УДК 517.5

С. А. Стасюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ M-ЧЛЕННІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ $B_{p,\theta}^{\Omega}$

We obtain exact order estimates of the best M-term trigonometrical approximations of classes of multivariable functions $B_{p,\theta}^{\Omega}$ in the space L_q, $1 < p < q < \infty$, $q > 2$.

Одержано точні порядкові оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів функцій багатьох змінних $B_{p,\theta}^{\Omega}$ в просторі L_q, $1 < p < q < \infty$, $q > 2$.

Нехай $L_p(\pi_d)$, $1 \le p < \infty$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною і сумовних у степені p на кубі $\pi_d = \prod_{j=1}^{d}[-\pi,\pi]$ функцій $f(x) = f(x_1,\ldots,x_d)$, у якому норма визначається рівністю

$$\| f \|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Далі будемо вважати, що функція $f(x)$ належить простору

$$L_p^0(\pi_d) = \left\{ f\colon f \in L_p(\pi_d), \ \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx_j = 0, \ j = \overline{1,d} \right\}.$$

Для $f \in L_p^0(\pi_d)$ через

$$S[f] = \sum_k c_k(f) e^{i(k,x)}$$

позначимо її ряд Фур'є, де $c_k(f) = c_k = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є, $k = (k_1,\ldots,k_d)$, $k_j \in Z$, $j = \overline{1,d}$, і $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$.

Кожному вектору $s \in N^d$ поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \left\{ k = (k_1,\ldots,k_d)\colon 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, \ j = \overline{1,d} \right\}$$

і для f позначимо

$$\delta_s(f,x) = \sum_{k \in \rho(s)} c_k e^{i(k,x)}.$$

Тоді ряд Фур'є функції f можна записати у вигляді

$$S[f] = \sum_s \delta_s(f,x).$$

Для $f \in L_p^0(\pi_d)$ введемо мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega^l(f,t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j = \overline{1,d}}} \left\| \Delta_h^l f(\cdot) \right\|_p,$$

де $\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_d}^l \ldots \Delta_{h_1}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l (\ldots (\Delta_{h_1}^l f(x)))$ — мішана l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j і

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \ldots, x_d).$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє наступні умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1,d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ зростає по кожною змінною;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \le \left(\prod_{j=1}^{d} m_j\right)^l \Omega(t)$, $m_j \in N$, $j = \overline{1,d}$;

4) $\Omega(l)$ неперервна при $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S), (S_l) [1], які називають умовами Барі – Стєчкіна. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує $C_1 > 0$, яке не залежить від τ_1 і τ_2, таке, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \le C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує число $C_2 > 0$, яке не залежить від τ_1 і τ_2, таке, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \ge C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови за кожною змінною t_j при фіксованих t_i, $i \ne j$.

Зазначимо, що функції, які задовольняють сформульовані вище умови $1-4$, (S) та (S_l), можуть мати вигляд

$$\Omega(t) = t_1^{r_1} \ldots t_d^{r_d} \left(\log \frac{1}{t_1}\right)^{m_1} \ldots \left(\log \frac{1}{t_d}\right)^{m_d},$$

де $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$, а m_j, $j = \overline{1,d}$, — фіксовані дійсні числа.

Означимо деякі порядкові співвідношення, які використовуватимуться далі.

Функції $\mu(n)$ і $\nu(n)$ будемо називати функціями однакового порядку і писати $\mu(n) \asymp \nu(n)$, якщо існує n_0 таке, що для будь-якого $n > n_0$ виконується нерівність $C_3 \mu(n) \le \nu(n) \le C_4 \mu(n)$, де сталі C_3, $C_4 > 0$ можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору R^d. Якщо ж $\mu(n) \le C_5 \nu(n)$ чи $\mu(n) \ge C_6 \nu(n)$, то позначимо $\mu(n) << \nu(n)$ і $\mu(n) >> \nu(n)$ відповідно.

У роботі [2] введено клас функцій $B_{p,\theta}^{\Omega}$, норма в якому при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$ співпадає з означеною в [3] нормою класу $B_{p,\theta}^r$. Для $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і заданої функції типу мішаного модуля неперервності $\Omega(t)$, яка задольняє умови $1-4$, (S), (S_l), клас $B_{p,\theta}^{\Omega}$ визначається наступним чином:

$$B_{p,\theta}^{\Omega} := \left\{ f(\cdot) \in L_p^0(\pi_d) \colon \| f \|_{B_{p,\theta}^{\Omega}} = \left\{ \int_{\pi_d} \left(\frac{\Omega^l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{1/\theta} \le 1 \right\}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$B^{\Omega}_{p,\infty} := \left\{ f(\cdot) \in L^0_p(\pi_d) \colon \| f \|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{t>0} \frac{\Omega^l(f,t)_p}{\Omega(t)} \le 1 \right\}, \quad \theta = \infty.$$

Зазначимо, що при $\theta = \infty$ клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадає з класом H^{Ω}_p [4]. У [2] встановлюється інше подання для функцій з класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$:

$$\| f \|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left\{ \sum_s \| \delta_s(f,\cdot) \|^{\theta}_p \Omega(2^{-s})^{-\theta} \right\}^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1}$$

$$\| f \|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \| f \|_{H^{\Omega}_p} \asymp \sup_s \frac{\| \delta_s(f,\cdot) \|_p}{\Omega(2^{-s})}, \quad \theta = \infty, \tag{2}$$

де $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d})$, $s_j \in N$, $j = \overline{1,d}$.

