УДК 517.51

М. Г. Плешаков (Саратов. ун-т, Россия),
П. А. Попов (Киев. нац. ун-т технологий и дизайна)

ЗНАКОСОХРАНЯЮЩЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

We prove the Jackson theorem for the zero-preserving approximation of periodic functions (i.e., for the case where an approximating polynomial has the same zeros y_i) and for the sign-preserving approximation (i.e., if an approximating polynomial is of the same sign as a function f on every interval (y_i, y_{i-1})). Here, y_i are points obtained from initial points $-\pi \le y_{2s} \le y_{2s-1} < \ldots < y_1 < \pi$ by using the equality $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$; at the same time, these points are zeros of 2π-periodic continuous function f.

Доведено теорему Джексона для наближення періодичних функцій із збереженням нулів (тобто коли наближаючий поліном має ті самі нулі y_i) і для знакозберігаючого наближення (тобто коли наближаючий поліном має на кожному інтервалі (y_i, y_{i-1}) той самий знак, що й функція f), де y_i — точки, одержані з початкових точок $-\pi \le y_{2s} \le y_{2s-1} < \ldots < y_1 < \pi$ за допомогою рівності $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$; при цьому ці точки є нулями 2π-періодичної неперервної функції f.

1. Введение. Пусть C — пространство непрерывных 2π-периодических действительнозначных функций f с равномерной нормой $\|f\| := \max_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$; $\omega(f; t)$ — модуль непрерывности функции $f \in C$.

Обозначим через $\mathbf{T}_n$ пространство тригонометрических полиномов

$$\tau_n(x) := a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

порядка $\le n$, $n \in \mathbf{N}$.

Пусть на промежутке $[-\pi, \pi)$ заданы $2s$ точек y_i:

$$-\pi \le y_{2s} \le y_{2s-1} < \ldots < y_1 < \pi.$$

Отправляясь от этих точек, с помощью равенства

$$y_i = y_{i+2s} + 2\pi$$

определим точки y_i для всех целых индексов i.

Обозначим

$$Y := \{y_i\}_{i\in\mathbf{Z}}.$$

Через $\Delta^{(0)}(Y)$ обозначим множество функций $f \in C$ таких, что f неотрицательна (неположительна) на $[y_i, y_{i-1}]$ при нечетных (четных) i.

Положим $\Pi(t) := \prod_{i=1}^{2s} \sin\frac{1}{2}(t - y_i)$. Легко видеть, что $\Pi \in \mathbf{T}_s$. Очевидно, что $f \in \Delta^{(0)}(Y)$ в том и только в том случае, если $f(x)\Pi(t) \ge 0$, $x \in \mathbf{R}$.

При определении множества $\Delta^{(0)}(Y)$ использовано четное число исходных точек y_i, так как в противном случае множество $\Delta^{(0)}(Y)$ содержало бы, очевидно, лишь одну функцию — тождественный нуль.

Обзор результатов по знакосохраняющему приближению алгебраическими многочленами непрерывных на отрезке функций см. в [1]. В данной работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f \in C$, причем $f(y_i) = 0$ для всех $i \in \mathbf{Z}$. Тогда для любого $n \in \mathbf{N}$ найдется такой полином $\Theta_n \in \mathbf{T}_n$, что*

$$\Theta_n(y_i) = 0, \quad i \in \mathbf{Z},$$

и имеет место следующая оценка:

$$\|f - \Theta_n\| \le c\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right),$$

где $c = c(s)$ — константа, зависящая только от s.

Теорема 2. *Пусть $f \in \Delta^{(0)}(Y)$. Тогда для каждого $n \in \mathbf{N}$ найдется полином $\tau_n \in \mathbf{T}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)$, для которого справедлива оценка*

$$\|f - \tau_n\| \le c\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right),$$

где $c = c(s)$ — константа, зависящая только от s.

2. Некоторые обозначения и определения. Далее через c_i будем обозначать положительные постоянные, которые могут зависеть только от s, а через $C_{i,\,l}$ — положительные постоянные, зависящие от s или l.

