УДК 517.5

Т. О. Кононович (Полтав. пед. ун-т)

ОЦІНКА НАЙКРАЩОГО НАБЛИЖЕННЯ СУМОВНИХ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ З ПЕВНОЮ СИМЕТРІЄЮ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є

We obtain an upper bound in terms of the Fourier coefficients for the best approximation of summable functions of several variables in the metric L by trigonometric polynomials. We consider functions that are represented by trigonometric series with certain symmetry of coefficients satisfying the multiple analog of the Sidon – Telyakovskii conditions.

Отримано виражену через коефіцієнти Фур'є оцінку зверху найкращого наближення в метриці L тригонометричними поліномами сумовних функцій кількох змінних. Розглядаються функції, що зображаються тригонометричними рядами з певною симетрією коефіцієнтів, які задовольняють кратний аналог умов Сідона–Теляковського.

Нехай R^m, $m = 2, 3, \ldots$, — m-вимірний дійсний евклідів простір з елементами $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, Z^m — точки простору R^m з цілими координатами, L— простір сумовних функцій m змінних, 2π-періодичних за кожною змінною, з нормою

$$\|f(\mathbf{x})\|_L = \int_{T^m} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x},$$

де $T^m = [-\pi; \pi]^m$, $d\mathbf{x} = dx_1 \ldots dx_m$.

Позначимо через W множину поліедрів V з раціональними вершинами, зірчастих відносно початку координат — точки O, яка є внутрішньою точкою поліедра V, і таких, що продовження всіх граней не проходять через O.

Для будь-якого $n \in N$ визначимо

$$nV = \left\{\mathbf{x} \in R^m : \frac{1}{n}\mathbf{x} \in V\right\};$$

нехай для $n = 0$ $0V$ збігається з початком координат, а для $n = -1$ покладемо $(-1)V = \varnothing$.

Нехай також T_n — множина тригонометричних поліномів вигляду

$$t_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \sum_{\mathbf{l} \in kV \setminus (k-1)V} e^{i\mathbf{l}\mathbf{x}},$$

де $n \in N_0 = N \cup \{0\}$, α_k — довільні числа, $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_m)$— елемент Z^m, $\mathbf{l}\mathbf{x} = l_1 x_1 + \ldots + l_m x_m$.

Позначимо через $E_n(f)$ величину найкращого наближення функції $f \in L$ тригонометричними поліномами $t_n \in T_n$:

$$E_n(f) = \inf_{t_n \in T_n} \|f(\mathbf{x}) - t_n(\mathbf{x})\|_L.$$

Для довільної числової послідовності $\{a_l\}$ визначимо $\Delta a_l := a_l - a_{l+1}$, $\Delta^2 a_l := := \Delta a_i - \Delta a_{i+1}$. Домовимось через C позначати абсолютні додатні сталі, які можуть бути неоднаковими в різних формулах.

Для 2π-періодичних сумовних функцій однієї змінної відомо ряд виражених через коефіцієнти Фур'є оцінок їх найкращого наближення тригонометричними поліномами порядку не вище n (див., наприклад, [1, с. 92, 103], [2] (§ 10, теореми 1, 3), [3] (теорема 3), [4] (лема 2)). Автором одержано оцінки найкращого наближення функцій $f \in L$ через їх коефіцієнти Фур'є при $m = 2$ тригонометричними поліномами вигляду

$$t_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} 2^{-\gamma}\Big(A_{l_1 l_2} \cos l_1 x_1 \cos l_2 x_2 + B_{l_1 l_2} \cos l_1 x_1 \sin l_2 x_2 +$$

$$+ C_{l_1 l_2} \sin l_1 x_1 \cos l_2 x_2 + D_{l_1 l_2} \sin l_1 x_1 \sin l_2 x_2\Big),$$

де γ — кількість рівних нулю координат вектора (l_1, l_2), $A_{l_1 l_2}$, $B_{l_1 l_2}$, $C_{l_1 l_2}$, $D_{l_1 l_2}$ — довільні дійсні числа, $n_1, n_2 \in N_0$ (див. [5, 6]).

