УДК 519.21

А. В. Свіщук (Міжнар. мат. центр НАН України, Київ),
М. Я. Свіщук (Київ. нац. ун-т)

СТОХАСТИЧНА СТІЙКІСТЬ ПРОЦЕСІВ, ВИЗНАЧЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ ПУАССОНА ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

We prove a theorem on existence and establish a property of stochastic stability for processes determined by the Poisson stochastic differential equations with a delay.

Доведено теорему існування та встановлено стохастичну стійкість для процесів, визначених стохастичними диференціальними рівняннями Пуассона із запізненням.

1. Нехай C — простір неперервних справа функцій на дійсному інтервалі $[-r, 0]$, $r>0$, і $x(t)$ — випадковий процес. Визначимо процес x_t із значенням в C таким чином: $x_t(\Theta) = x(t+\Theta)$, $\Theta \in [-r, 0]$.

Нехай $\| x_t \| := \sup\limits_{\Theta} | x(t+\Theta) |$, $\Theta \in [-r, 0]$. Процес $x(t)$ задовольняє стохастичне різницево-диференціальне рівняння Пуассона:

$$dx(t) = f(x_t)dt + g(x_t)dp(t). \tag{1}$$

Тут $p(t)$ — процес Пуассона з інтенсивністю a. При умові, що стрибок відбудеться, позначимо через $P(dy)$ відповідну ймовірнісну міру амплітуди стрибка. Будемо вважати, що $P(dy)$ має компактний носій і

$$\int y P(dy) = 0. \tag{2}$$

При цій умові $P(t)$ з рівняння (1) є мартингалом. Функції f і g в (1) є неперервними дійснозначними функціями на C.

Будемо вважати, що виконуються такі умови.

A1) В інтервалі $[-r, 0]$ $X(t)$ є незалежним від $p(s) - p(0)$, $s \geq 0$, і $E|X(t)|^4 < +\infty$.

A2) Існує константа $M < +\infty$ і обмежена міра μ на $[-r, 0]$ така, що для φ та $\psi \in C$

$$|f(\varphi) - f(\psi)| + |g(\varphi) - g(\psi)| \leq \int_{-r}^{0} |\varphi(\Theta) - \psi(\Theta)| d\mu(\Theta),$$

$$|f(0)| + |g(0)| \leq M. \tag{3}$$

Лема 1. *Нехай виконуються умови* A 1) *та* A 2). *Тоді існує неперервний справа розв'язок рівняння* (1) *з ймовірністю* 1 *такий, що* $E|X(t)|^4 \leq \gamma e^{\gamma t}$ *для деякого* $\gamma < +\infty$. *Процес* $x(s)$ *не залежить від* $p(t) - p(s)$ *для всіх* $t \geq s \geq 0$.

Доведення. Відмітимо, що умова (2) забезпечує мартингальність процесу Пуассона $p(t)$, що має незалежні нескінченно подільні прирости, як і вінерівський процес $\omega(t)$. Тому результат леми 1 випливає з результатів Іто та Нісіо ([1], теорема 5), або Флемінга та Нісіо [2] для рівняння

$$dX(t) = f(X_t)dt + g(X_t)d\omega(t), \tag{4}$$

з такими ж функціями f, g та процесом Вінера $\omega(t)$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* A1) *та* A2) *та* $x(t)$ *і* $y(t)$ *є розв'язками рівняння* (1) *з початковими умовами* $x_0 = x(\Theta)$ *і* $y_0 = y(\Theta)$ *відповідно, де* x *та* y *задовольняють* A2). *Тоді*

$$E\max_{T\geq t\geq 0}|x(t)-y(t)|^2 \leq K\left\{E|x(0)-y(0)|^2 + \int_{-r}^{0} E|x\Theta - y(\Theta)|^2\, d\mu(\Theta)\right\}, \quad (5)$$

де K *залежить тільки від* T, *і* μ *та* M *за* A2).

Розв'язок (1) *єдиний в тому сенсі, що коли* $x = x_0$ *задовольняє* A2), *тоді будь-які два розв'язки з обмеженими другими моментами повинні збігатися з імовірністю* 1.