Обозначим через

$$J_{l,\,n}(x) = \frac{1}{\gamma_{l,n}}\left(\frac{\sin((nx)/2)}{\sin(x/2)}\right)^{2l}$$

ядро типа Джексона [2], где

$$\gamma_{l,\,n} = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin((nt)/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2l} dt.$$

Напомним некоторые свойства этого ядра (см., например, [3, с. 129 – 132, 4, с. 128]):

$$J_{l,\,n} \in \mathbf{T}_{l(n-1)},$$

при любом $\nu = 0, \ldots, 2l - 1$ имеет место неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}(1 + n|x|)^{\nu} J_{l,n}(x)dx \le C_{1,l}.$$

При каждом натуральном n разобьем числовую прямую равноотстоящими точками

$$x_j := -\frac{j\pi}{n}, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Обозначим

$$I_j := [x_j, x_{j-1}], \quad h := \frac{\pi}{n}, \quad \omega(h) := \omega(f, h), \quad x_j^* := \frac{x_j + x_{j-1}}{2},$$

$$\delta_n(x; x_j) := \min\left\{1; \frac{1}{n|\sin((x - x_j)/2)|}\right\},$$

$$\chi_j(x) := \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le x_j; \\ 1, & \text{если} \quad x > x_j, \end{cases}$$

$$\kappa_j(x) := \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in (x_j, x_{j-1}]; \\ 0, & \text{если} \quad x \in \mathbf{R} \setminus (x_j, x_{j-1}]. \end{cases}$$

Зафиксируем натуральное

$$n > 4s^2 C_{1,s+2} + s + 1 =: c_1. \tag{1}$$

Будем писать $j \in H_*$, если

$$\min_{i \in \mathbf{Z}} |x_j - y_i| \ge 2s C_{1,s+2} h;$$

$j \in H$, если $j \in H_*$, $|j| < n$.

В силу предположения (1) множества H и H_* не пусты.

3. Доказательство теоремы 1. Разобьем его на несколько пунктов.

3.1. Следуя [5], представим каждое неотрицательное целое число $l < 2^{2s}$ в виде

$$l = \sum_{\nu=0}^{2s-1} \delta_{\nu,l} 2^{\nu},$$

где $\delta_{\nu,l} \in \{0, 1\}$.

В силу периодичности функции f всюду далее можем считать, что $x_j \ne y_i$ для всех $i \in \mathbf{Z}$, $j \in \mathbf{Z}$.

Для любого $j \in H$ обозначим через $\underline{i}_j$, i_j индексы, удовлетворяющие следующим условиям:

$$y_{\underline{i}_j+1} < x_j + \pi < y_{\underline{i}_j},$$

$$y_{i_j+1} < x_j < y_{i_j}.$$

Теперь мы можем доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $j \in H$. Если функция $K \in C$ положительна, то существует $2s$ точек t_i, $i = \underline{i}_j, \ldots, \underline{i}_j + 2s$, $i \ne i_j$, таких, что*

$$\begin{gathered} y_{i+1} < t_i < y_i, \quad \text{если} \quad i = \underline{i}_j + 1, \ldots, \underline{i}_j + 2s - 1, \quad i \ne i_j, \\ x_j - \pi < t_{\underline{i}_j+2s} < y_{\underline{i}_j+2s}, \quad \text{если} \quad i_j \ne \underline{i}_j + 2s, \\ y_{\underline{i}_j+1} < t_{\underline{i}_j} < x_j + \pi, \quad \text{если} \quad i_j \ne \underline{i}_j, \end{gathered} \tag{2}$$

и функция

$$\Phi(x) := \Phi(x, K, Y, j) := \int_{x_j-\pi}^{x} K(u) \prod_{i=\underline{i}_j, i \ne i_j}^{\underline{i}_j+2s} \sin\frac{u - t_i}{2}\, du$$

имеет свойство

$$\Phi(y_i) = \begin{cases} \Phi(x_j + \pi), & i = \underline{i}_j + 1, \ldots, i_j; \\ \Phi(x_j - \pi), & i = i_j + 1, \ldots \underline{i}_j + 2s. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай $\underline{i}_j < i_j < \underline{i}_j + 2s$. При каждом $0 \le l \le 2^{2s} - 1$ выберем числа

$$t_{i,l} \in \{y_i, y_{i+1}\}, \quad i = \underline{i}_j + 1, \ldots, \underline{i}_j + 2s - 1, \quad i \ne i_j,$$
$$t_{\underline{i}_j+2s,l} \in \{y_{\underline{i}_j+2s}, x_j - \pi\},$$
$$t_{i_j,l} \in \{y_{i_j+1}, x_j + \pi\}$$

