УДК 517.5

О. І. Степанець, А. Л. Шидліч (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ n-ЧЛЕННІ НАБЛИЖЕННЯ Λ-МЕТОДАМИ У ПРОСТОРАХ S_φ^p

We find the exact values of upper bounds of n-term approximations of q-ellipsoids by Λ-methods in the spaces S_φ^q in metrics of the spaces S_φ^p.

Знайдено точні значення верхніх меж n-членних наближень Λ-методами q-еліпсоїдів у просторах S_φ^q в метриках просторів S_φ^p.

1. Означення і деякі властивості просторів S_φ^p. Простори S_φ^p було введено у роботі [1], і означаються вони таким чином.

Нехай X — довільний лінійний комплексний простір, $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — фіксована зчислення система в ньому і для будь-якої пари $x, y \in X$, в якій хоча б один із елементів належить до φ, визначено скалярний добуток (x, y), що задовольняє умови:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$, λ, μ — довільні числа;

3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Кожному елементу $f \in X$ ставиться у відповідність система чисел $\hat{f}_\varphi(k) = (f, \varphi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, і при даному фіксованому $p \in (0, \infty)$ розглядають множини

$$S_\varphi^p = S_\varphi^p(X) = \left\{ f \in X : \sum_{k=1}^\infty \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p < \infty \right\}. \tag{1}$$

При цьому елементи $x, y \in S_\varphi^p$ вважаються тотожними, якщо для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ виконується рівність $\hat{x}_\varphi(k) = \hat{y}_\varphi(k)$.

Таким чином, простори S_φ^p породжуються простором X, ортонормованою системою φ, скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ і числом $p \in (0, \infty)$.

Відстань між елементами $x, y \in S_\varphi^p$ визначається рівністю

$$\rho(x, y)_p = \left(\sum_{k=1}^\infty \left| \hat{x}_\varphi(k) - \hat{y}_\varphi(k) \right|^p \right)^{1/p}.$$

Нульовим елементом простору S_φ^p називається елемент θ, для якого $\hat{\theta}_\varphi(k) = 0$ при всіх $k \in \mathbb{N}$. Відстань $\rho(\theta, f)$, $f \in S_\varphi^p$, називається нормою елемента f і позначається $\|f\|_p$, тобто

$$\|f\|_p = \|f\|_{\varphi,p} = \rho(\theta, f)_p = \left(\sum_{k=1}^\infty \left| \hat{f}_\varphi(k) \right|^p \right)^{1/p}. \tag{2}$$

Як показано в роботі [2], множина S_φ^p утворює лінійний простір. Крім того, оскільки при $p \geq 1$ функціонал $\|\cdot\|$, означений рівністю (2), задовольняє всі аксіоми норми (що легко перевірити), то при $p \geq 1$ S^p_φ — лінійний нормований простір, який містить ортонормовану систему.

2. ψ-Інтеграли в просторах S^p_φ. Нехай $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, — довільна система комплексних чисел. Якщо для даного елемента $f \in X$, формальний ряд Фур'є якого має вигляд

$$S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k, \tag{3}$$

існує елемент $F \in X$, для якого

$$S[F]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k, \tag{4}$$

тобто коли

$$\hat{F}_\varphi(k) = \psi_k \hat{f}_\varphi(k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

то елемент F називають *ψ-інтегралом елемента* f і записують $F = \mathcal{J}^\psi f$. Якщо $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з X, то множину ψ-інтегралів всіх елементів з $\mathfrak{N}$ позначають через $\psi\mathfrak{N}$. Зокрема, ψS^p_φ — множина ψ-інтегралів усіх елементів, що належать до S^p_φ.

Якщо f і F пов'язані між собою співвідношенням (4) (або (5)), то інколи f називають ψ-похідною елемента F і записують $f = D^\psi F = F^\psi$.

Позначимо через U^p_φ одиничну кулю у просторі S^p_φ:

$$U^p_\varphi = \left\{ f \in S^p_\varphi : \|f\|_p \leq 1 \right\}.$$

Тоді ψU^p_φ — множина ψ-інтегралів усіх елементів із U^p_φ. Зауважимо, що коли простір S^p_φ є повним і виконується умова

$$\psi_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

то

$$\psi U^p_\varphi = \left\{ f \in S^p_\varphi : \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\hat{f}_\varphi(k)}{\psi_k} \right|^p \leq 1 \right\},$$

тобто множина ψU^p_φ є p-еліпсоїдом у просторі S^p_φ, півосі якого дорівнюють $|\psi_k|$.

Надалі будемо вимагати, щоб система ψ задовольняла умову

$$\lim_{k \to \infty} |\psi_k| = 0. \tag{7}$$

Слід зазначити (див., наприклад, [1 – 3]), що умова (7) забезпечує включення $\psi S^p_\varphi \subset S^p_\varphi$. Крім того, якщо $0 < q \leq p$, то є правильними включення:

$$S^q_\varphi \subset S^p_\varphi \quad \text{i} \quad \psi U^q_\varphi \subset \psi U^p_\varphi.$$

3. Найкращі n-членні наближення Λ-методами у просторах S^p_φ. Нехай множина S_φ^p породжується простором X, ортонормованою системою φ та числом p, $p > 0$, і $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, — довільна система комплексних чисел, що задовольняє умови (6) та (7).

Сформулюємо спочатку означення найкращого n-членного наближення за С. Б. Стєчкіним [4].

Означення 1. *Нехай n — фіксоване натуральне число, γ_n — довільний набір із n натуральних чисел і*

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k \in \gamma_n} a_k \varphi_k,$$

де a_k — деякі комплексні числа.

Величина

$$e_n(f)_\varphi = e_n(f)_{\varphi,p} = \inf_{a_k, \gamma_n} \| f - P_{\gamma_n} \|_{\varphi,p}$$

називається найкращим n-членним наближенням елемента $f \in S_\varphi^p$ у просторі S_φ^p.

Як зазначено в роботі [1], внаслідок (2) для будь-якого елемента $f \in S_\varphi^p$ і для довільного набору γ_n виконується нерівність

$$\| f - P_{\gamma_n} \|_{\varphi,p}^p \geq \sum_{k \overline{\in} \gamma_n} \left| \hat{f}_\varphi(k) \right|^p.$$

Звідси випливає

$$e_n^p(f)_p = \inf_{\gamma_n} \sum_{k \overline{\in} \gamma_n} \left| \hat{f}_\varphi(k) \right|^p. \tag{8}$$

Далі, наслідуючи Г. Г. Харді, Д. Є. Літтлвуда та Г. Поліа (див. [5, с. 313]), наведемо таке означення.

Означення 2. *Нехай $i(k)$ — довільна функція натурального аргументу, що встановлює взаємно однозначне відображення множини $\mathbb{N}$ на себе. Тоді послідовність натуральних чисел $\gamma = \{i_k\}_{k=1}^\infty$ таких, що*

$$i_k = i(k) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

називається перестановкою натурального ряду, що відповідає функції $i(k)$.

Множину всіх таких перестановок позначимо через Γ.

Нехай тепер Λ — трикутна числова матриця така, що

$$\Lambda = \Lambda_1 = \| \lambda_k^{(n)} \| : \lambda_k^{(n)} = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \lambda_k^{(n)} = 0, \quad k > n. \tag{9}$$

Для довільного елемента $f \in S_\varphi^p$ розглянемо величину

$$e_n(f, \Lambda_1)_{\varphi,p} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \| f - S_n(f, \gamma) \|_p,$$

де

$$S_n(f, \gamma) = \sum_{k=1}^n \hat{f}_\varphi(i_k) \varphi_{i_k} \tag{10}$$

— частинна сума Фур'є, що відповідає перестановці γ. На підставі означення норми простору S_φ^p і (10) для будь-якої перестановки $\gamma = \{i_1, i_2, \ldots\}$ виконується співвідношення

$$\|f - S_n(f, \gamma)\|_p^p = \sum_{k \overline{\in} \gamma_n} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p,$$

де $\gamma_n = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ — набір із перших n чисел, що належать γ. Звідси видно, що

$$e_n^p(f, \Lambda_1)_p = \inf_{\gamma_n} \sum_{k \overline{\in} \gamma_n} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p. \tag{11}$$

Порівнюючи співвідношення (8) та (11), робимо висновок, що у просторах S_φ^p величини $e_n(f)_p$ і $e_n(f, \Lambda_1)_p$ співпадають. У зв'язку з цим природною є задача про дослідження величин

$$e_n^p(f, \Lambda)_{p,\varphi} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \left|1 - \lambda_k^{(n)}\right|^p \left|\hat{f}_\varphi(i_k)\right|^p = \inf_{\gamma \in \Gamma} \|f - U_n(f; \Lambda; \gamma)\|_p^p,$$

які у випадку, коли $\lambda_k^{(n)}$ задаються співвідношеннями (9), співпадають з величинами $e_n^p(f)_{p,\varphi}$.