Зазначимо, що при $\Omega(t) = t_1^{r_1} \ldots t_d^{r_d}$ з (1), (2) випливають зображення

$$\| f \|_{B^{r}_{p,\theta}} \asymp \left\{ \sum_s 2^{(r,s)\theta} \| \delta_s(f,\cdot) \|^{\theta}_p \right\}^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$\| f \|_{B^{r}_{p,\infty}} = \| f \|_{H^{r}_p} \asymp \sup_s 2^{(r,s)} \| \delta_s(f,\cdot) \|_p, \quad \theta = \infty,$$

які встановлено в роботі [3], і клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадає відповідно з $B^{r}_{p,\theta}$.

Визначимо величини, що будуть досліджуватися далі.

Найкращим M-членним тригонометричним наближенням функції $f \in L^0_q(\pi_d)$ будемо називати величину

$$e_M(f)_q := \inf_{\Theta_M} \inf_{P(\Theta_M,\cdot)} \| f(\cdot) - P(\Theta_M,\cdot) \|_q, \tag{3}$$

де $P(\Theta_M,\cdot)$ — тригонометричний поліном вигляду $\sum_{j=1}^{M} c_{k^j} e^{i(k^j,\cdot)}$, $\Theta_M = \{k^j\}_{j=1}^{M}$ — система векторів $k^j = (k^j_1, \ldots, k^j_d)$ з цілочисловими координатами, c_{k^j} — довільні коефіцієнти. Якщо F — деякий функціональний клас, то покладаємо

$$e_M(F)_q := \sup_{f \in F} e_M(f)_q. \tag{4}$$

В одновимірному випадку, в більш загальній ситуації, а саме: коли замість тригонометричної системи $\{e^{ikx}\}_{k \in Z}$ розглядалися повні ортонормовані системи $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, величини $e_M(f)_2$ введені С. Б. Стєчкіним [5] при дослідженні питання абсолютної збіжності ортогональних рядів.

У подальшому дослідження поведінки величин (3), (4) проводилося для певних класів функцій як однієї, так і багатьох змінних. Одержані оцінки величин $e_M(F)_q$ для деяких класів функцій однієї змінної в роботах Р. С. Ісмагілова [6], В. Є. Майорова [7], Ю. І. Маковоза [8], Б. С. Кашина [9] та ін. Що стосується дослідження величин (4) для класів функцій багатьох змінних, то слід зазначати роботи В. М. Темлякова [10], Е. С. Белінського [11, 12], А. С. Романюка [13, 14], Б. С. Кашина і В. М. Темлякова [15] та ін. Зазначимо, що О. І. Степанець [16] знайшов точні значення найкращих n-членних тригонометричних наближень класів функцій, що визначаються згортками із сумовними ядрами загального вигляду у метриках деяких важливих функціональних просторів і, зокрема, в метриці L_2.

Наведемо декілька тверджень, які будемо використовувати далі в міркуваннях.

Теорема А (Літтлвуда – Пелі [17, с. 52 – 56]). *Нехай* $1 < p < \infty$. *Існують додатні числа* C_7, C_8 *такі, що для кожної функції* $f \in L_p^0(\pi_d)$ *виконуються співвідношення*

$$C_7\|f\|_p \le \left\| \left\{ \sum_s |\delta_s(f,\cdot)|^2 \right\}^{1/2} \right\|_p \le C_8\|f\|_p .$$

Лема 1 [12]. *Нехай* $2 < q < \infty$. *Для будь-якого тригонометричного полінома* $P(\Theta_N,\cdot)$, *що містить не більше* N *гармонік, і для довільного* $M < N$ *знайдеться тригонометричний поліном* $P(\Theta_M,\cdot)$, *у якого не більше* M *коефіцієнтів, відмінних від нуля, такий, що*

$$\|P(\Theta_N,\cdot) - P(\Theta_M,\cdot)\|_q \le C_9\sqrt{\frac{N}{M}}\,\|P(\Theta_N,\cdot)\|_2,$$

причому $\Theta_M \subset \Theta_N$, $C_9 > 0$.

Перш ніж перейти до викладу основних результатів роботи, зазначимо, що ми розглядатимемо класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначатимуться мішаним модулем неперервності $\Omega(t) = \Omega(t_1,\ldots,t_d)$ певного вигляду.

Нехай $\omega(\tau)$ — задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S) і (S_l). Задамо (багатовимірний) мішаний модуль неперервності порядку l у спеціальному вигляді:

$$\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right), \quad j = \overline{1,d}. \tag{5}$$

Легко бачити, що для такого $\Omega(t)$ виконуються властивості 1 – 4 мішаного модуля неперервності порядку l. З (5) і того факту, що $\omega(\tau)$ задовольняє умови (S) і (S_l), випливає, що $\Omega(t)$ також задовольняє умови (S) і (S_l). Тому для $\Omega(t)$ вигляду (5), яким визначається клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, зберігаються зображення (1), (2) норм функцій цього класу. Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай* $1 < p \le 2 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t)$ *має вигляд* (5) *з* $\omega(\tau)$, *що задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 1/p$ *і умову* (S_l). *Тоді для будь-якого натурального* M *та* n, *що задовольняють умову* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце співвідношення*

$$e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n})2^{n(1/p-1/2)}n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Доведення. Спочатку встановимо оцінку зверху.

Нехай f — довільна функція з класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$. Запишемо її у вигляді

$$f(x) = \sum_{\|s\|_1 < n} \delta_s(f,x) + \sum_{n \le \|s\|_1 < \beta n} \delta_s(f,x) + \sum_{\|s\|_1 \ge \beta n} \delta_s(f,x), \tag{6}$$

де $\beta > 1$ — деяке дійсне число, яке ми підберемо пізніше, а $\|s\|_1 = (s,1) = s_1 + \ldots + s_d$.