таким образом, чтобы для всех $u \in (y_{i+1}, y_i)$ (если $i = \underline{i}_j + 2s$, то для $u \in \in (x_j - \pi, y_{\underline{i}_j+2s})$, а если $i = i_j$, то для $u \in (y_{i_j+1}, x_j + \pi)$) выполнялось условие

$$\operatorname{sgn}\left(\Pi(u)\sin\frac{u - y_{i_j}}{2}\sin\frac{u - t_{i,l}}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\delta_{i-\underline{i}_j,l}}, & \underline{i}_j \le i < i_j; \\ (-1)^{\delta_{i-\underline{i}_j-1,l}}, & i_j < i \le \underline{i}_j + 2s. \end{cases}$$

Обозначим

$$\Phi_l(x) := \int\limits_{x_j-\pi}^{x} K(u) \prod_{i=\underline{i}_j, i\ne i_j}^{\underline{i}_j+2s} \sin\frac{u - t_{i,l}}{2}\, du,$$

$$a_{i-\underline{i}_j,l} := \begin{cases} \Phi_l(x_j + \pi) - \Phi_l(y_{i_j+1}), & i = i_j; \\ \Phi_l(y_i) - \Phi_l(y_{i+1}), & \underline{i}_j + 1 \le i < i_j; \\ \Phi_l(y_{i+1}) - \Phi_l(y_{i+2}), & i_j \le i \le \underline{i}_j + 2s - 2; \\ \Phi_l(y_{\underline{i}_j+2s}) - \Phi_l(x_j - \pi), & i = \underline{i}_j + 2s - 1. \end{cases}$$

Поскольку $\operatorname{sgn} a_{i-\underline{i}_j,l} = (-1)^{\delta_{i-\underline{i}_j,l}}$, то согласно лемме 5.1 [5] найдутся 2^{2s} положительных чисел α_l таких, что

$$\sum_{l=0}^{2^{2s}-1} \alpha_l (a_{0,l}, a_{1,l}, \ldots, a_{2s-1,l}) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Отсюда следует, что функция

$$\bar{\Phi}(x) := \sum_{l=0}^{2^{2s}-1} \alpha_l \Phi_l(x)$$

имеет свойство (3). Очевидно, что эта функция имеет вид

$$\bar{\Phi}(x) = \int\limits_{x_j-\pi}^{x} K(u)\tau_s(u)\, du,$$

где $\tau_s \in \mathbf{T}_s$. Поскольку $K(u) > 0$, $u \in \mathbf{R}$, то в силу соотношений (3) согласно теореме Ролля на каждом из интервалов $(x_j - \pi, y_{\underline{i}_j+2s})$, (y_{i+1}, y_i), $i = \underline{i}_j + 1, \ldots$ $\ldots, \underline{i}_j + 2s - 1$, $i \ne i_j$, и $(y_{i_j+1}, x_j + \pi)$ функция $\bar{\Phi}$ имеет экстремум. Тогда полином τ_s запишется в виде

$$\tau_s(x) = A \prod_{i=\underline{i}_j, i\ne i_j}^{\underline{i}_j+2s} \sin\frac{u - t_i}{2}, \qquad A = \text{const},$$

где t_i удовлетворяют условиям (2), и функция $\Phi(x) := A^{-1}\tilde{\Phi}(x)$ является искомой.

Лемма доказана.

3.2. Пусть $j \in H$. Напомним, что $x_j^* = (x_j + x_{j-1})/2$. Обозначим

$$K(u) := J_{s+2,n}(u - x_j) + J_{s+2,n}(u - x_j^*)$$

и по этой функции рассмотрим функцию $\Phi(x) = \Phi(x, K, Y, j)$.

Пусть также

$$\bar{\Pi}(u) := \prod_{i=\underline{i}_j, i \neq i_j}^{i_j+2s} \sin\frac{u - t_i}{2}.$$

Положим

$$\hat{T}_j(x) := \frac{1}{d_j \bar{\Pi}(x_j)} \Phi(x),$$

где константу d_j выберем из условия $\hat{T}_j(x_j + \pi) = 1$.

