною нерівністю $|a+b|-|a|-\mathrm{sgn}\ a\cdot b\leq 2b\cdot 1_{\{a<0\}}$, $b\geq 0$. Тоді

$$I_2\leq 4p\mathrm{E}\int_0^\tau\int_R |\varepsilon_s|^{2p-1}q(\overline{X}_{\eta(s)},y)1_{\{\overline{Z}_{s-}\leq 0\}}\,\Pi(dy)ds\leq$$

$$\leq 4pk\mathrm{E}\int_0^\tau |\varepsilon_s|^{2p-1}\overline{X}_{\eta(s)}1_{\{\overline{Z}_{s-}\leq 0\}}\,ds\leq C\sqrt{\sup_{s\in[0,T]}\mathbb{P}(\overline{Z}_s\leq 0)}\leq \exp\left(-\frac{C}{(\Delta t)^{\beta_0}}\right),$$

де в передостанній рівності ми скористалися лемою 1, а в останній — лемою 3.

Оцінимо I_4. Для перетворення підінтегрального виразу скористаємося формулою Лагранжа. Тоді для деякого $\theta\in[0,1]$, що задає проміжне значення у формулі Лагранжа, маємо

$$I_4 = C\mathrm{E}\int_0^\tau\int_R \Big(\varepsilon_s+\tilde{q}(s,y)\theta)^{2p-2}(\tilde{q}(x,y)\Big)^2\Pi(dy)ds\leq$$

$$\leq C\mathrm{E}\int_0^\tau\int_R \varepsilon_s^{2p-2}(\tilde{q}(s,y))^2\Pi(dy)ds + C\mathrm{E}\int_0^\tau\int_R(\tilde{q}(s,y))^{2p}\Pi(dy)ds\leq$$

$$\leq C\mathrm{E}\int_0^\tau \varepsilon_s^{2p}ds + C\mathrm{E}\int_0^\tau\int_R(\tilde{q}(s,y))^{2p}\Pi(dy)ds.$$

При цьому в останній нерівності при оцінюванні підінтегрального виразу першого інтеграла ми використали нерівність Юнга. Далі врахуємо очевидну оцінку $\tilde{q}(s,y)\leq q(\overline{X}_{\eta(s)},y)-q(X_s,y)$ та використаємо умову

$$\int_R |q(x_1,y)-q(x_2,y)|^{2p}\Pi(dy)\leq |x_1-x_2|^{2p}.$$

В результаті одержимо

$$I_4\leq C\mathrm{E}\int_0^\tau \varepsilon_s^{2p}ds + C\mathrm{E}\int_0^\tau |\overline{X}_{\eta(s)}-X_s|^{2p}ds\leq$$

$$\leq C\mathrm{E}\int_0^\tau \varepsilon_s^{2p} ds + C\mathrm{E}\int_0^\tau |\overline{X}_{\eta(s)} - \overline{X}_s|^{2p} ds + C\mathrm{E}\int_0^\tau |\overline{X}_s - X_s|^{2p} ds \leq$$

$$\leq C\mathrm{E}\int_0^\tau \varepsilon_s^{2p} ds + C(\Delta t)^p,$$

де при оцінюванні останнього інтеграла ми скористалися лемою 4.

Оцінимо $I_1 + I_3$. Для цього використаємо метод, аналогічний наведеному у роботі [3]:

$$I_1 + I_3 \leq 2p\mathrm{E}\int_0^\tau \varepsilon_s^{2p-1}(a(\overline{X}_{\eta(s)}) - a(X_s))\, ds +$$

$$+ p(2p-1)\sigma^2\mathrm{E}\int_0^\tau \varepsilon_s^{2p-2}(\overline{X}^\alpha_{\eta(s)} - X^\alpha_s)^2\, ds +$$

$$+\mathrm{E}\int_0^\tau \Big\{4p|\varepsilon_s|^{2p-1}|a(\overline{X}_{\eta(s)})| + 4p(2p-1)\sigma^2\varepsilon_s^{2p-2}\overline{X}^\alpha_{\eta(s)}\Big\}1_{\{\overline{Z}_s\leq 0\}}\, ds :=$$

