УДК 517.518, 519.213

**В. П. Заставный** (Донец. ун-т)

# ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИИ С ВНЕШНОСТИ ИНТЕРВАЛА ДО ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ НА ВСЕЙ ОСИ ФУНКЦИИ И АППРОКСИМАЦИОННАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КЛАССА $W_M^{r,\beta}$

We obtain sufficient conditions for a function defined on $[a, +\infty)$, where $a > 0$, to admit the extension along the entire axis to a positive definite function.

Отримано достатні умови, щоб функцію, задану на $[a, +\infty)$, де $a > 0$, можна було продовжити на всю вісь до додатно визначеної функції.

**1.** Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется *положительно определенной* на $\mathbb{R}$, если $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall \{x_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$, $\forall \{c_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{k,\,j=1}^{n} c_k \bar{c}_j f(x_k - x_j) \geq 0.$$

Для положительно определенных функций непрерывность в нуле эквивалентна непрерывности на $\mathbb{R}$. Множество всех положительно определенных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций обозначим через $\Phi$. По теореме Бохнера – Хинчина $f \in \Phi$ тогда и только тогда, когда $f$ представима в виде $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\, d\mu(t)$, где $\mu$ — неотрицательная конечная борелевская мера на $\mathbb{R}$. Если $f \in \Phi$ и $f(0) = 1$, то $f$ является характеристической функцией. Если $f \in C(\mathbb{R}) \bigcap L(\mathbb{R})$, то положительная определенность функции $f$ эквивалентна неотрицательности ее преобразования Фурье, т. е.

$$\hat{f}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{itx}\, dt \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Задача о продолжении положительно определенной функции с конечного интервала $(-a, a)$ на всю ось с сохранением этого свойства была поставлена и решена М. Г. Крейном [1] (см. также § 4.4 [2]). В связи с одной задачей теории приближения мы рассматриваем задачу о продолжении в $\Phi$ функции, заданной вне интервала $(-a, a)$. Поскольку $f(-x) = \overline{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$, для любой $f \in \Phi$, то положительно определенная функция однозначно определяется своими значениями при $x \geq 0$. Поэтому в нашей задаче можно считать, что функция задана на $[a, +\infty)$, $a > 0$.

**Теорема 1.** 1. *Если* $f \in \Phi$ *и* $|\mathrm{Re} f| + \mathrm{Re} f \in L(\mathbb{R})$, *то* $\mathrm{Re} f \in L(\mathbb{R})$.

2. *Если* $f \in \Phi$ *и существует* $a > 0$ *такое, что при* $x \geq a$ *функция* $\mathrm{Im} f(x)$ *сохраняет знак, а* $\mathrm{Re} f(x) = 0$, *то интеграл* $\int_0^\infty |\mathrm{Im} f(x)| (1 + x^\varepsilon)^{-1}\, dx$ *сходится для всех* $\varepsilon > 0$.

3. *Если* $f$ *локально абсолютно непрерывна на* $[a, +\infty)$, $a > 0$, $f, f' \in L[a, +\infty)$ *и существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что*

$$\int_a^\infty |f'(x) - f'(x+h)|\,dx = O\left(\ln^{-1-\varepsilon}\frac{1}{h}\right), \quad h \to +0,$$

*то* $f$ *можно продолжить на* $\mathbb{R}$ *так, что она войдет в* $\Phi$. *При* $\varepsilon = 0$ *утверждение неверно.*

4. *Если на* $[a, +\infty)$, $a > 0$, $f(x) = cx^{-r}$ $(c \in \mathbb{C}, r \geq 0)$, *то продолжение в* $\Phi$ *возможно тогда и только тогда, когда* $r > 1$, $c \in \mathbb{C}$ *или* $r \in [0, 1]$, $|\arg c| \leq r\pi/2$.

***Доказательство утверждения*** **1** ***теоремы*** **1.** Если $f \in \Phi$, то и $\operatorname{Re} f \in \Phi$. Поскольку при $\alpha > 0$ функция $f_\alpha(x) = (1 + \alpha x^2)^{-1} \in \Phi$, то и $f_\alpha \operatorname{Re} f \in \Phi$. Кроме того, $f_\alpha \operatorname{Re} f \in L(\mathbb{R})$ и, следовательно, $\int_{\mathbb{R}} f_\alpha \operatorname{Re} f\, dx \geq 0$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} f_\alpha |\operatorname{Re} f|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}} f_\alpha \big(|\operatorname{Re} f| + \operatorname{Re} f\big)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}} \big(|\operatorname{Re} f| + \operatorname{Re} f\big)\, dx,$$

и осталось устремить $\alpha$ к нулю.

Следующая лемма уточняет известный результат Пойа [3] (см. п. VII § 6, а также теорему 4.3.1 [2]): если $f$ является выпуклой вниз на $[0, +\infty)$ и $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, то $\int_0^\infty f(t)\cos tx\, dt \geq 0$ при $x \neq 0$.