Согласно лемме 2 из [6] имеет место оценка

$$|\chi_j(x) - \hat{T}_j(x)| \le c_2 \delta_n^3(x; x_j), \qquad x \in [-\pi, \pi]. \tag{4}$$

Кроме того, согласно лемме 1 справедливы равенства

$$\hat{T}_j(y_i) = \hat{T}_j(x_j - \pi) = 0, \qquad i = i_j + 1, \ldots, \underline{i}_j + 2s, \tag{5}$$

$$\hat{T}_j(y_i) = \hat{T}_j(x_j + \pi) = 1, \qquad i = \underline{i}_j + 1, \ldots, i_j. \tag{6}$$

Для каждого $j \in H$ обозначим

$$\tilde{T}_j(x) := \hat{T}_j(x),$$

а для $j \notin H$ —

$$\tilde{T}_j(x) := \hat{T}_{j_*}(x),$$

где j_* — ближайший к j индекс из множества H (если таких индексов два, то выбираем любой из них).

Из доказательства леммы 2 [6] с учетом очевидного неравенства $\delta_n(x; x_{j\pm1}) \le$ $\le 3\delta_n(x; x_j)$ следует, что для $\tilde{T}_j$ при $j \notin H$ оценка (4) также выполняется.

Определим теперь систему функций $\check{T}_j$ с помощью равенств

$$\check{T}_{1-n}(x) := \tilde{T}_{1-n}(x),$$

$$\check{T}_j(x) := \tilde{T}_j(x) - \tilde{T}_{j-1}(x), \qquad j = 2-n, \ldots, n-1,$$

$$\check{T}_n(x) := 1 - \tilde{T}_{n-1}(x).$$

Очевидно, что имеет место разбиение единицы, т. е.

$$\sum_{j=1-n}^{n} \check{T}_j(x) \equiv 1. \tag{7}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Если* $j \in H$ *и* $(j-1) \in H$, *то функция* $\check{T}_j$ *имеет следующие свойства*:

1) $|\kappa_j(x) - \check{T}_j(x)| \le c_3 \delta_n^3(x; x_j), \quad x \in [-\pi, \pi];$

2) $\check{T}_j \in \mathbf{T}_{(s+2)n};$

3) $\check{T}_j(y_i) = 0, \quad i \in \mathbf{Z}.$

Доказательство. 1. Поскольку $\kappa_j(x) = \chi_j(x) - \chi_{j-1}(x)$, учитывая оценку (4), имеем

$$|\kappa_j(x) - \check{T}_j(x)| \le |\hat{T}_j(x) - \chi_j(x)| + |\hat{T}_{j-1}(x) - \chi_{j-1}(x)| \le c_3 \delta_n^3(x; x_j).$$

2. Известно [6], что $\hat{T}_j$ имеет вид

$$\hat{T}_j(x) = \frac{1}{2\pi} x + p_j(x),$$

где

$$p_j \in \mathbf{T}_{(s+2)(n-1)+s} \subset \mathbf{T}_{(s+2)n}.$$

Поэтому в силу определения функции $\check{T}_j$ $\check{T}_j \in \mathbf{T}_{(s+2)n}$.

3. В случае, когда интервалы $(x_j - \pi,\ x_j + \pi)$ и $(x_{j-1} - \pi,\ x_{j-1} + \pi)$ содержат одни и те же точки y_i, доказываемое равенство очевидно. Пусть теперь, например, $y_i \in (x_{j-1} - \pi,\ x_{j-1} + \pi)$, но $y_i \notin (x_j - \pi,\ x_j + \pi)$. Тогда $y_{i+2s} \in (x_j - \pi,\ x_j + \pi)$, и согласно (6) имеем

$$\hat{T}_{j-1}(y_i) = 1.$$

Далее, учитывая (5), получаем

$$\hat{T}_j(y_i) = p_j(y_i) + \frac{1}{2\pi} y_i = p_j(y_i - 2\pi) + \frac{1}{2\pi}(y_i - 2\pi) + 1 = \\ = \hat{T}_j(y_i - 2\pi) + 1 = 1.$$

Таким образом, и в этом случае $\check{T}_j(y_i) = 0$, что и требовалось доказать.