$$:= I_{11} + I_{31} + I_{13}.$$

Згідно з лемами 1 та 3, як і при оцінюванні I_2, одержуємо

$$I_{13} \leq \exp\left(-\frac{C}{(\Delta t)^{\beta_0}}\right).$$

Оцінимо I_{31}. За означенням випадкового процесу $\gamma(t)$ маємо

$$I_{31} \leq p(2p-1)\sigma^2\mathrm{E}\int_0^\tau \varepsilon_s^{2p-2}(\overline{X}^\alpha_{\eta(s)} - X^\alpha_s)^2(X_s^{1-\alpha} + \overline{X}^{1-\alpha}_{\eta(s)})\, d\gamma(s).$$

Далі використаємо нерівність, яка виконується при всіх $x_1,\, x_2 \geq 0,\ \dfrac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$:

$$|x_1^\alpha - x_2^\alpha|(x_1^{1-\alpha} + x_2^{1-\alpha}) \leq 2\alpha|x_1 - x_2|.$$

Тоді

$$I_{31} \leq 4\alpha^2 p(2p-1)\sigma^2\mathrm{E}\int_0^\tau \varepsilon_s^{2p-2}(\overline{X}_{\eta(s)} - X_s)^2\, d\gamma(s).$$

Таким чином, використовуючи умову ліпшицевості коефіцієнта зносу та оцінки для I_{31} та I_{13}, одержуємо

$$I_1 + I_3 \leq \mathrm{E}\int_0^\tau |\varepsilon_s|^{2p-1}|\overline{X}_{\eta(s)} - X_s|\, ds + C\mathrm{E}\int_0^\tau \varepsilon_s^{2p-2}(\overline{X}_{\eta(s)} - X_s)^2\, d\gamma(s) + C(\Delta t)^p.$$

З огляду на нерівність Юнга маємо

$$|\varepsilon_s|^{2p-1}|\overline{X}_{\eta(s)} - X_s| \leq |\varepsilon_s|^{2p-1}(\varepsilon_s + |\overline{X}_{\eta(s)} - \overline{X}_s|) \leq C\varepsilon_s^{2p} + C|\overline{X}_{\eta(s)} - \overline{X}_s|^{2p}.$$

Так само

$$\varepsilon_s^{2p-2}|\overline{X}_{\eta(s)} - X_s|^2 \le |\varepsilon_s|^{2p-2}(\varepsilon_s^2 + |\overline{X}_{\eta(s)} - \overline{X}_s|^2) \le C\varepsilon_s^{2p} + C|\overline{X}_{\eta(s)} - \overline{X}_s|^{2p}.$$

Таким чином,

$$\mathrm{E}\varepsilon_\tau^{2p} \le C\mathrm{E}\int\limits_0^\tau \varepsilon_s^{2p}\, d(s+\gamma(s)) + C\mathrm{E}\int\limits_0^\tau |\overline{X}_{\eta(s)} - \overline{X}_s|^{2p}\, d(s+\gamma(s)) + C(\Delta t)^p.$$

Оцінимо останній інтеграл. При цьому скористаємося лемою 4 та нерівністю Гельдера

$$\mathrm{E}\int\limits_0^\tau |\overline{X}_{\eta(s)} - \overline{X}_s|^{2p}\, d(s+\gamma(s)) \le \mathrm{E}\int\limits_0^T |\overline{X}_{\eta(s)} - \overline{X}_s|^{2p}\left(1 + \frac{1}{X_s^{2-2\alpha}}\right) ds \le$$

$$\le C(\Delta t)^p + \int\limits_0^\tau \left(\mathrm{E}|\overline{X}_{\eta(s)} - \overline{X}_s|^{2pm}\right)^{1/m} (\mathrm{E}X_s^{n(2\alpha-2)})^{1/n}\, ds \le$$

$$\le C(\Delta t)^p \Big(1 + \sup_{t\in[0,T]} (\mathrm{E}X_s^{n(2\alpha-2)})^{1/n}\, ds\Big) \le C(\Delta t)^p,$$