Отже, нехай

$$\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \lambda_k^{(n)} = 0, \quad k > n,$$

— нескінченна трикутна матриця чисел і $\gamma = \{i_1, i_2, \ldots\}$ — довільна перестановка з множини Γ. Кожному елементу $f \in S_\varphi^p$ на основі його розкладу (3) в ряд Фур'є за системою φ поставимо у відповідність поліном $U_n(f; \Lambda; \gamma)$ вигляду

$$U_n(f; \Lambda; \gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \hat{f}_\varphi(i_k) \varphi_{i_k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \hat{f}_\varphi(i_k) \varphi_{i_k}, \tag{12}$$

де $i_k \in \gamma$. Таким чином, для будь-якої перестановки $\gamma \in \Gamma$ довільна трикутна числова матриця Λ визначає конкретну послідовність поліноміальних операторів $U_n(f; \Lambda; \gamma)$, заданих на S_φ^p. У цьому випадку також говорять, що матриця Λ визначає конкретний Λ-метод.

Далі будемо вважати, що числа $\lambda_k^{(n)}$ задовольняють умову

$$\left|1 - \lambda_k^{(n)}\right| \leq 1, \quad k, n = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Означення 3. *Нехай $U_n(\Lambda)$ — довільний Λ-метод, який породжує поліноми $U_n(f; \Lambda; \gamma)$ вигляду* (12), *f — будь-який елемент простору S_φ^p і $n \in \mathbb{N}$. Величину*

$$e_n(f, \Lambda)_p = e_n(f, \Lambda)_{\varphi, p} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \|f - U_n(f; \Lambda; \gamma)\|_p \tag{14}$$

будемо називати найкращим n-членним наближенням елемента $f \in S_\varphi^p$ за допомогою даного Λ-методу в просторі S_φ^p.

Наступне твердження дає точне значення величини

$$e_n^p(\psi U_\varphi^q, \Lambda)_p = \sup_{f \in \psi U_\varphi^q} e_n^p(f, \Lambda)_p,$$

що називається найкращим n-членним наближенням класу ψU_{φ}^{q} даним Λ-методом.

Теорема 1. *Нехай* $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ *— довільна система комплексних чисел, для якої виконуються умови* (6) *та* (7), p *і* q *— довільні числа такі, що* $0 < q \le p$, *і* $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$ *— трикутна матриця чисел, що задовольняють умову* (13). *Тоді для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$ *є правильною рівність*

$$e_n^p(\psi U_{\varphi}^{q}, \Lambda)_p = \sup_{s\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{s} \beta_k^p \left(\sum_{k=1}^{s} \overline{\psi}_k^{-q}\right)^{-p/q} = \sum_{k=1}^{s^*} \beta_k^p \left(\sum_{k=1}^{s^*} \overline{\psi}_k^{-q}\right)^{-p/q}, \tag{15}$$

де $\beta = \{\beta_k\}$ *і* $\overline{\psi} = \{\overline{\psi}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ *— системи, утворені шляхом впорядкування величин* $\left|1 - \lambda_k^{(n)}\right|$ *і* $|\psi_k|$ *відповідно, за неспаданням і незростанням, а* s^* *— деяке натуральне число.*

Зауваження. Зазначимо, що у випадку, коли числа $\lambda_k^{(n)}$ визначаються співвідношеннями (9), тобто коли $e_n(f, \Lambda)_p = e_n(f)_p$, співвідношення (15) отримано в [2].

Надалі при доведенні даної теореми, а також при формулюванні та доведенні допоміжних тверджень будемо здебільшого дотримуватися позначень і схеми, які запропоновані у роботах [1 – 3].

Доведення. Якщо $f \in \psi U_{\varphi}^{q}$, то згідно з (5)

$$e_n^p(f, \Lambda)_p = \inf_{\gamma\in\Gamma}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|1 - \lambda_k^{(n)}\right|^p \left|\hat{f}_{\varphi}^{\psi}(i_k)\right|^p \left|\psi_{i_k}\right|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\hat{f}_{\varphi}^{\psi}(i_k)\right|^p\left|\psi_{i_k}\right|^p\right), \tag{16}$$

де $i_k \in \gamma$. Впорядкуємо у першій сумі співвідношення (16) доданки за неспаданням величин $\left|1 - \lambda_k^{(n)}\right|$. Зрозуміло, що це можна зробити, і при цьому величина правої частини (16) не зміниться. На підставі означення системи $\beta = \{\beta_k\}$ отримаємо

$$e_n^p(f, \Lambda)_p = \inf_{\gamma\in\Gamma}\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^p \left|\hat{f}_{\varphi}^{\psi}(i_k)\right|^p \left|\psi_{i_k}\right|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k^p \left|\hat{f}_{\varphi}^{\psi}(i_k)\right|^p\left|\psi_{i_k}\right|^p\right). \tag{17}$$

Тоді, покладаючи $\left|\hat{f}_{\varphi}^{\psi}(k)\right|^q = m_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ і враховуючи, що для будь-якого елемента f з множини ψU_{φ}^{q}

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\hat{f}_{\varphi}^{\psi}(k)\right|^q = \sum_{k=1}^{n} m_k \le 1,$$

маємо

$$e_n^p(\psi U_{\varphi}^{q}, \Lambda)_p = \sup_{f\in\psi U_{\varphi}^{q}} \inf_{\gamma\in\Gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^p \left|\hat{f}_{\varphi}^{\psi}(i_k)\right|^p \left|\psi_{i_k}\right|^p \le$$

$$\le \sup_{|m|\le 1} \inf_{\gamma\in\Gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^p \left|\psi_{i_k}\right|^p m_{i_k}^{r}, \tag{18}$$

де

$$r = \frac{p}{q} \geq 1, \quad |m| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k, \quad m_k \geq 0.$$

Для знаходження значення останньої величини у співвідношенні (18) використаємо таку лему для числових рядів.

Лема 1. *Нехай* $\alpha = \{\alpha_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — *послідовність додатних чисел*, $\alpha_k > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, *для якої*

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0, \tag{19}$$

$m = \{m_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — *послідовність невід'ємних чисел*, $m_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, *що задовольняє умову*

$$|m| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \leq 1, \tag{20}$$

і $\nu = \{\nu_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — *неспадна обмежена послідовність невід'ємних чисел таких, що*

$$\nu_k \leq 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

і $\nu_k > 0$ *для всіх значень* k, *більших за деяке число* k_ν.

(У такому випадку будемо писати $\alpha \in \mathcal{A}$, $m \in \mathcal{M}$ *і* $\nu \in \mathcal{V}$.*)*

Нехай, далі, r — *довільне число*, $r \geq 1$,

$$\rho_\gamma(m) = \rho_\gamma^{(r)}(m, \nu, \alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \alpha_{i_k} m_{i_k}^r,$$

де $\gamma = \{i_1, i_2, \ldots\}$ — *довільна перестановка натурального ряду,*

$$\mathcal{E}(m) = \mathcal{E}^{(r)}(m, \nu, \alpha) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \rho_\gamma(m) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \rho_\gamma^{(r)}(m, \nu, \alpha)$$

і

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(r)}(\nu, \alpha) = \sup_{m\in\mathcal{M}} \mathcal{E}(m) = \sup_{m\in\mathcal{M}} \mathcal{E}^{(r)}(m, \nu, \alpha).$$

Тоді є правильною рівність

$$\mathcal{E} = \sup_{s\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{s} \nu_i \left(\sum_{k=1}^{s} \overline{\alpha}_k^{-1/r} \right)^{-r} = \sum_{i=1}^{s^*} \nu_i \left(\sum_{k=1}^{s^*} \overline{\alpha}_k^{-1/r} \right)^{-r}, \tag{22}$$

де $\overline{\alpha} = \{\overline{\alpha}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *послідовність, утворена шляхом впорядкування величин* α_k *за незростанням, а* $s^* = s^*(\nu, \alpha)$ — *деяке натуральне число.*

Припустимо, що лему доведено. Тоді, покладаючи $|\psi_k|^p = \alpha_k$ і $\beta_k^p = \nu_k$, $k \in \mathbb{N}$, бачимо, що на підставі (6), (7), (13) і означення системи β числа α_k та ν_k задовольняють умови леми, і тому згідно з (18) і (22)

$$e_n^p(\psi U_\varphi^q, \Lambda)_p \leq \mathcal{E}^{(r)}(\nu, \alpha) = \sup_{s\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{s} \nu_k \left(\sum_{i=1}^{s} \overline{\alpha}_i^{-1/r} \right)^{-r} =$$

$$= \sum_{k=1}^{s^*} \nu_k \left(\sum_{i=1}^{s^*} \overline{\alpha}_i^{-1/r} \right)^{-r} = \sum_{i=1}^{s^*} \beta_k^p \left(\sum_{k=1}^{s^*} \overline{\psi}_i^{-q} \right)^{-p/q}.$$