Лемма доказана.

3.3. Завершим доказательство теоремы 1. Обозначим

$$\Theta_n(x) := \sum_{j: j \in H, (j-1) \in H} f(x_j) \check{T}_j(x).$$

Из пп. 2 и 3 леммы 2 следует

$$\Theta_n \in \mathbf{T}_{(s+2)n},$$

$$\Theta_n(y_i) = 0, \quad i \in \mathbf{Z}.$$

Оценим теперь разность $f(x) - \Theta_n(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$. Использовав тождество (7), представим ее в виде

$$f(x) - \Theta_n(x) = \sum_{j=1-n}^{n} \big(f(x) - f(x_j)\big) \check{T}_j(x) + \\ + \sum_{j: j \notin H \vee (j-1) \notin H} f(x_j) \check{T}_j(x) =: \sigma_1(x) + \sigma_2(x).$$

Оценим сначала $|\sigma_2(x)|$. Поскольку $j \notin H$ или $(j-1) \notin H$, существует точка y_i такая, что

$$|y_i - x_j| \le c_4 h.$$

Следовательно,

$$|f(x_j)| = |f(x_j) - f(y_i)| \le c_5 \omega(h). \tag{8}$$

Отсюда следует

$$|\sigma_2(x)| \le c_6 \omega(h). \tag{9}$$

Действительно, количество индексов j таких, что $j \notin H$ или $(j-1) \notin H$, не превышает некоторую постоянную. Далее, используя представление функции $\check{T}_j$ и тот факт, что, как отмечалось выше, для $\tilde{T}_j$ оценка (4) справедлива и при $j \notin H$, получаем

$$|\check{T}_j(x)| \le 1 + c_7 \delta_n^3(x; x_j) \le 1 + c_7,$$

что вместе с (8) и приводит к оценке (9). Осталось оценить $|\sigma_1(x)|$. Имеем

$$\sigma_1(x) = \sum_{j=1-n}^{n} \big(f(x) - f(x_j)\big)\big(\check{T}_j(x) - \kappa_j(x)\big) +$$

$$+ \sum_{j=1-n}^{n} \big(f(x) - f(x_j)\big)\kappa_j(x) =: \sigma_3(x) + \sigma_4(x).$$

Очевидно, что

$$|\sigma_4(x)| \le \omega(h).$$

Прежде чем оценивать $|\sigma_3(x)|$, отметим [6], что имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{j=1-n}^{n} \delta_n^2(\,\cdot\,; x_j) \right\| < 6. \tag{10}$$

Оценим теперь $|\sigma_3(x)|$. Поскольку оценка (4) выполняется для $\tilde{T}_j$ и при $j \notin H$, то для $j = 2-n, \ldots, n-1$ имеет место оценка

$$|\check{T}_j(x) - \kappa_j(x)| \le c_8 \delta_n^3(x; x_j). \tag{11}$$

Для $j = 1-n$ и $j = n$ оценка (11) очевидна.

Далее, оценим $|f(x) - f(x_j)|$. Пусть $|x - x_j|/2 \le \pi/2$. Тогда, используя неравенство

$$\sin t \ge \frac{2}{\pi} t, \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

получаем

$$|f(x) - f(x_j)| \le \omega(f; |x - x_j|) \le \omega\left(f; h\frac{|x - x_j| + h}{h}\right) \le$$

$$\leq c_9\omega(h)\frac{|x-x_j|+h}{h} \leq c_9\omega(h)\left(1+n\frac{|x-x_j|}{2}\right) \leq$$

$$\leq c_9\omega(h)\left(1+\frac{\pi}{2}n\left|\sin\frac{x-x_j}{2}\right|\right) \leq \frac{c_{10}\omega(h)}{\delta_n(x;x_j)}.$$

Если же $\pi/2 \leq |x-x_j|/2 < \pi$, то либо $|x-x_{j+2n}|/2 \leq \pi/2$, либо $|x-x_{j-2n}|/2 \leq \leq \pi/2$. Пусть, для определенности, имеет место первый случай. Тогда

$$|f(x)-f(x_j)| = |f(x)-f(x_{j+2n})| \leq \frac{c_{10}\omega(h)}{\delta_n(x;x_{j+2n})} = \frac{c_{10}\omega(h)}{\delta_n(x;x_j)}.$$