де в останній нерівності ми використали лему 2. Таким чином,

$$\mathrm{E}\varepsilon_\tau^{2p} \le C\mathrm{E}\int\limits_0^\tau \varepsilon_s^{2p}\, d(s+\gamma(s)) + C(\Delta t)^p.$$

Покладемо $\tau = \tau_\lambda$, означеному в (11). Зауважимо, що $\tau_\lambda + \gamma(\tau_\lambda) = \lambda$. Виконуючи в останньому інтегралі заміну змінних $u = s + \gamma(s)$, отримуємо

$$\mathrm{E}\varepsilon_{\tau_\lambda}^{2p} \le C\mathrm{E}\int\limits_0^\lambda \mathrm{E}|\varepsilon_{\tau_u}|^{2p}\, du + C(\Delta t)^p.$$

Із леми Гронуолла випливає існування сталої $\tilde{C} = \tilde{C}(p,T)$ такої, що

$$\mathrm{E}\varepsilon_{\tau_\lambda}^{2p} \le \tilde{C}(p,T)(\Delta t)^p \exp(\tilde{C}(p,T)\lambda).$$

Теорему 1 доведено.

4. Основний результат. Тепер перейдемо до основного результату даної роботи — швидкості рівномірної збіжності схеми Ейлера для стохастичних диференціальних рівнянь із неліпшицевою дифузією та пуассонівською мірою.

Теорема 2. *Нехай випадковий процес* $\{X_t,\ 0 \le t \le T\}$ *є розв'язком стохастичного диференціального рівняння* (1), *для коефіцієнтів якого виконуються умови* 1–3, *умови* $a(0) > 0$, $\alpha \in \left[\frac{3}{4}, 1\right)$ *та для заданого цілого* $p \ge 1$ *нехай при* $l = 2p, 4p$ *виконуються умови* $\mathrm{C}_1)$ *та* $\mathrm{C}_2)$. *Також нехай* $\overline{X}_t$ — *випадковий процес, що задається відповідною схемою Ейлера* (2). *Тоді існує стала* $C = C(p,T)$ *така, що*

$$\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]} \left|\overline{X}(t) - X(t)\right|^{2p} \le C(\Delta t)^p.$$

Доведення. Як і при доведенні теореми 1, введемо позначення $\varepsilon_t = \overline{X}_t - X_t$ та, застосувавши узагальнену формулу Іто, одержимо

$$\varepsilon_t^{2p} = 2p\int\limits_0^t \varepsilon_s^{2p-1}\Big(\operatorname{sgn}(\overline{Z}_{s-})a(\overline{X}_{\eta(s)}) - a(X_s)\Big)\,ds+$$

$$+2p\int\limits_0^t\int\limits_R \varepsilon_s^{2p-1}\Big[|\overline{Z}_{s-} + q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)| - |\overline{Z}_{s-}| - \operatorname{sgn}(\overline{Z}_{s-})q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)\Big]\Pi(dy)ds+$$

$$+p(2p-1)\sigma^2\int\limits_0^t \varepsilon_s^{2p-2}\Big(\operatorname{sgn}(\overline{Z}_{s-})\overline{X}^{\alpha}_{\eta(s)} - X_s^{\alpha}\Big)^2\,ds+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_R\Big[(\varepsilon_s + \tilde{q}(s,y))^{2p} - \varepsilon_s^{2p} - 2p\varepsilon_s^{2p-1}\tilde{q}(s,y)\Big]\Pi(dy)ds+$$

$$+2p\sigma\int\limits_0^t \varepsilon_s^{2p-1}\Big(\overline{X}^{\alpha}_{\eta(s)}\operatorname{sgn}(\overline{Z}_s) - X_s^{\alpha}\Big)\,dW_s + \int\limits_0^t\int\limits_R\Big[(\varepsilon_s + \tilde{q}(s,y))^{2p} - \varepsilon_s^{2p}\Big]\tilde{\nu}(dy,ds),$$

де $\tilde{q}(s,y) := |\overline{Z}_{s-} + q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)| - |\overline{Z}_{s-}| - q(X_s, y)$.