Для завершення доведення теореми залишилося показати, що в класі ψU_φ^q існує елемент f_*, для якого

$$e_n^p(f_*, \Lambda)_p = \sum_{k=1}^{s^*} \beta_k^p \left(\sum_{i=1}^{s^*} \overline{\psi}_i^{-q} \right)^{-p/q}. \tag{23}$$

З цією метою покладемо

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k} \varphi_{i_k}, \tag{24}$$

де числа i_k підібрано так, що $|\psi_{i_k}| = \overline{\psi}_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$, і

$$c_{i_k} = \begin{cases} \left(\overline{\psi}_k^q \sum\limits_{j=1}^{s^*} \overline{\psi}_j^{-q} \right)^{-1/q}, & k = 1, 2, \ldots, s^*; \\ 0, & k > s^*. \end{cases} \tag{25}$$

Елемент h є лінійною комбінацією скінченної кількості елементів φ_j, тому він належить до S_φ^p для будь-якого $p > 0$, а оскільки

$$\|h\|_{\varphi,q}^q = \sum_{i=1}^{s^*} c_{i_k}^q = \left(\sum_{j=1}^{s^*} \overline{\psi}_j^{-q} \right)^{-1} \sum_{k=1}^{s^*} \overline{\psi}_k^{-q} = 1,$$

то $h \in U_\varphi^q$. Тому, покладаючи $f_* = \mathcal{J}^\psi h$, робимо висновок, що $f_* \in \psi U_\varphi^q$ і $f_*^\psi = h$.

На підставі (17), (24) і (25) маємо

$$e_n^p(f_*, \Lambda)_p = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^p c_{i_k}^p \overline{\psi}_k^p = \sum_{k=1}^{s^*} \beta_k^p \left(\sum_{i=1}^{s^*} \overline{\psi}_i^{-q} \right)^{-p/q}.$$

Таким чином, співвідношення (23), а з ним і теорему доведено.

4. Доведення леми. Нехай послідовності α і ν задовольняють умови леми. Для будь-якої послідовності $m \in \mathcal{M}$ надалі будемо позначати через $\gamma^* = \gamma^*(m) = \{i_1^*, i_2^*, \ldots\}$ перестановку натурального ряду, для якої

$$\alpha_{i_1^*} m_{i_1^*}^r \geq \alpha_{i_2^*} m_{i_2^*}^r \geq \ldots \geq \alpha_{i_k^*} m_{i_k^*}^r \geq \ldots. \tag{26}$$

На підставі (19) і (20) $\alpha_k m_k^r \to 0$ при $k \to \infty$, і знайдеться принаймні одна перестановка γ^*, що задовольняє умову (26). Оскільки послідовність ν неспадна, то справедлива рівність

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \rho_\gamma(m) = \rho_{\gamma^*}(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \alpha_{i_k^*} m_{i_k^*}^r. \tag{27}$$

Мета наших подальших міркувань — звузити коло послідовностей $m \in \mathcal{M}$, на яких достатньо розглядати верхні межі величин $\mathcal{E}^{(\alpha,r)}(m)$, щоб одержати оцінку величини $\mathcal{E}$.

Позначимо через $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(\alpha) = \{l_1, l_2, \ldots\}$ перестановку натурального ряду таку, що для будь-якого $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha_{l_k} = \bar{\alpha}_k. \tag{28}$$

Тоді є правильним таке твердження.

Твердження 1. *Якщо* $\alpha \in \mathcal{A}$ *і* $\nu \in \mathcal{V}$, *то для будь-якої послідовності* $m \in \mathcal{M}$ *можна вказати послідовність* $m' \in \mathcal{M}$, *для якої*:

1) $|m'| = |m|$;

2) $\alpha_{l_1} m_{l_1}'^{\,r} \geq \alpha_{l_2} m_{l_2}'^{\,r} \geq \ldots \geq \alpha_{l_n} m_{l_n}'^{\,r} \geq \ldots$ (29)

(*тобто* $i_k^* = l_k$, *де* $i_k^* \in \gamma^*(m')$, *а* $l_k \in \bar{\gamma}(\alpha)$);

3) $\mathcal{E}(m') \geq \mathcal{E}(m)$.

Для доведення даного твердження використаємо наступний факт.

Факт 1. *Нехай* $\alpha \in \mathcal{A}$, $m \in \mathcal{M}$, $r \geq 1$ *і* $s > j \geq 1$. *Нехай, крім цього,*

$$\alpha_{l_j} m_{l_j}^r < \alpha_{l_s} m_{l_s}^r$$

і $m_{l_s} = \bar{m}_{l_s} + \bar{\bar{m}}_{l_s}$, *де значення* $\bar{\bar{m}}_{l_s}$ *визначається умовою*

$$\alpha_{l_s} m_{l_s}^r = \alpha_{l_j}(m_{l_j} + \bar{\bar{m}}_{l_s})^r. \tag{30}$$

Тоді якщо $m' = \{m_k'\}_{k=1}^{\infty}$, *де*

$$m_k' = \begin{cases} m_{l_j} + \bar{\bar{m}}_{l_s}, & k = l_j; \\ \bar{m}_{l_s}, & k = l_s; \\ m_k, & k \neq l_s,\ k \neq l_j, \end{cases} \tag{31}$$

то виконується нерівність

$$\mathcal{E}(m) \leq \mathcal{E}(m').$$

Справді, покажемо, що в цьому випадку для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ виконується співвідношення

$$\alpha_{i_k^*(m)} m_{i_k^*(m)}^r \leq \alpha_{i_k^*(m')} m_{i_k^*(m')}'^{\,r}. \tag{32}$$

Внаслідок (30) і (31) для цього достатньо показати, що

$$\alpha_{l_j} m_{l_j}^r \leq \alpha_{l_s} \bar{m}_{l_s}^r,$$

або

$$\alpha_{l_j}^{1/r} m_{l_j} \leq \alpha_{l_s}^{1/r}(m_{l_s} - \bar{\bar{m}}_{l_s}).$$

З урахуванням (30) для доведення останньої нерівності достатньо показати, що $\alpha_{l_j}^{1/r} \bar{\bar{m}}_{l_s} \geq \alpha_{l_s}^{1/r} \bar{\bar{m}}_{l_s}$. Дана нерівність виконується, оскільки $\alpha \in \mathcal{A}$. Таким чином, співвідношення (32) доведено. Тоді на підставі (27) і (32) отримуємо

$$\mathcal{E}(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \alpha_{i_k^*} m_{i_k^*}^r \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \alpha_{i_k^*} m_{i_k^*}'^{\,r} = \mathcal{E}(m').$$

Перейдемо до доведення твердження 1. Для побудови послідовності m' застосуємо прийом, який використано при доведенні аналогічного твердження в роботі [3].

Перший крок. Якщо $i_1^*(m) \neq l_1$, то величину $m_{i_1^*}$ подамо у вигляді $m_{i_1^*} = \overline{m}_{i_1^*} + \overline{\overline{m}}_{i_1^*}$, де $\overline{\overline{m}}_{i_1^*}$ підібрано так, щоб виконувалася рівність $\alpha_{l_1}(m_{l_1} + \overline{\overline{m}}_{i_1^*})^r = \alpha_{i_1^*} m_{i_1^*}^r$, і покладемо $m^{(1)} = \{m_k^{(1)}\}_{k=1}^\infty$, де

$$m_k^{(1)} = \begin{cases} m_{l_1} + \overline{\overline{m}}_{i_1^*}, & k = l_1; \\ \overline{m}_{i_1^*}, & k = i_1^*; \\ m_k, & k \neq i_1^*,\ k \neq l_1. \end{cases}$$