У даній роботі будемо розглядати функції, що зображаються тригонометричними рядами з певною симетрією коефіцієнтів:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{\mathbf{l} \in kV \setminus (k-1)V} e^{i\mathbf{l}\mathbf{x}}.$$

Під сумою ряду розумітимемо

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\mathbf{l} \in kV \setminus (k-1)V} e^{i\mathbf{l}\mathbf{x}}.$$

Встановимо виражену через коефіцієнти Фур'є оцінку зверху найкращого наближення таких функцій поліномами $t_n \in T_n$.

Теорема. *Нехай $V \in W$ і $\{a_k\}$ — числова послідовність. Якщо $a_k \to 0$ при $k \to \infty$ і існують такі дійсні числа A_k, що*

$$A_k \downarrow 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{1}$$

$$|\Delta a_k| \le A_k \quad \text{для всіх} \quad k \in N_0, \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k < \infty, \tag{3}$$

то для функції

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{\mathbf{l} \in kV \setminus (k-1)V} e^{i\mathbf{l}\mathbf{x}} \tag{4}$$

справедлива оцінка

$$E_n(f) \le C \sum_{k=[n/2]+1}^{\infty} \max_{m \ge k} |\Delta a_m|, \qquad n = 0, 1, \ldots. \tag{5}$$

Доведення. Зауважимо, що при виконанні для $\{a_k\}$ умов теореми, які називають умовами Сідона–Теляковського [7], ряд (4) збігається майже скрізь на T^m, функція $f(\mathbf{x})$ інтегровна на T^m і ряд (4) є її рядом Фур'є [8].

Нехай $V_{n/2}^{n}(f;\mathbf{x})$ — сума Валле Пуссена вигляду

$$V_{n/2}^{n}(f;\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}a_k\sum_{\mathbf{l}\in kV\setminus(k-1)V}e^{i\mathbf{l}\mathbf{x}},$$

де

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases}1, & \text{якщо} \quad 0\le k\le n-[n/2];\\ 1-\dfrac{k-n+[n/2]}{[n/2]+1}, & \text{якщо} \quad n-[n/2]+1\le k\le n.\end{cases}$$

Тоді

$$E_n(f) \le \int_{T^m}|f(\mathbf{x})-V_{n/2}^{n}(f;\mathbf{x})|d\mathbf{x} = \int_{T^m}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\sum_{\mathbf{l}\in kV\setminus(k-1)V}e^{i\mathbf{l}\mathbf{x}}\right|d\mathbf{x}, \tag{6}$$

де

$$\beta_k = \begin{cases}0, & \text{якщо} \quad 0\le k\le n-[n/2];\\ \dfrac{k-n+[n/2]}{[n/2]+1}a_k, & \text{якщо} \quad n-[n/2]+1\le k\le n;\\ a_k, & \text{якщо} \quad k\ge n+1.\end{cases} \tag{7}$$

Покажемо, що для так означених коефіцієнтів β_k виконуються умови Сідона – Теляковського: $\beta_k\to 0$ при $k\to\infty$ (справджується, оскільки $a_k\to 0$ і має місце (7)), існують такі дійсні числа B_k, що

$$B_k\downarrow 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty, \tag{8}$$

$$|\Delta\beta_k| \le B_k \quad \text{для всіх} \quad k\in N_0, \tag{9}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}B_k < \infty. \tag{10}$$

Врахувавши (7), знайдемо

$$\Delta\beta_k = \begin{cases}0, & \text{якщо} \quad 0\le k\le n-[n/2]-1;\\ \dfrac{k-n+[n/2]}{[n/2]+1}\Delta a_k-\dfrac{a_{k+1}}{[n/2]+1}, & \text{якщо} \quad n-[n/2]\le k\le n;\\ \Delta a_k, & \text{якщо} \quad k\ge n+1.\end{cases}$$

Покладемо

$$B_k = \begin{cases}\dfrac{1}{[n/2]+1}\left(A_{n-[n/2]+1}+\sum_{j=n-[n/2]+1}^{\infty}A_j\right), & \text{якщо} \quad 0\le k\le n-[n/2];\\ \dfrac{k-n+[n/2]}{[n/2]+1}A_k+\dfrac{1}{[n/2]+1}\sum_{j=k+1}^{\infty}A_j, & \text{якщо} \quad n-[n/2]+1\le k\le n+1;\\ A_k, & \text{якщо} \quad k\ge n+2,\end{cases}$$

і перевіримо виконання умов (8) – (10) для послідовності $\{B_k\}$.