Скористаємося нерівностями Буркхолдера – Девіса – Ганді для оцінювання супремумів інтегралів за вінерівським процесом та центрованою пуассонівською мірою відповідно:

$$\mathrm{E}\sup_{0\le s\le T}\varepsilon_s^{2p} = C\mathrm{E}\int\limits_0^T \varepsilon_s^{2p-1}\Big(\operatorname{sgn}(\overline{Z}_{s-})a(\overline{X}_{\eta(s)}) - a(X_s)\Big)\,ds+$$

$$+C\mathrm{E}\int\limits_0^T\int\limits_R \varepsilon_s^{2p-1}\Big[|\overline{Z}_{s-} + q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)| - |\overline{Z}_{s-}| - \operatorname{sgn}(\overline{Z}_{s-})q(\overline{X}_{\eta(s)}, y)\Big]\Pi(dy)ds+$$

$$+C\mathrm{E}\int\limits_0^T \varepsilon_s^{2p-2}\Big(\operatorname{sgn}(\overline{Z}_{s-})\overline{X}^{\alpha}_{\eta(s)} - X_s^{\alpha}\Big)^2\,ds+$$

$$+\mathrm{E}\int\limits_0^T\int\limits_R\Big[(\varepsilon_s + \tilde{q}(s,y))^{2p} - \varepsilon_s^{2p} - 2p\varepsilon_s^{2p-1}\tilde{q}(s,y)\Big]\Pi(dy)ds+$$

$$+C\left(\mathrm{E}\int\limits_0^T \varepsilon_s^{4p-2}(\overline{X}^{\alpha}_{\eta(s)}\operatorname{sgn}(\overline{Z}_s) - X_s^{\alpha})^2\,ds\right)^{1/2}+$$

$$+C\mathrm{E}\left(\int\limits_0^T\int\limits_R[(\varepsilon_s + \tilde{q}(s,y))^{2p} - \varepsilon_s^{2p}]^2\Pi(dy)ds\right)^{1/2} := I_1 + \ldots + I_6.$$

Перші чотири інтеграли оцінюються так само, як і при доведенні теореми 1. Для оцінки передостаннього інтеграла скористаємось означенням випадкового процесу $\gamma(t)$:

$$I_5 \leq C \left(\mathrm{E} \int_0^T \varepsilon_s^{4p-2} (\overline{X}_{\eta(s)} - X_s)^2 \, d\gamma(s) \right)^{1/2}.$$

Оцінимо I_6. Для перетворення підінтегрального виразу використаємо формулу Лагранжа. Тоді для деякого $\theta \in [0,1]$, що задає проміжне значення у формулі Лагранжа, маємо

$$I_6 = C\mathrm{E} \left(\int_0^T \int_R \left(\varepsilon_s + \tilde{q}(s,y)\theta \right)^{4p-2} \left(\tilde{q}(x,y) \right)^2 \Pi(dy) ds \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C\mathrm{E} \left(\int_0^T \int_R \left[\varepsilon_s^{4p-2} (\tilde{q}(s,y))^2 + (\tilde{q}(s,y))^{4p} \right] \Pi(dy) ds \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C\mathrm{E} \left(\int_0^T \varepsilon_s^{4p} \, ds + \int_0^T \int_R (\tilde{q}(s,y))^{4p} \, \Pi(dy) ds \right)^{1/2}.$$