Доведення. З нерівності (5) випливає єдиність. Із зображення

$$x(t)-y(t) = x(0)-y(0) + \int_0^t (f(x_s)-f(y_s))ds + \int_0^t (g(x_s)-g(y_s))dp(s)$$

отримаємо

$$E\max_{T\geq t\geq 0}|x(t)-y(t)|^2 \leq$$

$$\leq K_1E|x(0)-y(0)|^2 + K_1TE\int_0^T |f(x_s - f(y_s)|^2 ds + K_1E\int_0^T |g(x_s - g(y_s)|^2 ds, \quad (6)$$

де використаємо те, що

$$E\max_{T\geq t\geq 0}\left(\int_0^t g(x_s)dp(s)\right)^2 \leq 4\int_0^T Eg^2(x_t)dt.$$

З умови A2) випливає така оцінка для (6):

$$E\max_{T\geq t\geq 0}|x(t)-y(t)|^2 \geq \Delta_I + K_2\int_0^T ds \int_{m(-r,-s)}^{0} E|x(s+\Theta)-y(s+\Theta)|^2\, d\mu(\Theta), \quad (7)$$

де $m(-r,-s) = \max(-r,-s) = -\min(r,s)$ (r та s невід'ємні) і

$$\Delta_I = K_2\cdot E|x(0)-y(0)|^2 + K_2\int_0^r ds \int_{-r}^{m(-r,-s)} \Delta_s + \Theta d\mu(\Theta),$$

$$\Delta_s = E|x(s)-y(s)|^2. \quad (8)$$

Щоб оцінити праву частину (7), ми оцінимо Δ_t, яка на підставі (8) задовольняє для $t\leq T$ співвідношення

$$\Delta_t \leq \Delta_I + K_2\int_0^t ds \int_{m(-r,-s)}^{0} \Delta_s + \Theta d\mu(\Theta) \quad \forall t\, T. \quad (9)$$

Нехай $V := Var(\mu)$ — варіація міри μ і $B = \max_{T\geq t\geq 0}\Delta_t$ (що скінченна за лемою 1) і

$$Q_n(t) \equiv \Delta_I\left(1 + VK_2t + \ldots + \frac{\overline{V}^n\overline{K}_2^n t^n}{n!}\right) + \frac{V^nK_2^nt^nB}{n!}.$$

З (9) випливає, що $\Delta_t \leq Q_1(t)$. За індукцією

$$\Delta_t \leq X\Delta_I e^{VK_2t}. \quad (10)$$

Після підстановки (10) в (7) бачимо, що (5) виконується для деякого скінченного K, не залежного від x та y.

Лема 2. *Якщо виконуються умови* A1), A2), *то для початкового стану* $x = x_0$ *стохастичний інтеграл*

$$z(t) = \int_0^t g(x_s)\,dp(s) \tag{11}$$

є мартингалом, і для $\alpha > 1$

$$E \max_{T \geq t \geq 0} |z(t)|^{\alpha} \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^{\alpha} E\,|z(T)|^2, \tag{12}$$

$$E \max_{T \geq t \geq 0} z^2(t) \leq 4 \int_0^T E(g(x_t))^2\,dt.$$

Доведення. За лемою 1 та умовою A2) інтеграл у правій частині (11) існує і обмежений. Тоді, оскільки $x(t)$ та X_t є неупереджувальні, то $z(t)$ — неперервний мартингал [3] і (12) є версією теореми Дуба для інтегралу (11), що є аналогом стохастичного інтегралу Іто

$$\int_0^t g(X_t)\,d\omega(s)$$

з процесом Вінера $\omega(s)$.

З теореми 1 та леми 2 випливає така теорема.

Теорема 2. *За умов* A1), A2) *виконуються співвідношення*

$$E \max_{T \geq t \geq 0} |x(t) - x(0)|^2 \leq KTE\left\{1 + \int_{-r}^{0} \left(|x(\Theta)|^2 + |x(\Theta)| - x(0)|^2\right) d\mu(\Theta)\right\},$$

де K *залежить тільки від* T *та* μ *і* M *та при* $x_0 \in C$

$$|Ex(h) - x(0) - hf(x_0)| = o(h),$$

$$|E(x(h) - x(0))^2 - hg^2(x_0)| = o(h).$$

2. Нехай C — сім'я відкритих множин в C (з топологією визначеною нормою $\|x\| = \sup |x(\Theta)|$, $\Theta \in [-r, 0]$) і $\mathcal{B}$ — борелеве поле на C. Трійка $(C, C, \mathcal{B})$ є топологічним простором станів [4]. Нехай x — початковий стан для (1), задовольняє A2), і Ω — ймовірнісний вибірковий простір.