Якщо ж $i_1^* = l_1$, то покладемо $m^{(1)} = m$. Враховуючи факт 1, в обох випадках будемо мати $i_1^*(m^{(1)}) = l_1$, і

$$\mathscr{E}(m) \leq \mathscr{E}(m^{(1)}).$$

Другий крок. Якщо $i_2^*(m^{(1)}) \neq l_2$, то, аналогічно, величину $m_{i_2^*}^{(1)}$ подамо у вигляді $m_{i_2^*}^{(1)} = \overline{m}_{i_2^*}^{(1)} + \overline{\overline{m}}_{i_2^*}^{(1)}$, де $\overline{\overline{m}}_{i_1^*}$ підібрано так, щоб виконувалася рівність $\alpha_{l_2}(m_{l_2}^{(1)} + \overline{\overline{m}}_{i_2^*}^{(1)})^r = \alpha_{i_2^*}(m_{i_2^*}^{(1)})^r$, і покладемо $m^{(2)} = \{m_k^{(2)}\}_{k=1}^\infty$, де

$$m_k^{(2)} = \begin{cases} m_{l_1}^{(1)}, & k = l_1; \\ m_{l_2}^{(1)} + \overline{\overline{m}}_{i_2^*}^{(1)}, & k = l_2; \\ \overline{m}_{i_2^*}^{(1)}, & k = i_2^*, \\ m_k^{(1)}, & k \neq i_j^*,\ j = 1, 2;\ k \neq l_2. \end{cases}$$

Якщо ж $i_2^*(m^{(1)}) = l_2$, то покладемо відповідно $m^{(2)} = m^{(1)}$. Враховуючи факт 1, в обох випадках будемо мати $i_k^*(m^{(2)}) = l_k$, $k = 1, 2$, і

$$\mathscr{E}(m) \leq \mathscr{E}(m^{(1)}) \leq \mathscr{E}(m^{(2)}).$$

Продовжуючи цю процедуру далі, на деякому (наприклад, n-му) кроці побудуємо послідовність $m^{(n)} = \{m_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$, для якої $i_k^*(m^{(n)}) = l_k$, $k = \overline{1, n}$, і виконується співвідношення

$$\mathscr{E}(m) \leq \mathscr{E}(m^{(1)}) \leq \mathscr{E}(m^{(2)}) \leq \ldots \leq \mathscr{E}(m^{(n)}).$$

Послідовність m', одержана в результаті таких перетворень, буде задовольняти всі умови твердження 1.

Нехай $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'(\alpha)$ — множина всіх послідовностей $m \in \mathcal{M}$, що задовольняють співвідношення (29). Тоді на підставі твердження 1

$$\mathscr{E} = \sup_{m \in \mathcal{M}} \mathscr{E}(m) = \sup_{m \in \mathcal{M}'} \mathscr{E}(m),$$

тобто при відшуканні величини $\mathscr{E}$ досить обмежитися множиною $\mathcal{M}'$. З огляду на (27) та (28) останню рівність можна записати у вигляді

$$\mathcal{E} = \sup_{m\in\mathcal{M}'} \mathcal{E}(m) = \sup_{m\in\mathcal{M}'} \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \alpha_{i_k} m_{i_k}^r = \sup_{m\in\mathcal{M}'} \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \overline{\alpha}_k m_{i_k}^r = \sup_{m\in\mathcal{M}''} \overline{\mathcal{E}}(m),$$

де

$$\overline{\mathcal{E}}(m) = \overline{\mathcal{E}}^{(r)}(\nu, \alpha, m) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \overline{\alpha}_k m_k^r, \tag{33}$$

а $\mathcal{M}''$ — множина всіх послідовностей $m \in \mathcal{M}$, для яких виконується співвідношення

$$\overline{\alpha}_1 m_1^r \geq \overline{\alpha}_2 m_2^r \geq \ldots \geq \overline{\alpha}_n m_n^r \geq \ldots . \tag{29'}$$

Твердження 2. *Нехай $\tilde{\mathcal{M}}$ — підмножина всіх послідовностей m з $\mathcal{M}''$, для кожної з яких існує номер n_m такий, що $m_k = 0$ для всіх $k \geq n_m$. Тоді є правильною рівність*

$$\mathcal{E} = \sup_{m\in\tilde{\mathcal{M}}} \overline{\mathcal{E}}(m).$$

Доведення. Покажемо, що для довільної послідовності m з множини $\mathcal{M}''$ існує послідовність $\tilde{m} \in \tilde{\mathcal{M}}$, для якої $\overline{\mathcal{E}}(\tilde{m}) \geq \overline{\mathcal{E}}(m)$, тим самим твердження 2 буде доведено.

Згідно з означенням для кожної $m \in \mathcal{M}''$ є правильним співвідношення (29′). Якщо припустити, що при деякому $k_0 \in \mathbb{N}$ виконується рівність $m_{k_0} = 0$, то на підставі (29′) будемо мати $m_k = 0 \quad \forall k \geq k_0$. Тоді, поклавши $\tilde{m} = m$, отримаємо потрібне твердження. Тому достатньо вважати, що $m_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

З означення множини $\mathcal{V}$ випливає, що для будь-якої послідовності $\nu \in \mathcal{V}$ починаючи з деякого номера k_ν числа ν_k також не дорівнюють нулю. Крім того, внаслідок (19), (20) $\overline{\alpha}_k m_k^r \to 0$ при $k \to \infty$, тому знайдеться принаймні один номер $k_0 > k_\nu$, для якого

$$\overline{\alpha}_{k_0-1} m_{k_0-1}^r > \overline{\alpha}_{k_0} m_{k_0}^r,$$

і оскільки $\sum_{k=1}^{\infty} m_k \leq 1$, то знайдеться також номер k_1 такий, що для всіх $k \geq$ $\geq k_1$ буде виконуватися нерівність

$$\overline{\alpha}_{k_0-1} m_{k_0-1}^r \geq \overline{\alpha}_{k_0} \left(m_{k_0} + \sum_{i=k}^{\infty} m_i \right)^r. \tag{34}$$

Далі, на підставі співвідношень (19) і (21) $\nu_k \overline{\alpha}_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тому існує номер $k_2 \geq k_0$ такий, що для всіх $k \geq k_2$

$$\nu_{k_0} \overline{\alpha}_{k_0} \geq \nu_k \overline{\alpha}_k. \tag{35}$$

Покладемо $k_3 = \max\{k_1, k_2\}$ і розглянемо послідовність $\tilde{m} = \{\tilde{m}_k\}_{k=1}^{\infty}$, де

$$\tilde{m}_k = \begin{cases} m_k, & 1 \leq k < k_0; \\ m_{k_0} + \sum\limits_{i=k_3}^{\infty} m_i, & k = k_0; \\ m_k, & k_0 < k < k_3; \\ 0, & k \geq k_3. \end{cases}$$

Із співвідношення (34) випливає, що послідовність $\tilde{m}$ належить множині $\tilde{\mathcal{M}}$. Крім того, внаслідок (33) і (34)

$$\overline{\overline{\mathscr{E}}}(\tilde{m}) = \sum_{k\in[1,k_3)\setminus\{k_0\}} \nu_k\overline{\alpha}_k m_k^r + \nu_{k_0}\overline{\alpha}_{k_0}\left(m_{k_0} + \sum_{k\ge k_3} m_k\right)^r.$$

Тому, застосовуючи до другого доданка останньої суми нерівність

$$(a+b)^r \ge a^r + b^r, \tag{36}$$

яка виконується при будь-яких $a, b \ge 0$ і $r \ge 1$, а також враховуючи (35), отримуємо

$$\overline{\overline{\mathscr{E}}}(\tilde{m}) \ge \sum_{k\in[1,k_3)\setminus\{k_0\}} \nu_k\overline{\alpha}_k m_k^r + \nu_{k_0}\overline{\alpha}_{k_0}\left(m_{k_0}^r + \sum_{k\ge k_3} m_k^r\right) \ge \overline{\overline{\mathscr{E}}}(m),$$

тобто послідовність $\tilde{m}$ — шукана.

Твердження 3. *Нехай $\mathcal{M}^*$ — підмножина всіх послідовностей m з $\tilde{\mathcal{M}}$, для кожної з яких існує номер $s = s(m)$ такий, що*

$$\overline{\alpha}_k m_k^r = \begin{cases} |m|^r\left(\sum\limits_{k=1}^{s}\overline{\alpha}_k^{-1/r}\right)^{-r}, & k = 1, 2, \ldots, s; \\ 0, & k > s. \end{cases} \tag{37}$$

Тоді виконується рівність

$$\mathscr{E} = \sup_{m\in\mathcal{M}^*}\overline{\overline{\mathscr{E}}}(m).$$

Для доведення даного твердження встановимо низку допоміжних тверджень.