Таким образом, для всех $j = 1-n, \ldots, n$ имеет место оценка

$$|f(x)-f(x_j)| \leq \frac{c_{10}\omega(h)}{\delta_n(x;x_j)},$$

которая вместе с (10) и (11) дает искомую оценку для $|\sigma_3(x)|$:

$$|\sigma_3(x)| \leq c_{11}\omega(h).$$

Таким образом, $|\sigma_1(x)| \leq c_{12}\omega(h)$, а это вместе с оценкой (9) приводит к оценке

$$|f(x)-\Theta_n(x)| \leq c_{13}\omega(h).$$

Итак, при $n > c_1$ теорема 1 доказана. Для $n \leq c_1$ она следует из тривиальной оценки

$$\|f-f(y_i)\| \leq \omega(f;\pi),$$

где i — любое целое число (т. е. в этом случае $\Theta_n(x) \equiv 0$).

Теорема 1 доказана полностью.

4. Доказательство теоремы 2. Пусть Θ_n — полином из теоремы 1, т. е. полином, для которого выполняется оценка

$$|f(x)-\Theta_n(x)| \leq c_{13}\omega(h) \tag{12}$$

и, кроме того,

$$\Theta_n(y_i) = 0, \qquad i \in \mathbf{Z}.$$

Введем множество O, которое определим следующим образом. Если $y_i \in (x_j, x_{j-1})$, то положим

$$O_i := (x_{j+1}, x_{j-2}).$$

Тогда обозначим

$$O := \cup_{i\in\mathbf{Z}} O_i.$$

В данной теореме под множествами H_* и H будем понимать несколько иные множества индексов. А именно: $j \in H_*$, если $(x_j, x_{j-1}) \not\subset O$; $j \in H$, если $j \in H_*$ и $|j| \leq n$, $j \neq -n$.

Однако будем предполагать выполнение условия (1), в силу которого и в данном случае множества H и H_* не пусты.

Для каждой точки $x^* \notin Y$ обозначим

$$T_{l,n}(x; x^*; Y) := J_{l,n}(x - x^*)\frac{\Pi(x)}{\Pi(x^*)}.$$

Пусть также

$$c_{14} := \max\{C_{1,s+2}; C_{1,s+3}\}, \qquad n_1 := 4(s+1)c_{14}n,$$

$$x_j^{**} := x_j^* + \frac{\pi}{n_1}.$$

Свойства функций $T_{l,n}$ изучены в [7]. Некоторые из них, необходимые нам в дальнейшем, сформулируем в виде отдельной леммы.

Лемма 3. *Имеют место следующие соотношения*:

$$T_{l,n} \in \mathbf{T}_{l(n-1)+s},$$

$$\Pi(x^*)T_{l,n}(x)\Pi(x) \ge 0, \qquad x \in \mathbf{R},$$

$$|T_{l,n}(x)| \le C_{2,l}n\delta_n^{2(l-s)}(x; x^*), \qquad x \in \mathbf{R}. \tag{13}$$

Кроме того, там же показано, что

$$\sum_{j=1-n}^{n} \delta_{n_1}^2(x; x_j^*) < 7. \tag{10$'$}$$

Для каждого $j \in H_*$ обозначим

$$T_j(x) := \frac{1}{2}\Big(T_{s+2,n_1}(x; x_j^*; Y) + T_{s+2,n_1}(x; x_j^{**}; Y)\Big).$$

Из леммы 3 получаем следующие свойства функции T_j:

$$T_j \in \mathbf{T}_{(n_1-1)(s+2)+s}, \tag{14}$$

$$\Pi(x_j^*)T_j(x)\Pi(x) \ge 0, \qquad x \in \mathbf{R}. \tag{15}$$

Имеют место такие неравенства [7]:

$$|T_j(x)| \ge c_{15}n\delta_{n_1}^{2(s+2)}(x; x_j^*)\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j^*)}\right|, \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{16}$$

$$|T_j(x)| \ge c_{16}n\delta_{n_1}^{4(s+1)}(x; x_j^*), \qquad x \in \mathbf{R} \setminus O. \tag{17}$$