Знайдемо

$$\Delta B_k = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad 0 \le k \le n-[n/2]-1; \\ \dfrac{1}{[n/2]+1} A_{n-[n/2]+1}, & \text{якщо} \quad k = n-[n/2]; \\ \dfrac{k-n+[n/2]}{[n/2]+1} \Delta A_k, & \text{якщо} \quad n-[n/2]+1 \le k \le n; \\ \Delta A_{n+1} + \dfrac{1}{[n/2]+1} \sum\limits_{j=n+2}^{\infty} A_j, & \text{якщо} \quad k = n+1; \\ \Delta A_k, & \text{якщо} \quad k \ge n+2. \end{cases}$$

Таким чином, $\Delta B_k \ge 0$ для всіх $k \in N_0$ і $B_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$ (оскільки має місце (1)). Отже, для послідовності $\{B_k\}$ виконується умова (8).

Перевіримо виконання умови (9). Нехай $0 \le k \le n-[n/2]-1$, тоді $|\Delta\beta_k| = 0 \le B_k$. Якщо $k = n-[n/2]$, то

$$|\Delta\beta_{n-[n/2]}| = \frac{1}{[n/2]+1}|a_{n-[n/2]+1}| \le \frac{1}{[n/2]+1}\sum_{j=n-[n/2]+1}^{\infty}|\Delta a_j| \le$$

$$\le \frac{1}{[n/2]+1}\sum_{j=n-[n/2]+1}^{\infty} A_j \le B_{n-[n/2]}.$$

При $n-[n/2]+1 \le k \le n$ маємо

$$|\Delta\beta_k| \le \frac{k-n+[n/2]}{[n/2]+1}|\Delta a_k| + \frac{1}{[n/2]+1}\sum_{j=k+1}^{\infty}|\Delta a_j| \le B_k.$$

Якщо ж $k = n+1$, то $|\Delta\beta_{n+1}| = |\Delta a_{n+1}| \le A_{n+1} \le B_{n+1}$. Нарешті, при $k \ge n+2$ маємо $|\Delta\beta_k| = |\Delta a_k| \le A_k = B_k$.

Отже, для послідовності $\{B_k\}$ виконується умова (9).

Перевіримо збіжність ряду (10):

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k = \sum_{k=0}^{n-[n/2]} B_k + \sum_{k=n-[n/2]+1}^{n+1} B_k + \sum_{k=n+2}^{\infty} B_k = \frac{n-[n/2]+1}{[n/2]+1}\Bigg(A_{n-[n/2]+1} +$$

$$+ \sum_{j=n-[n/2]+1}^{\infty} A_j\Bigg) + \sum_{k=n-[n/2]+1}^{n+1}\left(\frac{k-n+[n/2]}{[n/2]+1}A_k + \frac{1}{[n/2]+1}\sum_{j=k+1}^{\infty} A_j\right) + \sum_{k=n+2}^{\infty} A_k \le$$

$$\le 2\left(A_{n-[n/2]+1} + \sum_{j=n-[n/2]+1}^{\infty} A_j\right) + \sum_{k=n-[n/2]+1}^{n+1} A_k + \sum_{j=n-[n/2]+2}^{\infty} A_j + \sum_{k=n+2}^{\infty} A_k \le$$

$$\le C\sum_{k=n-[n/2]+1}^{\infty} A_k. \tag{11}$$

Оскільки має місце (3), ряд (10) збігається.