Нехай число M задане. Доберемо n, виходячи з умови $M \asymp 2^n n^{d-1}$. Будемо розглядати наближення функції $f(x)$ за допомогою полінома

$$P(\Theta_M, x) = \sum_{\|s\|_1 < n} \delta_s(f,x) + \sum_{n \le \|s\|_1 < \beta n} P(\Theta_{N_s}, x), \tag{7}$$

в якому, використовуючи лему 1, для кожного „блоку" $\delta_s(f,x)$ знайдеться поліном $P(\Theta_{N_s}, x)$ такий, що для нього виконуватиметься нерівність

$$\left\|\delta_s(f,\cdot)-P(\Theta_{N_s},\cdot)\right\|_q \ll \left(\frac{2^{\|s\|_1}}{N_s}\right)^{1/2}\|\delta_s(f,\cdot)\|_2 .$$

Припустимо, що поліном $P(\Theta_M,x)$ побудовано. Тоді, виходячи з (6), (7), внаслідок нерівності Мінковського маємо

$$\|f(\cdot)-P(\Theta_M,\cdot)\|_q = \left\|\sum_{\|s\|_1\geq n}\delta_s(f,\cdot)-\sum_{n\leq\|s\|_1<\beta n}P(\Theta_{N_s},\cdot)\right\|_q =$$

$$= \left\|\sum_{n\leq\|s\|_1<\beta n}(\delta_s(f,\cdot)-P(\Theta_{N_s},\cdot))+\sum_{\|s\|_1\geq\beta n}\delta_s(f,\cdot)\right\|_q \leq$$

$$\leq \left\|\sum_{n\leq\|s\|_1<\beta n}(\delta_s(f,\cdot)-P(\Theta_{N_s},\cdot))\right\|_q+\left\|\sum_{\|s\|_1\geq\beta n}\delta_s(f,\cdot)\right\|_q =: J_1+J_2. \tag{8}$$

Далі проведемо окремо оцінку кожного доданка в (8). Згідно з теоремою 6 [2] для другого доданка одержимо

$$J_2 \leq \sup_{f\in B^{\Omega}_{p,\theta}}\left\|f(\cdot)-\sum_{\|s\|_1<\beta n}\delta_s(f,\cdot)\right\|_q \ll \omega(2^{-\beta n})2^{n\beta(1/p-1/q)}n^{(d-1)(1/q-1/\theta)_+}, \tag{9}$$

де $a_+ = \max\{a,0\}$.

Перейдемо до оцінки J_1. Для цього скористаємося послідовно теоремою Літтлвуда – Пелі, нерівністю Мінковського, лемою 1, нерівністю різних метрик Нікольського для „блоків" $\delta_s(f,x)$ (див., наприклад, [10, с. 16]):

$$\|\delta_s(f,\cdot)\|_2 \ll 2^{\|s\|_1(1/p-1/2)}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p, \quad 1<p<2.$$

У результаті одержимо

$$J_1 \ll \left\|\left(\sum_{n\leq\|s\|_1<\beta n}\left|\delta_s(f,\cdot)-P(\Theta_{N_s},\cdot)\right|^2\right)^{1/2}\right\|_q =$$

$$= \left(\left\|\sum_{n\leq\|s\|_1<\beta n}\left|\delta_s(f,\cdot)-P(\Theta_{N_s},\cdot)\right|^2\right\|_{q/2}\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{n\leq\|s\|_1<\beta n}\left\|\left|\delta_s(f,\cdot)-P(\Theta_{N_s},\cdot)\right|^2\right\|_{q/2}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{n\leq\|s\|_1<\beta n}\left\|\delta_s(f,\cdot)-P(\Theta_{N_s},\cdot)\right\|_q^2\right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n\leq\|s\|_1<\beta n}\frac{2^{\|s\|_1}}{N_s}\|\delta_s(f,\cdot)\|_2^2\right)^{1/2} \ll \left(\sum_{n\leq\|s\|_1<\beta n}\frac{2^{\|s\|_1}2^{2\|s\|_1(1/p-1/2)}}{N_s}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{n\leq\|s\|_1<\beta n}\frac{2^{2\|s\|_1/p}}{N_s}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^2\right)^{1/2}. \tag{10}$$

Тепер, підставляючи оцінки (9), (10) у (8), приходимо до співвідношення

$$\|f(\cdot)-P(\Theta_M,\cdot)\|_q << \left(\sum_{n\le\|s\|_1<\beta n}\frac{2^{2\|s\|_1/p}}{N_s}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^2\right)^{1/2} +$$

$$+\ \omega(2^{-\beta n})2^{n\beta(1/p-1/q)}n^{(d-1)(1/q-1/\theta)_+} =: I_1 + I_2. \tag{11}$$

Далі розглянемо два випадки: а) $2\le\theta\le\infty$; б) $1\le\theta<2$.

У випадку а) покладемо

$$\beta = \frac{\alpha-1/p+1/2}{\alpha-1/p+1/q},$$
$$N_s = \left[\omega^{-1}(2^{-n})2^{n(1-1/p)}\omega(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1/p}\right]+1 \tag{12}$$

($[b]$ — ціла частина числа b), і покажемо, що при такому виборі чисел N_s кількість гармонік у поліномах $P(\Theta_{N_s},x)$ не перевищує за порядком $2^n n^{d-1}$, тобто $\sum_{n\le\|s\|_1<\beta n}N_s << 2^n n^{d-1}$. Та перш ніж перейти до оцінки кількості гармонік у поліномах $P(\Theta_{N_s},x)$, вкажемо на деякі факти, які використовуватимуться при цьому.

Оскільки $\Omega(t)=\omega(t_1\cdot\ldots\cdot t_d)$ задовольняє умову (S) з $\alpha>1/p$, то [2]

$$\frac{\omega(2^{-\|s\|_1})}{2^{-\alpha\|s\|_1}} << \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \tag{13}$$

при $\|s\|_1\ge n$.