При цьому у вищенаведених оцінках ми скористалися нерівністю Юнга. Далі, аналогічно до відповідної оцінки у теоремі 1, використовуючи умову $\int_R |q(x_1,y) - q(x_2,y)|^{4p} \Pi(dy) \leq |x_1 - x_2|^{4p}$, одержуємо

$$I_6 \leq C\mathrm{E} \left(\int_0^T \varepsilon_s^{4p} \, ds \right)^{1/2} + C(\Delta t)^p,$$

де у наведених оцінках ми скористалися лемою 4 та означенням ε_s. Для оцінювання першого доданка останньої нерівності скористаємось означенням процесу $\gamma(s)$:

$$\mathrm{E} \left(\int_0^T \varepsilon_s^{4p} \, ds \right)^{1/2} = \mathrm{E} \left(\int_0^T \varepsilon_s^{4p} (X_s^{1-\alpha} + \overline{X}_{\eta(s)}^{1-\alpha})^2 \, d\gamma(s) \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \mathrm{E} \left(\sup_{s \in [0,T]} (X_s^{1-\alpha} + \overline{X}_{\eta(s)}^{1-\alpha})^2 \int_0^T \varepsilon_s^{4p} \, d\gamma(s) \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C \left(\mathrm{E} \sup_{s \in [0,T]} (X_s^{1-\alpha} + \overline{X}_{\eta(s)}^{1-\alpha})^2 \right)^{1/2} \left(\mathrm{E} \int_0^T \varepsilon_s^{4p} \, d\gamma(s) \right)^{1/2} \leq C \left(\mathrm{E} \int_0^T \varepsilon_s^{4p} \, d\gamma(s) \right)^{1/2},$$

де в останній нерівності ми використали нерівність $x^\beta \leq C(1+x)$, $\beta \in (0,1)$, $x \geq 0$, та оцінки леми 1.

Таким чином, використовуючи вищенаведені оцінки для I_5, I_6 та аналогічні до проведених у доведенні теореми 1 для інтегралів $I_1, \ldots, I_4$, в підсумку одержуємо

$$\mathrm{E}\sup_{0\le s\le T}\varepsilon_s^{2p}\le C\mathrm{E}\int\limits_0^T\varepsilon_s^{2p}\,d(\gamma(s)+s)+C\mathrm{E}\int\limits_0^T|\overline{X}_{\eta(s)}-\overline{X}_s|^{2p}\,d(\gamma(s)+s)+$$

$$+C\left(\mathrm{E}\int\limits_0^T|\overline{X}_{\eta(s)}-\overline{X}_s|^{4p}\,d\gamma(s)\right)^{1/2}+C\left(\mathrm{E}\int\limits_0^T\varepsilon_s^{4p}\,d\gamma(s)\right)^{1/2}+C(\Delta t)^p\le$$

$$\le C\mathrm{E}\int\limits_0^T\varepsilon_s^{2p}\,d(\gamma(s)+s)+C\left(\mathrm{E}\int\limits_0^T\varepsilon_s^{4p}\,d\gamma(s)\right)^{1/2}+C(\Delta t)^p,$$

де в останній нерівності другий та третій інтеграли оцінили так само, як і при доведенні теореми 1. Виконуючи заміну змінних $u=s+\gamma(s)$, одержуємо

$$\mathrm{E}\sup_{0\le s\le T}\varepsilon_s^{2p}\le C\mathrm{E}\int\limits_0^{\gamma(T)+T}\varepsilon_{\tau_u}^{2p}\,du+C\left(\mathrm{E}\int\limits_0^{\gamma(T)+T}\varepsilon_{\tau_u}^{4p}\,du\right)^{1/2}+C(\Delta t)^p.$$