Нехай n — фіксоване натуральне число, $a = \{a_k\}_{k=1}^n$ і $b = \{b_k\}_{k=1}^n$ — довільні системи чисел, що задовольняють умову

$$a_k \ge 0, \quad b_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Множини всіх таких систем при даному n будемо позначати відповідно через A_n і B_n. При фіксованому значенні r, $r \ge 1$, множину всіх систем чисел $x = \{x_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}_+^n$, для яких при даній системі $b \in B_n$ виконуються співвідношення

$$b_k x_k^r \ge b_{k+1}x_{k+1}^r, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{38}$$

позначимо через $B_{n,r}^b$. Нехай також

$$F_n^{(r)}(a, b, x) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k x_k^r. \tag{39}$$

Твердження 4. *Для довільних систем $a \in A_n$, $b \in B_n$ і $x \in B_{n,r}^b$ при будь-яких $n \in \mathbb{N}$ і $r \ge 1$ існує число $s_n \in [1, n]$ таке, що*

$$F_n^{(r)}(a,b,x) \le |x|^r \sum_{k=1}^{s_n} a_k \left(\sum_{k=1}^{s_n} b_k^{-1/r}\right)^{-r}, \tag{40}$$

де

$$|x| \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

При $n=1$ дане твердження є очевидним. Для його доведення при $n>1$ застосовується певна процедура, яка у випадку $r=1$ значно спрощується. Тому є сенс спочатку розглянути саме цей випадок. Для скорочення записів покладемо

$$F_n^{(1)}(a,b,x) = F_n(a,b,x) \quad \text{і} \quad B_{n,1}^b = B_n^b$$

і покажемо, що є правильним таке твердження.

Твердження 4′. *Для довільних систем $a \in A_n$, $b \in B_n$ і $x \in B_n^b$ при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ існує натуральне число $s_n \in [1,n]$ таке, що*

$$F_n(a,b,x) \le |x| \sum_{k=1}^{s_n} a_k \left(\sum_{k=1}^{s_n} b_k^{-1}\right)^{-1}. \tag{40′}$$

Доведення. Покажемо спочатку, що твердження 4′ є правильним для $n = 2$, а саме, покажемо, що для будь-яких систем $a \in A_2$, $b \in B_2$ та $x \in B_2^b$ існує натуральне число $s_2 \in [1,2]$ таке, що

$$F_2(a,b,x) \le |x| \sum_{i=1}^{s_2} a_i \left(\sum_{k=1}^{s_2} b_k^{-1}\right)^{-1}. \tag{41}$$

Можливі два випадки:

$$a_1 b_1 \le a_2 b_2 \tag{42}$$

і

$$a_1 b_1 > a_2 b_2. \tag{43}$$

У першому випадку покладемо $\bar{x} = \dfrac{b_1 x_1 - b_2 x_2}{b_1 + b_2}$. Тоді

$$b_1(x_1 - \bar{x}) = b_2(x_2 + \bar{x}) = \frac{x_1 + x_2}{b_1^{-1} + b_2^{-1}}.$$

Внаслідок (38) $\bar{x} \ge 0$, а тому згідно з (42) маємо

$$F_2(a,b,x) = a_1 b_1 x_1 + a_2 b_2 x_2 \le a_1 b_1 (x_1 - \bar{x}) + a_2 b_2 (x_2 + \bar{x}) = \frac{|x|(a_1 + a_2)}{b_1^{-1} + b_2^{-1}}, \tag{44}$$

тобто у цьому випадку нерівність (41) виконується при $s_2 = 2$.

У випадку $a_1 b_1 > a_2 b_2$ покладемо $\bar{x} = x_2 \ge 0$. Тоді на підставі (43) отримаємо співвідношення (41) при $s_2 = 1$:

$$F_2(a,b,x) \le a_1 b_1 (x_1 + \bar{x}) + a_2 b_2 (x_2 - \bar{x}) = |x| a_1 b_1.$$

Таким чином, для $n = 2$ твердження 4′ є правильним.

При довільному $n > 2$ доведення зводиться до розглянутого випадку за допомогою такого факту.

Факт 2′. *Для довільних систем $a \in A_n$, $b \in B_n$ і $x \in B_n^b$ при будь-якому натуральному $n > 2$ існують системи $a^{(1)} \in A_{n-1}$, $b^{(1)} \in B_{n-1}$ і $x^{(1)} \in B_{n-1}^{b^{(1)}}$, для яких*

$$F_n(a, b, x) \le F_{n-1}(a^{(1)}, b^{(1)}, x^{(1)}). \tag{45}$$

При цьому у випадку, коли $a_1 b_1 \le a_2 b_2$, за системи $a^{(1)}$, $b^{(1)}$ і $x^{(1)}$ можна брати системи, в яких

$$a_k^{(1)} = \begin{cases} a_1 + a_2, & k = 1; \\ a_{k+1}, & k \ge 2, \end{cases} \qquad b_k^{(1)} = \begin{cases} (b_1^{-1} + b_2^{-1})^{-1}, & k = 1; \\ b_{k+1}, & k \ge 2, \end{cases} \tag{46}$$

$$x_k^{(1)} = \begin{cases} x_1 + x_2, & k = 1; \\ x_{k+1}, & k \ge 2, \end{cases} \tag{47}$$

а якщо $a_1 b_1 \le a_2 b_2$, то

$$a_k^{(1)} = \begin{cases} a_1, & k = 1; \\ a_2 + a_3, & k = 2; \\ a_{k+1}, & k \ge 3, \end{cases} \qquad b_k^{(1)} = \begin{cases} b_1, & k = 1; \\ (b_2^{-1} + b_3^{-1})^{-1}, & k = 2; \\ b_{k+1}, & k \ge 3, \end{cases} \tag{46′}$$

$$x_k^{(1)} = \begin{cases} x_1 + \bar{x}, & k = 1; \\ x_2 + x_3 - \bar{x}, & k = 2; \\ x_{k+1}, & k \ge 3, \end{cases} \qquad \bar{x} = \frac{b_2 x_2 - b_3 x_3}{b_2}. \tag{47′}$$

В обох випадках $|x^{(1)}| = |x|$.

Доведення. Системи $a^{(1)}$, $b^{(1)}$ і $x^{(1)}$, що визначаються співвідношеннями (46) – (47′), належать відповідно множинам A_{n-1}, B_{n-1} і B_{n-1}^b. Тому нерівність (45) досить довести саме для цих систем.

Нехай спочатку виконується умова $a_1 b_1 \le a_2 b_2$. Покладемо $\bar{x} = \dfrac{b_1 x_1 - b_2 x_2}{b_1 + b_2}$. Тоді, міркуючи, як і при доведенні співвідношення (44), і враховуючи позначення з (46) і (47), отримуємо (45):

$$F_n(a, b, x) = a_1 b_1 x_1 + a_2 b_2 x_2 + \sum_{k=3}^{n} a_k b_k x_k \le \frac{x_1 + x_2}{b_1^{-1} + b_2^{-1}} +$$

$$+ \sum_{k=3}^{n} a_k b_k x_k = a_1^{(1)} b_1^{(1)} x_1^{(1)} + \sum_{k=3}^{n} a_k b_k x_k = F_{n-1}(a^{(1)}, b^{(1)}, x^{(1)}).$$

Нехай тепер

$$a_1 b_1 > a_2 b_2, \tag{48}$$

і значення $\bar{x}$ вибрано згідно з (47′). Із співвідношень (38) випливає, що $\bar{x} \ge 0$. Тому внаслідок (46′) – (48) маємо

Таким чином, для $n = 2$ твердження 4′ є правильним.

При довільному $n > 2$ доведення зводиться до розглянутого випадку за допомогою такого факту.

Факт 2′. *Для довільних систем $a \in A_n$, $b \in B_n$ і $x \in B_n^b$ при будь-якому натуральному $n > 2$ існують системи $a^{(1)} \in A_{n-1}$, $b^{(1)} \in B_{n-1}$ і $x^{(1)} \in B_{n-1}^{b^{(1)}}$, для яких*

$$F_n(a, b, x) \le F_{n-1}(a^{(1)}, b^{(1)}, x^{(1)}). \tag{45}$$

При цьому у випадку, коли $a_1 b_1 \le a_2 b_2$, за системи $a^{(1)}$, $b^{(1)}$ і $x^{(1)}$ можна брати системи, в яких

$$a_k^{(1)} = \begin{cases} a_1 + a_2, & k = 1; \\ a_{k+1}, & k \ge 2, \end{cases} \qquad b_k^{(1)} = \begin{cases} (b_1^{-1} + b_2^{-1})^{-1}, & k = 1; \\ b_{k+1}, & k \ge 2, \end{cases} \tag{46}$$

$$x_k^{(1)} = \begin{cases} x_1 + x_2, & k = 1; \\ x_{k+1}, & k \ge 2, \end{cases} \tag{47}$$

а якщо $a_1 b_1 \le a_2 b_2$, то

$$a_k^{(1)} = \begin{cases} a_1, & k = 1; \\ a_2 + a_3, & k = 2; \\ a_{k+1}, & k \ge 3, \end{cases} \qquad b_k^{(1)} = \begin{cases} b_1, & k = 1; \\ (b_2^{-1} + b_3^{-1})^{-1}, & k = 2; \\ b_{k+1}, & k \ge 3, \end{cases} \tag{46′}$$

$$x_k^{(1)} = \begin{cases} x_1 + \bar{x}, & k = 1; \\ x_2 + x_3 - \bar{x}, & k = 2; \\ x_{k+1}, & k \ge 3, \end{cases} \qquad \bar{x} = \frac{b_2 x_2 - b_3 x_3}{b_2}. \tag{47′}$$

В обох випадках $|x^{(1)}| = |x|$.