Також має місце оцінка

$$\sum_{\|s\|_1\ge n}2^{-\|s\|_1} = \sum_{j=n}^{\infty}\sum_{\|s\|_1=j}2^{-\|s\|_1} = \sum_{j=n}^{\infty}2^{-j}\sum_{\|s\|_1=j}1 \asymp \sum_{j=n}^{\infty}2^{-j}j^{d-1} \asymp 2^{-n}n^{d-1}. \tag{14}$$

Тоді внаслідок (13) і (14) одержуємо

$$\sum_{n\le\|s\|_1<\beta n}N_s \le \sum_{n\le\|s\|_1<\beta n}1+\omega^{-1}(2^{-n})2^{n(1-1/p)}\sum_{n\le\|s\|_1<\beta n}\omega(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1/p} <<$$

$$<< n^d+\omega^{-1}(2^{-n})2^{n(1-1/p)}\sum_{\|s\|_1\ge n}\frac{\omega(2^{-\|s\|_1})}{2^{-\alpha\|s\|_1}}2^{-(\alpha-1/p)\|s\|_1} <<$$

$$<< n^d+\omega^{-1}(2^{-n})2^{n(1-1/p)}\frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\sum_{\|s\|_1\ge n}2^{-(\alpha-1/p)\|s\|_1} \asymp$$

$$\asymp n^d+2^{n(1-1/p)}2^{\alpha n}2^{-n(\alpha-1/p)}n^{d-1} = n^d+2^n n^{d-1} << 2^n n^{d-1}.$$

Таким чином, для I_1 виконується нерівність

$$I_1 < \left(\sum_{n\le\|s\|_1<\beta n}\frac{2^{2\|s\|_1/p}}{\omega^{-1}(2^{-n})2^{n(1-1/p)}\omega(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1/p}}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^2\right)^{1/2} =$$

$$= \omega^{1/2}(2^{-n})2^{-n(1-1/p)/2}\left(\sum_{n\le\|s\|_1<\beta n}\omega^{-2}(2^{-\|s\|_1})\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^2\,\omega(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1/p}\right)^{1/2}.$$

Далі, застосовуючи нерівність Гельдера з показником $\theta/2$ $(2 \le \theta < \infty)$ (з відповідною модифікацією при $\theta = 2$) і використовуючи співвідношення (13) і (14), продовжуємо оцінку

$$\le \omega^{1/2}(2^{-n})2^{-n(1-1/p)/2}\left(\sum_{n \le \|s\|_1 < \beta n} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} \times$$

$$\times \left(\sum_{n \le \|s\|_1 < \beta n}\left(\omega(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1/p}\right)^{\theta/(\theta-2)}\right)^{(\theta-2)/2\theta} <<$$

$$<< \omega^{1/2}(2^{-n})2^{-n(1-1/p)/2}\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}\left(\sum_{\|s\|_1 \ge n}\left(\frac{\omega(2^{-\|s\|_1})}{2^{-\alpha\|s\|_1}}2^{-(\alpha-1/p)\|s\|_1}\right)^{\theta/(\theta-2)}\right)^{1/2-1/\theta} <<$$

$$<< \omega^{1/2}(2^{-n})2^{-n(1-1/p)/2}\frac{\omega^{1/2}(2^{-n})}{2^{-\alpha n/2}}\left(\sum_{\|s\|_1 \ge n}\left(2^{-(\alpha-1/p)\|s\|_1}\right)^{\theta/(\theta-2)}\right)^{1/2-1/\theta} <<$$

$$<< \omega(2^{-n})2^{-n(1-1/p)/2}2^{\alpha n/2}2^{-n(\alpha-1/p)/2}n^{(d-1)(1/2-1/\theta)} =$$

$$= \omega(2^{-n})2^{n(1/p-1/2)}n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}. \tag{15}$$

Для випадку ж $\theta = \infty$ маємо

$$I_1 << \omega^{1/2}(2^{-n})2^{-n(1-1/p)/2}\left(\sum_{n \le \|s\|_1 < \beta n} \omega^{-2}(2^{-\|s\|_1})\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^2\omega(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1/p}\right)^{1/2} <<$$

$$<< \omega^{1/2}(2^{-n})2^{-n(1-1/p)/2}\sup_s\frac{\|\delta_s(f,\cdot)\|_p}{\omega(2^{-\|s\|_1})}\left(\sum_{\|s\|_1 \ge n}\frac{\omega(2^{-\|s\|_1})}{2^{-\alpha\|s\|_1}}2^{-(\alpha-1/p)\|s\|_1}\right)^{1/2} <<$$

$$<< \omega^{1/2}(2^{-n})2^{-n(1-1/p)/2}\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}}\frac{\omega^{1/2}(2^{-n})}{2^{-\alpha n/2}}\left(\sum_{\|s\|_1 \ge n}2^{-(\alpha-1/p)\|s\|_1}\right)^{1/2} <<$$

$$<< \omega(2^{-n})2^{-n(1-1/p)/2}2^{\alpha n/2}2^{-n(\alpha-1/p)/2}n^{(d-1)/2} = \omega(2^{-n})2^{n(1/p-1/2)}n^{(d-1)/2}. \tag{16}$$

Щоб оцінити доданок I_2, підставимо замість β його значення з (12) і, з урахуванням нерівностей $q > 2$, $\beta > 1$ та (13), одержимо

$$I_2 = \frac{\omega(2^{-\beta n})}{2^{-\alpha\beta n}}2^{-\beta n(\alpha-1/p+1/q)}n^{(d-1)(1/q-1/\theta)_+} <<$$

$$<< \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}2^{-n(\alpha-1/p+1/2)}n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+} = \omega(2^{-n})2^{n(1/p-1/2)}n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}. \tag{17}$$