Наконец, обозначим

$$T(x) := h\omega(h)\sum_{j \in H} T_j(x)\operatorname{sgn}\Pi(x_j^*).$$

Из (14) следует

$$T \in \mathbf{T}_{(n_1-1)(s+2)+s},$$

а из (15) получаем

$$T(x)\Pi(x) \ge 0, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Далее, из (13) и (10′) выводим оценку

$$|T(x)| \le C_{2,s+2}\omega(h)\sum_{j\in H}\delta_{n_1}^4(x;x_j^*) \le C_{2,s+2}\omega(h)\sum_{j=1-n}^{n}\delta_{n_1}^2(x;x_j^*) \le$$
$$\le 7C_{2,s+2}\omega(h) =: c_{17}\omega(h).$$

т. е.

$$|T(x)| \le c_{17}\omega(h). \tag{18}$$

Наконец, учитывая очевидное неравенство

$$\delta_{n_1}(x;x_j^*) \ge c_{18}, \quad x\in I_j,$$

для $x\in I_j\subset \mathbf{R}\setminus O$ получаем оценку

$$|T_j(x)| \ge c_{18}\omega(h),$$

которая вместе с (17) и (18) приводит к соотношениям

$$c_{19}\omega(h) \le |T(x)| \le c_{17}\omega(h), \quad x\in \mathbf{R}\setminus O. \tag{19}$$

Теперь мы можем доказать следующую лемму.

Лемма 4. *Функция*

$$R(x) := \Theta_n(x) + \frac{c_{13}}{c_{19}}T(x)$$

имеет свойства

$$R\in \mathbf{T}_{(n_1-1)(s+2)+s}, \tag{20}$$

$$\|f-R\| \le c_{20}\omega(h), \tag{21}$$

$$R(x)\Pi(x) \ge 0, \quad x\in \mathbf{R}\setminus O. \tag{22}$$

Доказательство. Свойство (20) непосредственно следует из (14). Докажем (21). Применяя (12) и (18), получаем

$$\|f-R\| \le \|f-\Theta_n\| + \|T\| \le c_{20}\omega(h),$$

где $c_{20} := c_{13}+c_{17}$.

Осталось доказать (22). Пусть, для определенности, $\Pi(x)>0$. Тогда из теоремы 1 следует $\Theta_n(x)\ge -c_{13}\omega(h)$. Теперь, используя оценки (19), имеем

$$R(x) \ge -c_{13}\omega(h) + c_{13}\omega(h) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Обозначим $U := O\cap[-\pi,\pi]$. Через $\tilde{O}_j$ будем обозначать j-ю связную компоненту множества U. Пусть количество таких компонент будет k, $k\le 2s$. Пусть также j-я компонента $\tilde{O}_j$ содержит m_j точек y_l: $y_{j_{(1)}},\ldots,y_{j_{(m_j)}}$. Оценим значение полинома Θ_n на $\tilde{O}_j$. Имеем

$$\Theta_n(x) = (x-y_{j_{(1)}})\ldots(x-y_{j_{(m_j)}})\frac{\Theta_n(x)}{(x-y_{j_{(1)}})\ldots(x-y_{j_{(m_j)}})} =$$

$$= (x-y_{j_{(1)}})\ldots(x-y_{j_{(m_j)}})\left(\frac{\Theta_n(x)}{(x-y_{j_{(1)}})\ldots(x-y_{j_{(m_j)}})} +\right.$$

$$+ \frac{\Theta_n(y_{j_{(1)}})}{(y_{j_{(1)}} - x)(y_{j_{(1)}} - y_{j_{(2)}})\dots(y_{j_{(1)}} - y_{j_{(m_j)}})} + \dots$$

$$\dots + \frac{\Theta_n(y_{j_{(m_j)}})}{(y_{j_{(m_j)}} - x)(y_{j_{(m_j)}} - y_{j_{(1)}})\dots(y_{j_{(m_j)}} - y_{j_{(m_j-1)}})} \Bigg) =$$

$$= (x - y_{j_{(1)}})\dots(x - y_{j_{(m_j)}})[\Theta_n; x, y_{j_{(1)}}, \dots, y_{j_{(m_j)}}] =$$