Визначимо $\bar{M}_t^x$ та $\bar{N}_t^x$ як найменші σ-алгебри на Ω, для яких $x(s)$ є вимірним відповідно на інтервалах $-r \leq s \leq t$ і $t - r \leq s \leq t$ для фіксованого $x_0 = x \in C$. Нехай P_x — ймовірнісна міра на

$$M^x = \bigcup_{t \geq 0} \bar{M}_t^x.$$

Визначимо множину

$$S = \{\omega : \|x_s - y\| < \varepsilon\} = \left\{\omega : \sup_{-r \leq \Theta \leq 0} |x(s + \Theta) - y(\Theta)| < \varepsilon\right\},$$

для деякого $\varepsilon > 0$, і $0 \leq s \leq t$. Оскільки S є в $\bar{M}_t^x$, то $\forall \Gamma \in \mathcal{B} : \{\omega : x_s \in \Gamma\}$ міститься в найменшому σ-полі з M_t^x, що містить всі S (для всіх $\varepsilon > 0$, $y \in$ $\in C$). Позначимо це під-σ-поле через M_t^x. Оскільки $x(t)$, $t \geq -r$, є неперервним справа з імовірністю 1, то таким же є x_t, $t \geq 0$ (в топології $\|x\|$).

Таким чином, вірна така лема.

Лема 3. *За умов* A1), A2) *та при фіксованому* $x_0 = x \in C$, *кожний процес* x_s, $0 \leq s \leq t$, *є випадковою величиною на* (Ω, M_t^x, P_x) *в* $(C, C, \mathcal{B})$, *і* x_t *є* *неперервним справа з імовірністю* 1; x_t *є вимірним на* (Ω, N_t^x, P_x), *де* $N_t^x = M_t^x \cap \tilde{N}_t^x$. *Для будь-якої функції* q *із скінченним середнім значенням з імовірністю* 1 *маємо*

$$E\big(q(x_{t+s})/M_t^x\big) = E\big(q(x_{t+s})/N_t^x\big), \qquad s \geq 0.$$

Теорема 3. *За умов* A1), A2) *та при фіксованому* $x_0 = x \in C$, x_t *є неперервним справа строго марковським процесом на топологічному просторі станів* $(C, C, \mathcal{B})$ *з часом життя* $\xi(\omega) = +\infty$ *з імовірністю* 1.

Доведення випливає з леми 3 та умов Динкіна [4] для перевірки марковської властивості та строго марковської властивості.

3. Нехай R — відкрита обмежена множина в C та $\tau := \inf\{t : x_t \notin R\}$. Якщо $x_t \in R$, $\forall t : 0 \leq t < +\infty$, то покладемо $\tau = +\infty$; τ є моментом зупинки, тобто $\{\omega : \tau \leq t\} \in M_t^x$. Визначимо зупинений процес $\tilde{x}_t$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_t &= x_t, \quad t \leq \delta, \\ \tilde{x}_t &= x_\tau, \quad t > \tau, \end{aligned} \tag{13}$$

$\tilde{x}_t$ також є строго марковським процесом за умов A1) – A2) із нескінченним часом життя. Отже, траєкторії $\tilde{x}_t$ не залежать від значень f та g поза множиною R.

Нехай виконується така умова:

A3) Для кожного додатного дійсного числа ρ існує обмежена міра μ_ρ на $[-r, 0]$ така, що для $\|\psi\| \leq \rho$ і $\|\varphi\| \leq \rho$, нерівність (3) виконується з μ_ρ замість μ. Тоді розв'язок (1) визначається таким чином. Нехай $R_n = \{x : \|x\| < n\}$. Визначимо функції f^n і g^n, які відповідно дорівнюють f і g в R_n і нехай вони задовольняють умови A1) і A2) при $\mu = \mu_n$. Визначимо $x^n(t)$ (чи x_t^n) як розв'язок (1), що відповідає f^n та g^n. Нехай $\tilde{c} = \inf\{t : x_t^n \notin R_n\} = \inf\{t : |x^n(t)| \geq n\}$. Якщо $x_0 \in R_n$, то $\tilde{c}_n > 0$ з імовірністю 1, і x_t^n є строго марковським процесом для кожного n; отже, з імовірністю 1, $x_t^n = x_t^m$ для $m > n$ і $t \leq \tilde{c}_n$. Нехай $\xi = \lim \tilde{c}_n$. Розв'язок (1) за умови A3) визначається як процес x_t, що дорівнює x_t^n до моменту $\tilde{c}_n$, для кожного n. Якщо $\xi < +\infty$ з імовірністю δ, то час життя є скінченним з імовірністю δ; x_t є строго марковським процесом з часом життя ξ.

4. Функція F на C належить області визначення оператора $\tilde{A}$, якщо границі

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{E_x F(x_t) - F(x)}{t} &= q(x), \\ \lim_{t \to 0} E_x q(x_t) &= q(x) \end{aligned} \tag{14}$$

існують поточково в C. Тоді $q(x) = \tilde{A} F(x)$; $\tilde{A}$ називається слабким твірним оператором процесу x_t.

Через $\tilde{A}_R$ позначимо слабкий твірний оператор процесу $\tilde{x}_t = x_t$, зупиненого в момент $\tau = \inf\{t : x_t \notin R\}$ для відкритої множини R.

Якщо виконуються умови A1) та A2) для рівняння (1), $\tilde{A}$ є слабкий твірний оператор процесу $\hat{x}(t)$, що задовольняє (1) з функціями $\hat{f}$, $\hat{g}$ замість f, g, що задовольняють A1) та A2), то обмежена F на R належить $D(\tilde{A}_R)$ і на R: $\tilde{A}F = \tilde{A}_R F$. Покладемо $\hat{f} = f$, $\hat{g} = g$ в обмеженій відкритій множині R. Тут F є неперервною та обмеженою функцією на обмежених множинах.

Наступні теореми 4 і 5 дають результати про оператор $\tilde{A}_R$ для процесу $\tilde{x}_t$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* A1) *і* A3) *та* $x_0 = x \in C$. *Нехай також* $F(x) \equiv G(x(0))$ *має неперервні другі похідні по* $x(0)$. *Тоді* $F(x) \in D(\tilde{A}_R)$ *і*

$$\tilde{A}_R F(X) \equiv LG(x(0)) = q(x) = G'(x(0)) \cdot f(x) + \\ + a\int [F(x + g(x)y) - F(x)]P(dy). \tag{15}$$

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми* 4, *з функцією*

$$F(x) \equiv \int_{-r}^{0} h(\Theta)H(x(\Theta), x(0))d\Theta \tag{16}$$

і $h(\Theta)$ *має неперервну похідну на відкритій множині, що містить* $[-r, 0]$. *Нехай також* $H(\alpha, \beta]$, $H_\beta(\alpha, \beta)$ *і* $H_{\beta\beta}(\alpha, \beta)$ *неперервні по* α *і* β. *Тоді* $F(x) \in D(\tilde{A}_R)$ *і*

$$\tilde{A}_R F(x) = q(x) = h(0)H(x(0), x(0)) - h(-r)H(x(-r), x(0)) - \\ - \int_{-r}^{0} h_\Theta(\Theta)H(x(\Theta), x(0))d\Theta + \int_{-r}^{0} h(\Theta)LH(x(\Theta), x(0))d\Theta, \tag{17}$$

де оператор L *визначений в* (15) *і діє на* H *як функції по відношенню до* $x(0)$.

Доведення теорем 4 і 5 аналогічне доведенню теорем 5.1 і 5.2 в [5], тому ми їх тут не наводимо.

5. Розглянемо теорему стійкості для рівняння (1).