Таким чином, для оцінки інтеграла (6) застосуємо результат О. І. Кузнєцової [8] і, врахувавши (11) та поклавши $A_k = \max\limits_{m \ge k}|\Delta a_m|$ (див. [7]), одержимо

$$E_n(f) \le C\sum_{k=0}^{\infty} B_k \le C\sum_{k=[n/2]+1}^{\infty} A_k = C\sum_{k=[n/2]+1}^{\infty}\max_{m \ge k}|\Delta a_m|.$$

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нехай $V \in W$ і $\{a_k\}$ — послідовність дійсних чисел. Якщо $a_k \to 0$ при $k \to \infty$ і $\Delta^2 a_k \ge 0$ для всіх $k \in N_0$, то для функції (4) справедлива оцінка*

$$E_n(f) \leq C a_{[n/2]+1}, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Доведення. Покладемо $A_k = \Delta a_k$. Тоді послідовність $\{a_k\}$ буде задовольняти умови (1) – (3) і матиме місце оцінка (5). Отже,

$$E_n(f) \leq C \sum_{k=[n/2]+1}^{\infty} \max_{m \geq k} |\Delta a_m| = C \sum_{k=[n/2]+1}^{\infty} \Delta a_k = C a_{[n/2]+1}.$$

Наслідок 1 доведено.

Наслідок 2. *Нехай $V \in W$ і $\{a_k\}$ — числова послідовність. Якщо $a_k \to 0$ при $k \to \infty$ і $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2 a_k| < \infty$, то для функції (4) справедлива оцінка*

$$E_n(f) \leq C \sum_{k=[n/2]+1}^{\infty} (k - [n/2]) |\Delta^2 a_k|, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Доведення. Збіжна до нуля квазіопукла послідовність $\{a_k\}$ задовольняє умови (1) – (3) $\left(\text{досить покласти } A_k = \sum_{j=k}^{\infty} |\Delta^2 a_j| \right)$. Тому має місце оцінка (5). Отже,

$$E_n(f) \leq C \sum_{k=[n/2]+1}^{\infty} \max_{m \geq k} |\Delta a_m| \leq C \sum_{k=[n/2]+1}^{\infty} \max_{m \geq k} \sum_{j=m}^{\infty} |\Delta^2 a_j| =$$

$$= C \sum_{k=[n/2]+1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} |\Delta^2 a_j| = C \sum_{j=[n/2]+1}^{\infty} |\Delta^2 a_j| \sum_{k=[n/2]+1}^{j} 1 = C \sum_{j=[n/2]+1}^{\infty} (j - [n/2]) |\Delta^2 a_j|.$$

Наслідок 2 доведено.

1. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
2. *Баскаков В. А.* Линейные полиномиальные операторы с наилучшим порядком приближения. – Калинин: Калинин. ун-т, 1984. – 80 с.
3. *Конюшков А. А.* Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. – 1958. – **44**, № 1. – С. 53 – 84.
4. *Гейт В. Е.* О структурных и конструктивных свойствах синус- и косинус-рядов с монотонной последовательностью коэффициентов Фурье // Изв. вузов. Математика. – 1969. – **86**, № 7. – С. 39 – 47.
5. *Кононович Т. О.* Оцінка найкращого наближення сумовних функцій двох змінних // Теорія наближень та гармонічний аналіз: Тези доп. Укр. мат. конгресу (Київ, 21 – 25 серпня 2001 р.). – Київ, 2001. – С. 30.
6. *Кононович Т. О.* Оцінка наближення тригонометричними поліномами сумовних функцій двох змінних // Теория функций и мат. физика: Тез. докл. Междунар. конф. (Харьков, 13 – 17 августа 2001 г.). – Харьков, 2001. – С. 48 – 50.
7. *Теляковский С. А.* Об одном достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов // Мат. заметки. – 1973. – **14**, № 3. – С. 317 – 328.
8. *Кузнецова О. И.* Об одном условии интегрируемости кратных тригонометрических рядов // Докл. расшир. зас. сем. Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа. – 1985. – **1**, № 2. – С. 87 – 90.

Одержано 28.02.2002