Доведення. Системи $a^{(1)}$, $b^{(1)}$ і $x^{(1)}$, що визначаються співвідношеннями (46) – (47′), належать відповідно множинам A_{n-1}, B_{n-1} і B_{n-1}^b. Тому нерівність (45) досить довести саме для цих систем.

Нехай спочатку виконується умова $a_1 b_1 \le a_2 b_2$. Покладемо $\bar{x} = \dfrac{b_1 x_1 - b_2 x_2}{b_1 + b_2}$. Тоді, міркуючи, як і при доведенні співвідношення (44), і враховуючи позначення з (46) і (47), отримуємо (45):

$$F_n(a, b, x) = a_1 b_1 x_1 + a_2 b_2 x_2 + \sum_{k=3}^{n} a_k b_k x_k \le \frac{x_1 + x_2}{b_1^{-1} + b_2^{-1}} +$$

$$+ \sum_{k=3}^{n} a_k b_k x_k = a_1^{(1)} b_1^{(1)} x_1^{(1)} + \sum_{k=3}^{n} a_k b_k x_k = F_{n-1}(a^{(1)}, b^{(1)}, x^{(1)}).$$

Нехай тепер

$$a_1 b_1 > a_2 b_2, \tag{48}$$

і значення $\bar{x}$ вибрано згідно з (47′). Із співвідношень (38) випливає, що $\bar{x} \ge 0$. Тому внаслідок (46′) – (48) маємо

$$a_1 b_1 x_1 + a_2 b_2 x_2 + a_3 b_3 x_3 \le a_1 b_1 (x_1 + \overline{x}) + a_2 b_2 (x_2 - \overline{x}) + a_3 b_3 x_3 =$$
$$= a_1^{(1)} b_1^{(1)} x_1^{(1)} + a_2^{(1)} b_2^{(1)} x_2^{(1)}.$$

Звідси робимо висновок, що і в цьому випадку співвідношення (45) виконується. Факт 2′ доведено.

Системи чисел $a^{(1)} = \{a_k^{(1)}\}_{k=1}^{n-1}$, $b^{(1)} = \{b_k^{(1)}\}_{k=1}^{n-1}$ і $x^{(1)} = \{x_k^{(1)}\}_{k=1}^{n-1}$, що визначаються рівностями (46) – (47′), належать відповідно множинам A_{n-1}, B_{n-1} і $B_{n-1}^{b^{(1)}}$, тому, якщо $n-1>2$, до функціонала $F_{n-1}(a^{(1)}, b^{(1)}, x^{(1)})$ можна знову застосувати доведений факт. В результаті будуть побудовані системи $a^{(2)} \in \in A_{n-2}$, $b^{(2)} \in B_{n-2}$ і $x^{(2)} \in B_{n-2}^{b^{(2)}}$. При цьому буде виконуватися співвідношення

$$F_n(a, b, x) \le F_{n-1}(a^{(1)}, b^{(1)}, x^{(1)}) \le F_{n-2}(a^{(2)}, b^{(2)}, x^{(2)}).$$

Продовжуючи цю процедуру далі, на $(n-2)$-му кроці побудуємо системи чисел $a^{(n-2)} = \{a_k^{(n-2)}\}_{k=1}^{2}$, $b^{(n-2)} = \{b_k^{(n-2)}\}_{k=1}^{2}$ і $x^{(n-2)} = \{x_k^{(n-2)}\}_{k=1}^{2}$, де

$$a_k^{(n-2)} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{s} a_i, & k = 1; \\ \sum\limits_{i=s+1}^{n} a_i, & k = 2, \end{cases} \qquad x_k^{(n-2)} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{s} x_i', & k = 1; \\ \sum\limits_{i=s+1}^{n} x_i', & k = 2, \end{cases} \tag{49}$$

$$b_k^{(n-2)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{s} b_i^{-1}\right)^{-1}, & k = 1; \\ \left(\sum\limits_{i=s+1}^{n} b_i^{-1}\right)^{-1}, & k = 2, \end{cases} \tag{50}$$

s — деяке натуральне число з відрізка $[1, n)$, а x_i' — невід'ємні числа, що одержуються в результаті цієї процедури, так що $\sum_{i=1}^{n} x_i' = |x|$. При цьому буде виконуватися співвідношення

$$F_n(a, b, x) \le F_{n-1}(a^{(1)}, b^{(1)}, x^{(1)}) \le \ldots \le F_2(a^{(n-2)}, b^{(n-2)}, x^{(n-2)}). \tag{51}$$

Системи чисел $a^{(n-2)}$, $b^{(n-2)}$ і $x^{(n-2)}$, що визначаються співвідношеннями (49) і (50), належать відповідно множинам A_2, B_2 та B_2^b, тобто ці системи задовольняють при $n=2$ умову твердження 4′, яке для цього випадку вже доведено. Звідси випливає, що існує натуральне число $s_2 \in [1, 2]$, для якого

$$F_2(a^{(n-2)}, b^{(n-2)}, x^{(n-2)}) \le \left|x^{(n-2)}\right| \sum_{i=1}^{s_2} a_i^{(n-2)} \left(\sum_{k=1}^{s_2} 1/b_k^{(n-2)}\right)^{-1}.$$

Але внаслідок (49) – (51) це і означає, що існує натуральне число $s_n \in [1, n]$, що задовольняє нерівність (40′). Твердження 4′ доведено.

Перейдемо до доведення твердження 4 при довільних $r > 1$.

Знову окремо розглянемо випадок $n = 2$ і покажемо, що для будь-яких систем $a \in A_2$, $b \in B_2$ та $x \in B_{2,r}^b$ існує натуральне число $s_2 \in [1, 2]$ таке, що

$$F_2^{(r)}(a, b, x) \le |x|^r \sum_{i=1}^{s_2} a_i \left(\sum_{k=1}^{s_2} b_k^{-1/r} \right)^{-r}. \qquad (52)$$

Для цього покладемо

$$c = x_1 + x_2, \qquad y_0 = x_1,$$

і на відрізку $[0, c]$ розглянемо функцію

$$f(y) = a_1 b_1 y^r + a_2 b_2 (c - y)^r. \qquad (53)$$

При $a_1 \ne 0$ її критична точка y_*, що знаходиться з рівняння

$$f'(y) = r a_1 b_1 y^{r-1} - r a_2 b_2 (c-y)^{r-1} = 0,$$

має вигляд

$$y_* = \frac{c(a_2 b_2)^{1/(r-1)}}{(a_1 b_1)^{1/(r-1)} + (a_2 b_2)^{1/(r-1)}}.$$

Оскільки для будь-яких $y \in [0, c)$

$$f''(y) = r(r-1) a_1 b_1 y^{r-2} + r(r-1) a_2 b_2 (c-y)^{r-2} > 0,$$

то точка y_* є точкою мінімуму, і, таким чином, функція $f(y)$ не зростає при $y \in [0, y_*]$ і не спадає при $y \in [y_*, c]$.

Якщо $a_1 = 0$, то функція $f(y)$ не зростає на всьому відрізку $[0, c]$. Для того щоб і в цьому випадку можна було використати ті самі міркування, що і при $a_1 \ne 0$, будемо вважати, що $y_* = c$.

Можливі два випадки: 1) $y_0 = x_1 \le y_*$ і 2) $y_0 \ge y_*$.

У першому випадку покладемо $\bar{y} = b_2^{1/r} c (b_1^{1/r} + b_2^{1/r})^{-1}$. Тоді

$$b_1 \bar{y}^r = b_2 (c - \bar{y})^r = \frac{(x_1 + x_2)^r}{(b_1^{-1/r} + b_2^{-1/r})^r}.$$

Оскільки $x \in B_{n,r}^b$, то $b_1 y_0^r \ge b_2 (c - y_0)^r$, і тому $\bar{y} \le y_0$. Внаслідок того, що функція $f(y)$ не зростає при $y \in [0, y_*]$, будемо мати

$$F_2^{(r)}(a, b, x) = a_1 b_1 x_1^r + a_2 b_2 x_2^r = f(y_0) \le f(\bar{y}) = \frac{|x|^r (a_1 + b_2)}{(b_1^{-1/r} + b_2^{-1/r})^r}, \qquad (54)$$

тобто у цьому випадку співвідношення (52) виконується при $s_2 = 2$.