Теорема 6. *Нехай* x_t *є неперервним справа строго марковським процесом на топологічному просторі станів* $(C, C, \mathcal{B})$ *із слабким твірним оператором* A, *та* $V(x)$ *є невід'ємною неперервною дійснозначною функцією в* $D(\tilde{A})$ *і нехай* $Q := \{x : V(x) < q\}$ *і* $\varepsilon := \inf\{t : x_t \notin Q\}$ ($\varepsilon = +\infty$, *якщо* $x_t \in Q$, $\forall t < +\infty$). *Якщо*

$$\tilde{V}(x) = -k(x) \le 0, \tag{18}$$

то для $x = x_0 \in Q$:

1) $V(x_{t\wedge\tau})$ *є невід'ємним супермартингалом;*

2) $P_x\left(\sup\limits_{+\infty > t \ge 0} V(x_t \ge q)\right) \le V(x)q$;

3) $V(x_{t\wedge\tau}) \to v \ge 0$ *з імовірністю* 1. *Тут* $t \wedge \tau = \min(t, \tau)$.

Доведення. Зафіксуємо $x = x_0 \in Q$. Оскільки $V(x) \in D(\tilde{A})$ і $t \wedge \tau$ є скінченним марковським моментом, то з формули Динкіна маємо

$$E_x V(x_{t\wedge\tau}) - V(x) = -E_x \int_{\Theta}^{t\wedge\tau} k(x_s)ds \le 0. \tag{19}$$

З останньої рівності, враховуючи, що $V(x) \in D(\bar{A})$, видно, що $V(x_{t\wedge\tau})$ є невід'ємним супермартингалом, що доводить 1.

З нерівності Колмогорова – Дуба для супермартингалів отримуємо твердження 2. Твердження 3 випливає безпосередньо з властивості невід'ємних супермартингалів та теореми про збіжність супермартингалів [3, 6, 7].

Приклад. Нехай $x(t)$ є розв'язком рівняння

$$dx(t) = -\gamma x(t)dt - bx(t-\tau)dt + \sigma x(t-p)dp(t),$$

$$V(x) = x^2(0)/2 + \alpha\int_{-r}^{0} x^2(\Theta)d\Theta + \beta\int_{-r}^{0} x^2(\Theta)d\Theta, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0. \tag{20}$$

Тоді з теорем 4 та 5 маємо

$$\begin{aligned}\bar{A}V(x) &= x^2(0)(-\gamma + \alpha + \beta) - bx(0)x(-\tau) - \alpha x^2(-\tau) - \beta x^2(-\rho) + \\ &+ \alpha\int\left[\frac{(x(0) + \sigma x(-\rho)y)^2}{2} - \frac{x^2(0)}{2}\right]P(dy) = \\ &= x^2(0)(-\gamma + \alpha + \beta) - bx(0)x(-\tau) - \alpha x^2(-\tau) - \beta x^2(-\rho) + \\ &+ \frac{a\sigma^2 x^2(-\rho)}{2}\int y^2 P(dy).\end{aligned} \tag{21}$$

Нехай існують такі $\alpha > 0$ і $\beta > 0$, що квадратична форма в (21) є від'ємно визначеною.

Тоді за теоремою 6

$$P_x\left(\sup_{+\infty > t \geq 0} V(x_t) \geq q\right) \leq \frac{V(x)}{q}.$$

Оскільки q довільне, то з імовірністю 1 маємо $V(x_t) \to \upsilon$, де υ є деякою випадковою величиною. Отже, $x_t \to 0$ з імовірністю 1.

1. *Ito K., Nisio M.* On stationary solutions of a stochastic defferential equestion // Kyoto J. Math. – 1964. – **4**. – P. 1–75.
2. *Fleming W., Nisio M.* On the existance of optimal stochastic control // J. Math. and Mech. – 1966. – **15**. – P. 777–794.
3. *Doob J.* Stochastic processes. – New York: Wilry, 1953. – 565 p.
4. *Dynkin E.* Markov processes. – Berlin: Springer, 1965. – 890 p.
5. *Kushner H.* On the stability of the processes defined by stochastic difference-differential equestions // J. Different. Equat. – 1968. – 424–443.
6. *Колмановский В. Б.* Об устойчивости стохастических систем с запаздыванием // Пробл. передачи информации. – 1969. – **5**, № 4. – С. 59–67.
7. *Царьков Е. Ф.* Асимптотическая экспоненциальная устойчивость в среднеквадратическом тривиального решения стохастического дифференциального уравнения с запаздыванием // Теория вероятностей и ее применения. – 1976. – **21**. – С. 850–875.

Одержано 25.01.01