Зрозуміло, що для $\theta = \infty$ відповідна порядкова нерівність для I_2 має вигляд

$$I_2 << \omega(2^{-n})2^{n(1/p-1/2)}n^{(d-1)/2}. \tag{18}$$

Таким чином, співставляючи (11), (15) та (17), а також (11), (16), (18), приходимо до шуканої оцінки зверху у випадку $2 \le \theta \le \infty$:

$$\|f(\cdot) - P(\Theta_M,\cdot)\|_q << \omega(2^{-n})2^{n(1/p-1/2)}n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Тепер розглянемо випадок б). Покладемо

$$\beta = \frac{\alpha - 1/p + 1/2}{\alpha - 1/p + 1/q} - \frac{(d-1)(1/2 - 1/\theta)\log n}{(\alpha - 1/p + 1/q)n},$$
$$N_s = \left[\omega^{-1}(2^{-n})2^{n(1-1/p)}n^{d-1}2^{\|s\|_1/p}\left(\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right)\right)^{1-\theta}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^\theta\right] + 1. \tag{19}$$

Тоді, як і для попереднього випадку, покажемо, що при такому виборі чисел N_s кількість гармонік у поліномах $P(\Theta_{N_s}, x)$ не перевищує за порядком $2^n n^{d-1}$. Справді, діючи подібно до випадку а), одержуємо

$$\sum_{n \le \|s\|_1 < \beta n} N_s \ll n^d + 2^{n(1-1/p)} n^{d-1}\omega^{-1}(2^{-n}) \times$$
$$\times \sum_{n \le \|s\|_1 < \beta n} \frac{\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right)}{2^{-\alpha\|s\|_1}} 2^{-(\alpha-1/p)\|s\|_1}\omega^{-\theta}\left(2^{-\|s\|_1}\right)\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^\theta \ll$$
$$\ll n^d + 2^{n(1-1/p)}n^{d-1}\omega^{-1}(2^{-n})\frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\sum_{\|s\|_1 \ge n} 2^{-(\alpha-1/p)\|s\|_1}\omega^{-\theta}\left(2^{-\|s\|_1}\right)\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^\theta \ll$$
$$\ll n^d + 2^{n(1-1/p)}n^{d-1}2^{\alpha n}2^{-n(\alpha-1/p)}\sum_{\|s\|_1 \ge n}\omega^{-\theta}\left(2^{-\|s\|_1}\right)\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^\theta \ll$$
$$\ll n^d + 2^n n^{d-1}\|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}}^\theta \ll 2^n n^{d-1}.$$

Таким чином, для I_1 маємо

$$I_1 < \left(\sum_{n \le \|s\|_1 < \beta n} \frac{2^{\|s\|_1/p}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^2}{\omega^{-1}(2^{-n})2^{n(1-1/p)}n^{d-1}2^{\|s\|_1/p}\left(\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right)\right)^{1-\theta}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^\theta}\right)^{1/2}$$
$$= \omega^{1/2}(2^{-n})2^{-n(1-1/p)/2}n^{-(d-1)/2} \times$$
$$\times \left(\sum_{n \le \|s\|_1 < \beta n}\left(\omega^{-1}\left(2^{-\|s\|_1}\right)\right)^{2-\theta}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^{2-\theta}\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right)2^{\|s\|_1/p}\right)^{1/2}.$$

Застосовуючи нерівність Гельдера з показником $\theta/(2-\theta)$, продовжуємо оцінку далі:

$$\le \omega^{1/2}(2^{-n})2^{-n(1-1/p)/2}n^{-(d-1)/2}\left(\sum_{n \le \|s\|_1 < \beta n}\omega^{-\theta}\left(2^{-\|s\|_1}\right)\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{(2-\theta)/2\theta} \times$$
$$\times \left(\sum_{n \le \|s\|_1 < \beta n}\left(\frac{\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right)}{2^{-\alpha\|s\|_1}}2^{-(\alpha-1/p)\|s\|_1}\right)^{\theta/2(\theta-1)}\right)^{(\theta-1)/\theta} \ll$$
$$\ll \omega^{1/2}(2^{-n})2^{-n(1-1/p)/2}n^{-(d-1)/2}\|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}}^{1-\theta/2}\left(\frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\right)^{1/2} \times$$
$$\times \left(\sum_{\|s\|_1 \ge n}\left(2^{-(\alpha-1/p)\|s\|_1}\right)^{\theta/2(\theta-1)}\right)^{(\theta-1)/\theta} \ll \omega(2^{-n})2^{-n(1-1/p)/2}n^{-(d-1)/2}2^{\alpha n/2} \times$$
$$\times 2^{-n(\alpha-1/p)/2}n^{(d-1)(1-1/\theta)} = \omega(2^{-n})2^{n(1/p-1/2)}n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

При значенні β з (19) переконуємося, що

$$I_2 \ll \omega(2^{-\beta n}) 2^{n\beta(1/p-1/q)} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+} = \frac{\omega(2^{-\beta n})}{2^{-\alpha\beta n}} 2^{-\beta(\alpha-1/p+1/q)n} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-(\alpha-1/p+1/2)n} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)} = \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p-1/2)} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)},$$

і тому для випадку $1 \le \theta < 2$ оцінку встановлено. Оцінку зверху доведено.