$$= (x - y_{j_{(1)}})\dots(x - y_{j_{(m_j)}})\Theta_n^{(m_j)}(\beta)$$

с некоторым $\beta \in \tilde{O}_j$. Известно, что если полином Θ_n приближает функцию f с оценкой (12), то для его производной выполняется неравенство

$$\|\Theta_n'\| \le c_{21} n \omega(h).$$

Отсюда и из неравенства Бернштейна получаем оценку

$$|\Theta_n(x)| \le c_{21}\left|(x - y_{j_{(1)}})\dots(x - y_{j_{(m_j)}})\right| n^{m_j}\omega(h), \quad x \in \tilde{O}_j. \tag{23}$$

Будем считать константу в этом неравенстве одной и той же для всех компонент $\tilde{O}_j$.

Обозначим теперь через $\bar{j}$ индекс из H такой, что $x_{\bar{j}} \in \partial\tilde{O}_j$. Если таких индексов два, то выберем меньший из них.

Рассмотрим снова полином $T_{\bar{j}} \in \mathbf{T}_{(n_1-1)(s+2)+s}$ и оценим его значение снизу на $\tilde{O}_j$. Поскольку при $x \in \tilde{O}_j$

$$\delta_{n_1}(x; x_{\bar{j}}^*) \ge c_{22},$$

$$\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_{\bar{j}}^*)}\right| \ge c_{23}\left|(x - y_{j_{(1)}})\dots(x - y_{j_{(m_j)}})\right| n^{m_j},$$

из (16) получаем

$$\left|T_{\bar{j}}(x)\right| \ge c_{24}\left|(x - y_{j_{(1)}})\dots(x - y_{j_{(m_j)}})\right| n^{m_j+1}, \quad x \in \tilde{O}_j. \tag{24}$$

Будем считать, что константа здесь одна и та же для всех $\tilde{O}_j$.

Обозначим теперь

$$\overline{T}(x) := h\omega(h)\sum_{j=1}^{k} T_{\bar{j}}(x)\operatorname{sgn}\Pi(x_{\bar{j}}).$$

Очевидно, что

$$\left|\overline{T}(x)\right| \le c_{17}\omega(h), \tag{25}$$

$$\overline{T}(x)\Pi(x) \ge 0, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{26}$$

Отсюда и из неравенств (23), (24) вытекает такая лемма.

Лемма 5. *Функция*

$$Q(x) := \Theta_n(x) + \frac{c_{21}}{c_{24}}\overline{T}(x)$$

имеет свойства

$$Q \in \mathbf{T}_{(n_1-1)(s+2)+s},$$

$$Q(x)\Pi(x) \geq 0, \quad x \in U.$$

Таким образом, из лемм 4 и 5, а также из (25), (26) следует, что полином

$$\tau_n(x) := R(x) + \frac{c_{21}}{c_{24}}\overline{T}(x)$$

удовлетворяет условиям теоремы 2 в случае, когда $n > c_1$. Если же $n \leq c_1$, то теорема 2 следует из очевидного неравенства

$$\| f - f(y_i) \| \leq \omega(f; \pi),$$

где i — любое целое число, т. е. в этом случае $\tau_n(x) \equiv 0$.

Теорема 2 доказана.

Авторы выражают благодарность проф. И. А. Шевчуку за высказанные им ценные замечания.

1. *Leviatan D.* Shape-preserving approximation by polynomials // J. Comput. and Appl. Math. – 2000. – **121**, № 1, 2. – P. 73–94.
2. *Стечкин С. Б.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами // Докл. АН СССР. – 1952. – **83**, № 5. – С. 651–654.
3. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
4. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 225 с.
5. *Гилевич Я., Шевчук И. А.* Комонотонное приближение // Фундам. и прикл. математика. – 1996. – **2**, вып. 2. – С. 319–363.
6. *Pleshakov M. G.* Comonotone Jackson's inequality // J. Approxim. Theory. – 1999. – **99**, № 6. – P. 409–421.
7. *Плешаков М. Г.* Комонотонное приближение периодических функций классов Соболева: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Саратов, 1998. – 110 с.

Получено 21.12.2001,
после доработки — 02.04.2002