Оцінимо два перших інтеграли. Для $r=1,2$ маємо

$$\left(\mathrm{E}\int\limits_0^{\gamma(T)+T}\varepsilon_{\tau_u}^{2rp}\,du\right)^{1/r}=\left(\int\limits_0^{\infty}\mathrm{E}(1_{\{\gamma(T)+T\ge u\}}\varepsilon_{\tau_u}^{2rp})\,du\right)^{1/r}\le$$

$$\le\left(\int\limits_0^T\varepsilon_{\tau_u}^{2rp}\,du\right)^{1/r}+\left(\int\limits_T^{\infty}\left[\mathbb{P}(\gamma(T)+T\ge u)\right]^{1/2}[\varepsilon_{\tau_u}^{4rp}]^{\frac{1}{2}}\,du\right)^{1/r}\le$$

$$\le(\Delta t)^p\left(C+C\int\limits_0^{\infty}\left[\mathbb{P}(\gamma(T)\ge u)\right]^{1/2}\exp\left(\frac{\tilde{C}(2pr)u}{2}\right)du\right)^{1/r},$$

де в останній нерівності ми скористались оцінками з теореми 1. Таким чином,

$$\mathrm{E}\sup_{0\le s\le T}\varepsilon_s^{2p}\le C(\Delta t)^p\left(C+C\int\limits_0^{\infty}\left[\mathbb{P}(\gamma(T)\ge u)\right]^{1/2}\exp\left(\frac{\tilde{C}(4p)u}{2}\right)du\right).\qquad(12)$$

За нерівністю Маркова для $\mu>0$ маємо

$$\left[\mathbb{P}(\gamma(T)\ge u)\right]^{1/2}\le\exp(-\mu u)\Big(\mathrm{E}\exp(2\mu\gamma(T))\Big)^{1/2}.$$

Виберемо $\mu>\dfrac{\tilde{C}(4p)}{2}$. За означенням випадкового процесу $\gamma(t)$ та лемою 5 одержуємо

$$\mathrm{E}\exp(2\mu\gamma(T))\le\exp\left(2\mu\int\limits_0^T\frac{ds}{X_s^{2(1-\alpha)}}\right)\le C(T,\mu).$$

Тому інтеграл у рівності (12) збігається, звідки й випливає твердження теореми.

5. Висновки. У роботі досліджено швидкість сильної збіжності у схемі Ейлера для стохастичних диференціальних рівнянь із неліпшицевою дифузією та центрованою пуассонівською мірою. Досліджено інші властивості схеми Ейлера, вказано на практичну важливість одержаних результатів, зокрема для моделювання характеристик стану фінансових ринків.

1. *Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A.* A theory of the term structure of interest rate // Econometrica. – 1985. – **53**. – P. 385 – 407.
2. *Bossy M., Diop A.* Euler Scheme for one dimentional SDEs with a diffusion coefficient function of the form $|x|^\alpha$, $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ // INRIA. – Sophia-Antipolis, France, 2006.
3. *Berkaoui A., Bossy M., Diop A.* Euler Scheme for SDEs with non-Lipschitz diffusion coefficient: strong convergence // ESAIM: Probab. and Statist. – 2007. – **12**. – P. 1 – 11.
4. *Deelstra G., Delbaen F.* Convergence of discretized stochastic (interest rate) process with stochastic drift term // Appl. Stochast. Models Data Anal. – 1998. – **14(1)**. – P. 77 – 84.
5. *Mishura Yu. S., Posashkova S. V.* The rate of convergence of Euler scheme to the solution of stocastic differential equation with nonhomogeneous coefficients and non-Lipshitz diffusion // Random Operators / Stochast. Equat. – 2008. – **16**. – P. 1 – 26.
6. *Bruti-Liberati N., Platen E.* Strong approximations of stochastic differential equations with jumps // J. Comput. and Appl. Math. – 2007. – **205**. – P. 982 – 1001.
7. *Зубченко В. П., Мішура Ю. С.* Існування та єдиність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь із неліпшицевою дифузією та з пуассонівською мірою // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2009. – **80**. – С. 43 – 54.
8. *Зубченко В. П.* Властивості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь із випадковими коефіцієнтами, неліпшицевою дифузією та з пуассонівськими мірами // Там же. – 2010. – **82**. – С. 30 – 42.
9. *Protter P. E.* Stochastic integration and differential equations. – Springer, 2004. – 416 p.

Одержано 26.04.10