При доведенні оцінки знизу будемо використовувати двоїсте співвідношення (див., наприклад, [18, с. 42])

$$e_M(f)_q = \inf_{\Theta_M} \sup_{\substack{P \in L^{\perp}(\Theta_M) \\ \|P\|_{q'} \le 1}} \int_{\pi_d} f(x) P(x) dx, \tag{20}$$

де $L^{\perp}(\Theta_M)$ — множина функцій, ортогональна підпростору тригонометричних поліномів з „номерами" гармонік із множини $\Theta_M = \{k^j\}_{j=1}^M$, а $1/q + 1/q' = 1$.

Зазначимо, що оцінку знизу досить встановити для випадку $q = 2$. За заданим M підберемо m таким чином, щоб для кількості елементів множини

$$F_m = \bigcup_{\|s\|_1 \le m} \rho(s)$$

виконувалися співвідношення $|F_m| \ge 2M$ і $|F_m| \asymp 2^m m^{d-1}$ ($|F_m|$ — кількість елементів множини F_m). Розглянемо „ступінчасто-гіперболічне" ядро Діріхле

$$D_m = \sum_{\|s\|_1 \le m} \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)}.$$

Беручи до уваги співвідношення (див., наприклад, [19, с. 214])

$$\left\| \sum_{k=n}^{l} \cos kx \right\|_p \asymp (l-n)^{1-1/p}, \quad \forall\, n,\ l \in N, \quad l > n, \quad p \in (1, \infty),$$

одержуємо

$$\|\delta_s(D_m, \cdot)\|_p = \left\| \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,\cdot)} \right\|_p \asymp 2^{\|s\|_1 (1-1/p)}.$$

Тоді у випадку $1 \le \theta < \infty$ з урахуванням співвідношення

$$\sum_{\|s\|_1 \le n} 2^{\|s\|_1} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\|s\|_1 = j} 2^{\|s\|_1} = \sum_{j=1}^{n} 2^j \sum_{\|s\|_1 = j} 1 \asymp \sum_{j=1}^{n} 2^j j^{d-1} \ll 2^n n^{d-1} \tag{21}$$

маємо

$$\|D_m(\cdot)\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{\|s\|_1 \le m} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \|\delta_s(D_m, \cdot)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{\|s\|_1 \le m} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) 2^{\theta\|s\|_1(1-1/p)} \right)^{1/\theta} \ll \omega^{-1}(2^{-m}) \left(\sum_{\|s\|_1 \le m} 2^{\theta(1-1/p)\|s\|_1} \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \omega^{-1}(2^{-m}) 2^{m(1-1/p)} m^{(d-1)/\theta}.$$

Для випадку $\theta = \infty$ одержуємо

$$\|D_m(\cdot)\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{\|\delta_s(D_m,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \asymp \sup_{\|s\|_1 \le m} \frac{2^{\|s\|_1(1-1/p)}}{\omega(2^{-\|s\|_1})} <<$$

$$<< 2^{m(1-1/p)} \sup_{\|s\|_1 \le m} \omega^{-1}(2^{-\|s\|_1}) << \omega^{-1}(2^{-m})2^{m(1-1/p)}.$$

Звідси робимо висновок, що функції

$$f_1(x) = C_{10}\omega(2^{-m})2^{-m(1-1/p)}m^{-(d-1)/\theta}D_m(x), \quad C_{10} > 0, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{22}$$

та

$$f_2(x) = C_{11}\omega(2^{-m})2^{-m(1-1/p)}D_m(x), \quad C_{11} > 0, \tag{23}$$

належать до класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ та $B^{\Omega}_{p,\infty}$ відповідно.

Тепер побудуємо функцію $P(x)$, яка задовольняла б умови співвідношення (20). Розглянемо поліном

$$F(x) = D_m(x) - \sum_{k^j \in \Theta_M}{}' e^{i(k^j,x)},$$

де штрих означає, що підсумовування виконується тільки за тими $k^j \in \Theta_M$, які містяться в F_m. Якщо $2 < q < \infty$, то $1 < q' < 2$ і

$$\|F(\cdot)\|_{q'} \le \|F(\cdot)\|_2 \le \|D_m(\cdot)\|_2 + \left\| \sum_{k^j \in \Theta_M}{}' e^{i(k^j,\cdot)} \right\|_2.$$

Оцінимо кожен з доданків останньої нерівності.

Внаслідок рівності Парсеваля

$$\left\| \sum_{k^j \in \Theta_M}{}' e^{i(k^j,\cdot)} \right\|_2 = \left(\sum_{k^j \in \Theta_M}{}' 1 \right)^{1/2} \le \sqrt{M},$$

а

$$\|D_m(\cdot)\|_2 = |F_m|^{1/2} \asymp 2^{m/2}m^{(d-1)/2}.$$

Звідси

$$\|F(\cdot)\|_{q'} << 2^{m/2}m^{(d-1)/2} + \sqrt{M}$$

і отже, функція

$$P(x) = C_{12}\left(2^{m/2}m^{(d-1)/2} + \sqrt{M}\right)^{-1} F(x), \quad C_{12} > 0, \tag{24}$$

задовольняє умови $\|P(\cdot)\|_{q'} \le 1$, $P(\cdot) \in L^{\perp}(\Theta_M)$.