Якщо ж $y_0 = x_1 > y_*$, то покладемо $\bar{y} = c$. Тоді з урахуванням того, що функція $f(y)$ не спадає при $y \in [y_*, c]$, отримаємо співвідношення (52) при $s_2 = 1$:

$$F_2^{(r)}(a, b, x) = f(y_0) \le f(\bar{y}) = |x|^r a_1 b_1.$$

Таким чином, твердження 4 при $n = 2$ є правильним.

Покажемо тепер, що твердження 4 виконується для будь-яких $n > 2$. Як і при $r = 1$, зведемо доведення у загальному випадку до випадку, коли $n = 2$. При цьому будемо спиратися на такий факт.

Факт 2. *Для довільних систем $a \in A_n$, $b \in B_n$ і $x \in B_{n,r}^b$ при будь-якому натуральному $n > 2$ існують системи $a^{(1)} \in A_{n-1}$, $b^{(1)} \in B_{n-1}$ і $x^{(1)} \in \in B_{n-1,r}^{b^{(1)}}$, для яких*

$$F_n^{(r)}(a, b, x) \le F_{n-1}^{(r)}(a^{(1)}, b^{(1)}, x^{(1)}). \tag{55}$$

При цьому у випадку, коли $x_1 \le y_*$, *де*

$$y_* = \begin{cases} \dfrac{(x_1 + x_2)(a_2 b_2)^{1/(r-1)}}{(a_1 b_1)^{1/(r-1)} + (a_2 b_2)^{1/(r-1)}}, & a_1 \ne 0; \\ x_1 + x_2, & a_1 = 0, \end{cases}$$

за системи $a^{(1)}$, $b^{(1)}$ *і* $x^{(1)}$ *можна брати системи, в яких*

$$a_k^{(1)} = \begin{cases} a_1 + a_2, & k = 1; \\ a_{k+1}, & k \ge 2, \end{cases} \qquad b_k^{(1)} = \begin{cases} (b_1^{-1/r} + b_2^{-1/r})^{-r}, & k = 1; \\ b_{k+1}, & k \ge 2, \end{cases} \tag{56}$$

$$x_k^{(1)} = \begin{cases} x_1 + x_2, & k = 1; \\ x_{k+1}, & k \ge 2, \end{cases} \tag{57}$$

а якщо $x_1 > y_*$, *то*

$$a_k^{(1)} = \begin{cases} a_1, & k = 1; \\ a_2 + a_3, & k = 2; \\ a_{k+1}, & k \ge 3, \end{cases} \qquad b_k^{(1)} = \begin{cases} b_1, & k = 1; \\ (b_2^{-1/r} + b_3^{-1/r})^{-r}, & k = 2; \\ b_{k+1}, & k \ge 3, \end{cases} \tag{56'}$$

$$x_k^{(1)} = \begin{cases} \bar{y}, & k = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 - \bar{y}, & k = 2; \\ x_{k+1}, & k \ge 3, \end{cases} \qquad \bar{y} = \frac{b_2^{1/r}(x_1 + x_2) - b_3^{1/r} x_3}{b_2^{1/r}}. \tag{57'}$$

В обох випадках $|x^{(1)}| = |x|$.

Доведення. Системи $a^{(1)}$, $b^{(1)}$ і $x^{(1)}$, що визначаються співвідношеннями (56) – (57′), належать відповідно множинам A_{n-1}, B_{n-1} і $B_{n-1,r}^b$. Тому нерівність (55) досить довести саме для цих систем. Для цього покладемо

$$c = x_1 + x_2, \quad y_0 = x_1,$$

і на відрізку $[0, c]$ розглянемо функцію, що задається формулою (53).

Знову можливі два випадки: 1) $y_0 = x_1 \le y_*$ і 2) $y_0 > y_*$.

У першому випадку покладемо $\bar{y} = b_2^{1/r} c (b_1^{1/r} + b_2^{1/r})^{-1}$. Тоді, міркуючи, як і при доведенні співвідношення (54), і враховуючи позначення з (56) і (57), отримуємо

$$F_n^{(r)}(a, b, x) = f(y_0) + \sum_{k=3}^{n} a_k b_k x_k^r \le f(\bar{y}) + \sum_{k=3}^{n} a_k b_k x_k^r =$$

$$= a_1^{(1)} b_1^{(1)} (x_1^{(1)})^r + \sum_{k=3}^{n} a_k b_k x_k^r = F_{n-1}^{(r)}(a^{(1)}, b^{(1)}, x^{(1)}).$$

Нехай тепер $y_0 = x_1 > y_*$ і значення $\bar{y}$ вибрано згідно з (57′). Тоді

$$b_2 (c - \bar{y})^r = b_3 x_3^r = \frac{(c - \bar{y} + x_3)^r}{(b_2^{-1/r} + b_3^{-1/r})^r} = b_2^{(1)} (x_2^{(1)})^r.$$

Внаслідок (38) $b_2 (c - y_0)^r = b_2 x_2^r \ge b_3 x_3^r$. Звідси випливає, що $\bar{y} \ge y_0$, і оскільки функція $f(y)$ не спадає при $y \in [y_*, c]$, то є правильним співвідношення

$$a_1b_1x_1^r + a_2b_2x_2^r + a_3b_3x_3^r = f(y_0) + a_3b_3x_3^r \le f(\bar{y}) + a_3b_3x_3^r =$$
$$= a_1b_1\bar{y}^r + a_2b_2(x_1 + x_2 - \bar{y})^r + a_3b_3x_3^r = a_1^{(1)}b_1^{(1)}(x_1^{(1)})^r + a_2^{(1)}b_2^{(1)}(x_2^{(1)})^r.$$

Тому і в цьому випадку виконується нерівність (55). Факт 2 доведено.

Системи чисел $a^{(1)} = \{a_k^{(1)}\}_{k=1}^{n-1}$, $b^{(1)} = \{b_k^{(1)}\}_{k=1}^{n-1}$ і $x^{(1)} = \{x_k^{(1)}\}_{k=1}^{n-1}$, що визначаються рівностями (56) – (57′), належать відповідно множинам A_{n-1}, B_{n-1} і $B_{n-1,r}^{b^{(1)}}$, тому, якщо $n-1 > 2$, до функціонала $F_{n-1}^{(r)}(a^{(1)}, b^{(1)}, x^{(1)})$ можна знову застосувати доведений факт. В результаті будуть побудовані системи $a^{(2)} \in \in A_{n-2}$, $b^{(2)} \in B_{n-2}$ і $x^{(2)} \in B_{n-2,r}^{b^{(2)}}$. При цьому буде виконуватися співвідношення

$$F_n^{(r)}(a, b, x) \le F_{n-1}(a^{(1)}, b^{(1)}, x^{(1)}) \le F_{n-2}^{(r)}(a^{(2)}, b^{(2)}, x^{(2)}).$$

Продовжуючи цю процедуру далі, на $(n-2)$-му кроці побудуємо системи чисел $a^{(n-2)} = \{a_k^{(n-2)}\}_{k=1}^{2}$, $b^{(n-2)} = \{b_k^{(n-2)}\}_{k=1}^{2}$ і $x^{(n-2)} = \{x_k^{(n-2)}\}_{k=1}^{2}$, де

$$a_k^{(n-2)} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{s} a_i, & k = 1; \\ \sum\limits_{i=s+1}^{n} a_i, & k = 2, \end{cases} \qquad x_k^{(n-2)} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{s} x_i', & k = 1; \\ \sum\limits_{i=s+1}^{n} x_i', & k = 2, \end{cases} \tag{58}$$

$$b_k^{(n-2)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{s} b_i^{-1/r}\right)^{-r}, & k = 1; \\ \left(\sum\limits_{i=s+1}^{n} b_i^{-1/r}\right)^{-r}, & k = 2, \end{cases} \tag{59}$$

s — деяке натуральне число з відрізка $[1, n)$, а x_i' — невід'ємні числа, що одержуються в результаті цієї процедури, так що $\sum_{i=1}^{n} x_i' = |x|$. При цьому буде виконуватися співвідношення

$$F_n^{(r)}(a, b, x) \le F_{n-1}^{(r)}(a^{(1)}, b^{(1)}, x^{(1)}) \le \ldots \le F_2^{(r)}(a^{(n-2)}, b^{(n-2)}, x^{(n-2)}). \tag{60}$$

Отримані таким чином системи чисел $a^{(n-2)}$, $b^{(n-2)}$ і $x^{(n-2)}$ належать відповідно множинам A_2, B_2 та $B_{2,r}^{b}$, тобто ці системи задовольняють при $n = 2$ умову твердження 4, яке для цього випадку вже доведено. Звідси випливає, що існує натуральне число $s_2 \in [1, 2]$, для якого

$$F_2^{(r)}(a^{(n-2)}, b^{(n-2)}, x^{(n-2)}) \le \left|x^{(n-2)}\right|^r \sum_{i=1}^{s_2} a_i^{(n-2)} \left(\sum_{k=1}^{s_2} (b_k^{(n-2)})^{-1/r}\right)^{-r}.$$

Але внаслідок (58) – (60) це і означає, що існує натуральне число $s_n \in [1, n]$, що задовольняє нерівність (40). Таким чином, твердження 4 доведено.