Підставляючи (22) і (24) у співвідношення (20), одержуємо для випадку $1 \le$ $\le \theta < \infty$:

$$e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \ge e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_2 >>$$

$$>> \int_{\pi_d} \omega(2^{-m})2^{-m(1-1/p)}m^{-(d-1)/\theta}D_m(x)\frac{D_m(x) - \sum'_{k^j \in \Theta_M} e^{i(k^j,x)}}{2^{m/2}m^{(d-1)/2} + \sqrt{M}}\,dx =$$

$$= \frac{\omega(2^{-m})2^{-m(1-1/p)}m^{-(d-1)/\theta}}{2^{m/2}m^{(d-1)/2}+\sqrt{M}}\left(\int\limits_{\pi_d} D_m^2(x)dx - \int\limits_{\pi_d} D_m(x)\sum\nolimits'_{k^j\in\Theta_M} e^{i(k^j,x)}dx\right) >>$$

$$>> \omega(2^{-m})2^{-m(1-1/p)}m^{-(d-1)/\theta}2^{-m/2}m^{-(d-1)/2}\left(\|D_m(\cdot)\|_2^2 - \left\|\sum_{k^j\in\Theta_M}{}' e^{i(k^j,\cdot)}\right\|_2^2\right) >>$$

$$>> \omega(2^{-m})2^{m(1/p-1/2)}2^{-m}m^{-(d-1)(1/2+1/\theta)}(2^m m^{d-1} - M) >>$$

$$>> \omega(2^{-m})2^{m(1/p-1/2)}m^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Аналогічно, підставляючи (23) і (24) у співвідношення (20), легко довести, що для випадку $\theta=\infty$ має місце порядкова нерівність

$$e_M(B^{\Omega}_{p,\infty})_q >> \omega(2^{-m})2^{m(1/p-1/2)}m^{(d-1)/2}.$$

Оцінки знизу встановлено. Теорему 1 доведено.

***Зауваження.* 1.** При виконанні умов теореми 1 для $\theta=\infty$ має місце порядкове співвідношення

$$e_M(H^{\Omega}_p) \asymp \omega(2^{-n})2^{n(1/p-1/2)}n^{(d-1)/2}, \quad M \asymp 2^n n^{d-1}.$$

2. Якщо $\Omega(t)=\prod_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$, $1<p\le 2<q<\infty$, $1\le\theta\le\infty$ і $\alpha=r_1>1/p$, то виконується співвідношення

$$e_M(B^{r}_{p,\theta})_q \asymp (M^{-1}\log^{d-1}M)^{r_1-1/p+1/2}(\log^{d-1}M)^{1/2-1/\theta},$$

встановлене А. С. Романюком у роботі [13].

Перейдемо до розгляду величини $e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$ при інших співвідношеннях між параметрами p та q. Має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай $2\le p<q<\infty$, $1\le\theta\le\infty$ і $\Omega(t)$ має вигляд (5) з $\omega(\tau)$, що задовольняє умову (S) з деяким $\alpha>1/2$ і умову (S_l). Тоді, для будь-якого натурального M та n, що задовольняє умову $M\asymp 2^n n^{d-1}$, має місце співвідношення*

$$e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Доведення. Зазначимо, що оцінка зверху випливає з відповідної оцінки, одержаної в теоремі 1 при $p=2$. Оскільки при $p\ge 2$ $B^{\Omega}_{p,\theta}\subseteq B^{\Omega}_{2,\theta}$, то

$$e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \le e_M(B^{\Omega}_{2,\theta})_q << \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Доведемо оцінку знизу, використовуючи знову співвідношення двоїстості (20). При цьому будемо користуватися таким результатом Рудіна – Шапіро (див., наприклад, [20, с. 155]): для кожного $s_j\in N$ існує поліном

$$R_{s_j}(x_j) = \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} \varepsilon_{k_j} e^{ik_jx_j}, \quad \varepsilon_{k_j}=\pm 1,$$

такий, що

$$\left\|R_{s_j}(x_j)\right\|_\infty << 2^{s_j/2}. \qquad (25)$$

За заданим M підберемо m таким чином, щоб для кількості елементів множини $F_m = \bigcup_{\|s\|_1 \le m} \rho(s)$ виконувалися співвідношення 1) $|F_m| \ge 2M$; 2) $|F_m| \asymp \asymp 2^m m^{d-1}$. Розглянемо функцію

$$g(x) = \sum_{\|s\|_1 \le m} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j).$$

Нехай $1 \le \theta < \infty$. Тоді, враховуючи (25), (19) та (21), маємо

$$\|g\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s(g,\cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} = \left(\sum_{\|s\|_1 \le m} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \left\| \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j) \right\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \omega^{-1}(2^{-m}) \left(\sum_{\|s\|_1 \le m} \prod_{j=1}^{d} \left\| R_{s_j}(x_j) \right\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \ll \omega^{-1}(2^{-m}) \left(\sum_{\|s\|_1 \le m} 2^{\|s\|_1 \theta/2} \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \omega^{-1}(2^{-m}) 2^{m/2} m^{(d-1)/\theta}.$$

А для випадку $\theta = \infty$ одержуємо

$$\|g\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{\|\delta_s(g,\cdot)\|_p}{\omega(2^{-\|s\|_1})} = \sup_{\|s\|_1 \le m} \frac{\left\| \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j) \right\|_p}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \ll$$

$$\ll \omega^{-1}(2^{-m}) \sup_{\|s\|_1 \le m} 2^{\|s\|_1/2} = \omega^{-1}(2^{-m}) 2^{m/2}.$$

Отже, функції

$$f_3(x) = C_{13} \omega(2^{-m}) 2^{-m/2} m^{-(d-1)/\theta} g(x), \quad C_{13} > 0, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{26}$$

і

$$f_4(x) = C_{14} \omega(2^{-m}) 2^{-m/2} g(x), \quad C_{14} > 0, \tag{27}$$

належать відповідно до класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ і $B^{\Omega}_{p,\infty}$.

Тепер перейдемо до вибору функції $P(x)$. Покладемо

$$F(x) = g(x) - \sum_{\|s\|_1 \le m}{}' \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j),$$

де штрих означає, що сума містить тільки ті гармоніки функції $g(x)$, які мають „номери" з Θ_M.

Беручи до уваги те, що $1 < q' < 2$, маємо

$$\|F(\cdot)\|_{q'} < \|g(\cdot)\|_2 + \left\| \sum_{\|s\|_1 \le m}{}' \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j) \right\|_2 \ll 2^{m/2} m^{(d-1)/2} + \sqrt{M}.$$

Тоді

$$P(x) = \frac{C_{15} F(x)}{2^{m/2} m^{(d-1)/2} + \sqrt{M}}, \quad C_{15} > 0, \tag{28}$$

задовольняє вимоги правої частини співвідношення (20).

Підставляючи (26) і (28) у співвідношення (20), одержуємо

$$e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \gg \frac{\omega(2^{-m})2^{-m/2}m^{-(d-1)/\theta}}{2^{m/2}m^{(d-1)/2}+\sqrt{M}}\left(\int\limits_{\pi_d} g^2(x)dx -\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\pi_d} g(x)\sum_{\|s\|_1\le m}{}' \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j)dx\right) \gg \omega(2^{-m})2^{-m}m^{-(d-1)(1/2+1/\theta)}\times$$

$$\times\left(\|g(\cdot)\|_2^2-\int\limits_{\pi_d}\sum_{\substack{\|s\|_1\le m\\ k^j\notin\Theta_M}}\prod_{j=1}^{d}R_{s_j}(x_j)\sum_{\substack{\|s\|_1\le m\\ k^j\in\Theta_M}}\prod_{j=1}^{d}R_{s_j}(x_j)dx-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\pi_d}\left(\sum_{\|s\|_1\le m}{}'\prod_{j=1}^{d}R_{s_j}(x_j)\right)^2dx\right) \gg \omega(2^{-m})2^{-m}m^{-(d-1)(1/2+1/\theta)}\times$$

$$\times(2^m m^{d-1}-M) \gg \omega(2^{-m})m^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Якщо ж підставити (27) і (28) у (20), то аналогічним чином одержимо

$$e_M(B^{\Omega}_{p,\infty})_q \gg \omega(2^{-m})m^{(d-1)/2}.$$

Оцінку знизу доведено. Теорему 2 доведено.

Зауваження. **3.** При виконанні умов теореми 2 для $\theta=\infty$ має місце порядкове співвідношення

$$e_M(H^{\Omega}_p)_q \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)/2}, \quad M \asymp 2^n n^{d-1}.$$

4. Якщо $\Omega(t)=\prod_{j=1}^{d}t_j^{r_j}$, $2\le p<q<\infty$, $1\le\theta\le\infty$ і $\alpha=r_1>1/2$, то має місце порядкова оцінка

$$e_M(B^{r}_{p,\theta})_q \asymp (M^{-1}\log^{d-1}M)^{r_1}(\log^{d-1}M)^{1/2-1/\theta},$$

встановлена в [13].

Зазначимо, що в [2] отримано точні за порядком оцінки наближення „ступінчасто-гіперболічними'' сумами Фур'є класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в метриці простору L_q та точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників цього ж класу. Зауважимо, що в окремих випадках порядкові оцінки колмогоровських поперечників $d_M(B^{\Omega}_{p,\theta},L_q)$ поступаються за величиною порядковим оцінкам найкращих M членних тригонометричних наближень.

Зауваження. **5.** Якщо виконані умови теореми 1, то має місце оцінка [2]

$$d_M(B^{\Omega}_{p,\theta},L_q) \asymp \omega(2^{-n})2^{n(1/p-1/2)}n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+}, \quad M \asymp 2^n n^{d-1},$$

з якої видно, що при $\theta\ge 2$

$$e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp d_M(B^{\Omega}_{p,\theta},L_q) \asymp \omega(2^{-n})2^{n(1/p-1/2)}n^{(d-1)(1/2-1/\theta)},$$

а при $1\le\theta<2$

$$e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp d_M(B^{\Omega}_{p,\theta},L_q)n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

6. При виконанні умови теореми 2 має місце співвідношення [2]

$$d_M(B^{\Omega}_{p,\theta},L_q) \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+}, \quad M \asymp 2^n n^{d-1},$$

з якого видно, що при $\theta\ge 2$

$$e_M(B_{p,\theta}^{\Omega})_q \asymp d_M(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q) \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1/2-1/\theta)},$$

а при $1 \leq \theta < 2$

$$e_M(B_{p,\theta}^{\Omega})_q \asymp d_M(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q)n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

1. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
2. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.
3. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Там же. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
4. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. – 1994. – **20**. – P. 35 – 48.
5. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 1. – С. 37 – 40.
6. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161 – 178.
7. *Майоров В. Е.* О линейных поперечниках соболевских классов // Докл. АН СССР. – 1978. – **243**, № 5. – С. 1127 – 1130.
8. *Makovoz G. I.* On trigonometric n-width and their generalization // J. Appr. Theory. – 1984. – **41**, № 4. – P. 361 – 366.
9. *Кашин Б. С.* Об аппроксимационных свойствах полных ортонормированных систем // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1985. – **172**. – С. 187 – 191.
10. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Там же. – 1986. – **178**. – 112 с.
11. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей" системой экспонент на классах периодических гладких функций // Там же. – 1987. – **180**. – С. 46 – 47.
12. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей" системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Яросл. ун-т, – 1988. – С. 16 – 33.
13. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B_{p,\theta}^r$. I // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 11. – С. 1535 – 1547.
14. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B_{p,\theta}^r$. II // Там же. – 1993. – **45**, № 10. – С. 1411 – 1423.
15. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // Мат. заметки. – 1994. – **56**, № 5. – С. 57 – 86.
16. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 392 – 416.
17. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
18. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
19. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – К.: Наук. думка, 1987. – 268 с.
20. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 495 с.

Одержано 11.04.01