Перейдемо до доведення твердження 3. Із співвідношень (33) і (39) видно, що для будь-якої послідовності $m \in \tilde{\mathcal{M}}$

$$\overline{\mathcal{E}}(m) = \overline{\mathcal{E}}^{(r)}(\nu, \alpha, m) = F_n^{(r)}(a, b, x),$$

де $n = n_m - 1$, $a_k = \nu_k$, $b_k = \overline{\alpha}_k$ і $x_k = m_k$, а n_m — номер, починаючи з якого $m_k = 0$. Крім того, з означення множин $\mathcal{V}$, $\mathcal{A}_r$ і $\tilde{\mathcal{M}}$ випливає, що системи a, b і x, які визначаються таким чином, належать відповідно множинам A_n, B_n і $B_{n,r}^b$. Тому на підставі твердження 4 існує число $s_n \in [1, n]$ таке, що виконується співвідношення

$$\overline{\mathscr{E}}(m) = F_n^{(r)}(a, b, x) \le \sum_{k=1}^{s_n} a_k \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^r \left(\sum_{k=1}^{s_n} b_k^{-1/r}\right)^{-r} =$$

$$= |m|^r \sum_{k=1}^{s_n} \nu_k \left(\sum_{k=1}^{s_n} \overline{\alpha}_k^{-1/r}\right)^{-r}. \tag{61}$$

Розглянемо послідовність $m^* = \{m_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, де

$$\overline{\alpha}_k (m_k^*)^r = \begin{cases} |m|^r \left(\sum\limits_{k=1}^{s} \overline{\alpha}_k^{-1/r}\right)^{-r}, & k = 1, 2, \ldots, s; \\ 0, & k > s, \end{cases}$$

а $s = s_n$. Зрозуміло, що $m^* \in \mathcal{M}^*$ і, крім того, внаслідок (33) і (61)

$$\overline{\mathscr{E}}(m^*) = |m|^r \sum_{k=1}^{s} \nu_k \left(\sum_{k=1}^{s} \overline{\alpha}_k^{-1/r}\right)^{-r} \ge \overline{\mathscr{E}}(m).$$

Таким чином, для будь-якої послідовності $m \in \tilde{\mathcal{M}}$ існує послідовність $m^* \in \mathcal{M}^*$ така, що $\overline{\mathscr{E}}(m^*) \ge \overline{\mathscr{E}}(m)$. Це і доводить твердження 3.

Продовжимо доведення леми. Згідно з (33) і (37) для будь-якої послідовності $m \in \mathcal{M}^*$

$$\overline{\mathscr{E}}(m) = |m|^r \sum_{k=1}^{s} \nu_k \left(\sum_{k=1}^{s} \overline{\alpha}_k^{-1/r}\right)^{-r} \le \max_{s \in [1, n_m]} |m|^r \sum_{k=1}^{s} \nu_k \left(\sum_{k=1}^{s} \overline{\alpha}_k^{-1/r}\right)^{-r} \le$$

$$\le \max_{s \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{s} \nu_k \left(\sum_{k=1}^{s} \overline{\alpha}_k^{-1/r}\right)^{-r}.$$

Для завершення доведення леми залишилося показати, що для будь-яких $\nu \in \mathcal{V}$ і $\alpha \in \mathcal{A}$ існує число $s^* \in \mathbb{N}$, що задовольняє рівність

$$\max_{s \in \mathbb{N}} \frac{\sum_{k=1}^{s} \nu_k}{\left(\sum_{k=1}^{s} \overline{\alpha}_k^{-1/r}\right)^r} = \frac{\sum_{k=1}^{s^*} \nu_k}{\left(\sum_{k=1}^{s^*} \overline{\alpha}_k^{-1/r}\right)^r}, \tag{62}$$

а також що у множині $\mathcal{M}^*$ існує елемент m^*, для якого

$$\overline{\mathscr{E}}(m^*) = \sum_{k=1}^{s^*} \nu_k \left(\sum_{k=1}^{s^*} \overline{\alpha}_k^{-1/r}\right)^{-r}. \tag{63}$$

Внаслідок (21) і (36) для будь-якого натурального s маємо

$$\frac{\sum_{k=1}^{s}\nu_k}{\left(\sum_{k=1}^{s}\overline{\alpha}_k^{-1/r}\right)^r} \le \frac{\sum_{k=1}^{s}\nu_k}{\sum_{k=1}^{s}\overline{\alpha}_k^{-1}} \le \frac{s}{\sum_{k=1}^{s}\overline{\alpha}_k^{-1}}.$$

Оскільки згідно з (19) $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$\lim_{s\to\infty}\frac{s}{\sum_{k=1}^{s}\overline{\alpha}_k^{-1}} = 0.$$

Звідси випливає

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{k=1}^{s}\nu_k\left(\sum_{k=1}^{s}\overline{\alpha}_k^{-1/r}\right)^{-r} = 0.$$

Тому знайдеться принаймні одне натуральне число s^*, що задовольняє співвідношення (62).

Тепер покладемо $m^* = \{m_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, де

$$m_k^* = \begin{cases}\left(\overline{\alpha}_k^{1/r}\sum_{i=1}^{s^*}\overline{\alpha}_k^{-1/r}\right)^{-1}, & k = 1, 2, \ldots, s^*;\\ 0, & k > s^*.\end{cases}$$

Легко бачити, що $m^* \in \mathcal{M}^*$ і є правильним співвідношення (63). Лему 1 доведено.

5. Приклад. Нехай

$$|\psi_k| = \begin{cases}1, & k = 1;\\ (k-1)^{-r}, & k \ge 2,\end{cases}$$

де r — довільне додатне число, і

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^s, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad s > 0, \quad \lambda_k^{(n)} = 0, \quad k > n,$$

тобто числа $\lambda_k^{(n)}$ визначають метод Зигмунда. Тоді $\overline{\psi}_k = |\psi_k|$ і згідно з (15) для кожного фіксованого $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність

$$e_n^p(\psi U_\varphi^q, \Lambda)_p = \max_{l\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{l}\beta_k^p\left(\sum_{k=1}^{l}\overline{\psi}_k^{-q}\right)^{-p/q} = \max_{l\in\mathbb{N}} f(l),$$

де

$$f(l) = \left(\sum_{k=1}^{l-t_l(l-n)}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{ps} + t_l(l-n)\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{l}(k-1)^{rq}\right)^{-p/q},$$

а

$$t_l = \begin{cases}0, & 1 \le l \le n;\\ 1, & l > n.\end{cases}$$

Розглянемо, наприклад, випадок, коли $p = q = 2$, а $s = r = 1/2$. Оскільки $\lambda_1^{(n)} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то для будь-яких $n \in \mathbb{N}$

$$f(2) > f(1).$$

Внаслідок того, що

$$\sum_{k=1}^{l} (k-1) = \frac{l(l-1)}{2},$$

при $2 \le l < n$ маємо

$$f(l+1) - f(l) = \frac{l(l+1)}{n(2+l(l+1))} - \frac{l(l-1)}{n(2+l(l-1))} =$$

$$= \frac{4l}{n(l^2 - l + 2)(l^2 + l + 2)} \ge 0.$$

При $l \ge n$

$$f(l+1) - f(l) = \frac{-2l^2 + 2ln + 4}{(l^2 - l + 2)(l^2 + l + 2)} \begin{cases} > 0, & l = n; \\ \le 0, & l > n. \end{cases}$$

З отриманих співвідношень випливає, що функція $f(l)$ не спадає при $1 \le l \le n + 1$ і не зростає при $l > n + 1$. Тому є правильною рівність

$$e_n(\psi U_\varphi^1, \Lambda)_1 = \max_{l \in \mathbb{N}} f(l) = f(n+1) = \frac{n+1}{n^2 + n + 2}.$$

1. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p. – Киев, 2000. – 52 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2000.2).
2. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p в разных метриках // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 8. – С. 1121 – 1147.
3. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p. – Киев, 2001. – 85 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2001.2).
4. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 1. – С. 37 – 40.
5. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.

Одержано 09.04.2003