**Лемма.** *Если $f$ — выпуклая вниз на* $[0, +\infty)$ *четная функция и* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, *то* $\hat{f}(x) \geq 0$, *когда* $x \neq 0$, *и* $\hat{f}(x) > 0$, *когда $f$ не является кусочно-линейной с равноотстоящими узлами. Если, кроме того, $f'$ — выпуклая вверх на* $(0, +\infty)$ *функция, то*

$$\hat{f}(x) \geq -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{\pi}{2|x|}\right).$$

***Доказательство леммы.*** Если $g$ убывает на $(0, 2\pi)$, то

$$\int_0^{2\pi} g(t)\sin t\, dt = \int_0^{2\pi} (g(t) - g(\pi))\sin t\, dt = \int_0^{2\pi} |g(t) - g(\pi)||\sin t|\, dt.$$

Интеграл в правой части последнего равенства положителен, кроме случая, когда $g$ постоянна на $(0, 2\pi)$. Из этого же равенства следует

$$\int_0^{2\pi} g(t)\sin t\, dt \geq \int_0^{\pi/2} |g(t) - g(\pi)||\sin t|\, dt + \int_{3\pi/2}^{2\pi} |g(t) - g(\pi)||\sin t|\, dt \geq$$

$$\geq \left| g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(\pi)\right| + \left| g\left(\frac{3\pi}{2}\right) - g(\pi)\right| = g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(\frac{3\pi}{2}\right).$$

Применяя данное неравенство к $g = -f'$, для $x > 0$ получаем

$$\frac{1}{2}\hat{f}(x) = -\frac{1}{x}\int_0^\infty f'(t)\sin tx\, dt = -\frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^\infty \int_0^{2\pi} f'\left(\frac{t + 2k\pi}{x}\right)\sin t\, dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^\infty \left[ f'\left(\frac{3\pi + 4k\pi}{2x}\right) - f'\left(\frac{\pi + 4k\pi}{2x}\right)\right].$$

Если при этом $f'$ является выпуклой вверх, то

$$\frac{1}{2}\hat{f}(x) \geq \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[f'\left(\frac{5\pi + 4k\pi}{2x}\right) - f'\left(\frac{3\pi + 4k\pi}{2x}\right)\right].$$

Складывая два последних неравенства и учитывая, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, получаем

$$\hat{f}(x) \geq \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[f'\left(\frac{5\pi + 4k\pi}{2x}\right) - f'\left(\frac{\pi + 4k\pi}{2x}\right)\right] = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{\pi}{2x}\right).$$

***Доказательство утверждения* 3 *теоремы* 1.** Не уменьшая общности, можно считать, что $f(x) = 0$ при $x \in [a, a_0]$, где $a_0 > a$, так как всегда можно продолжить функцию $f$ на $[a/2, +\infty)$ с сохранением условий теоремы (например, положить равной нулю на $[a/2, 2a/3]$, продолжить линейно на $[2a/3, a]$ и учесть, что при $h > 0$ $\int_a^\infty |f'(x) - f'(x+h)|\,dx \geq \int_a^{a+h} |f'(x)|\,dx$). Тогда при достаточно больших $x > 0$ имеем

$$\left|\int_a^\infty f(t)e^{itx}\,dt\right| = \left|\frac{i}{x}\int_a^\infty f'(t)e^{itx}\,dt\right| = \left|\frac{i}{2x}\int_a^\infty\left[f'(t) - f'\left(t + \frac{\pi}{x}\right)\right]e^{itx}\,dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2|x|}\int_a^\infty \left|f'(t) - f'\left(t + \frac{\pi}{x}\right)\right| dt = O\left(\frac{1}{|x|\ln^{1+\varepsilon}|x|}\right).$$

Поскольку функция $\bar{f}$ удовлетворяет тем же условиям, что и $f$, то при $x \to -\infty$ получим такую же оценку. На $(-\infty, -a]$ полагаем $f(x) := \overline{f(-x)}$, и тогда

$$\int_{-\infty}^{-a} f(t)e^{itx}\,dt = \overline{\int_a^\infty f(t)e^{itx}\,dt}.$$

Рассмотрим следующую четную функцию:

$$f_0(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_{|x|}^{a}\left(\frac{1}{t\ln^{1+\varepsilon}(b/t)} - \frac{1}{a\ln^{1+\varepsilon}(b/a)}\right)dt, & x \in [-a, a]; \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$$

где $b \geq ae^{(3(1+\varepsilon))/2}$ (при этом условии $f_0$ является выпуклой вниз на $[0, +\infty)$, а $f_0'$ — выпуклой вверх на $(0, +\infty)$). На $[-a, a]$ полагаем $f(x) := cf_0(x)$, где константа $c > 0$ подлежит определению. Тогда

$$\hat{f}(x) = c\hat{f}_0(x) + O\left(\frac{1}{|x|\ln^{1+\varepsilon}|x|}\right).$$

К $f_0$ применим лемму. Получим $\hat{f}(x) > 0$ при всех $c \geq c_0 > 0$ и $|x| \geq \delta > 0$. Чтобы выполнялось $\hat{f}(x) > 0$ при всех $x \in [-\delta, \delta]$, достаточно взять

$$c > \max\left\{c_0;\ 2\int_a^\infty |f(x)|dx \max_{x\in[-\delta,\delta]} \hat{f}_0^{-1}(x)\right\}.$$

Следующий пример показывает, что утверждение 3 неверно при $\varepsilon = 0$. Пусть

$$g(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{\ln(x-a-1/2)}, & x \in (a+1/2, a+1]; \\ \dfrac{a+2-x}{\ln 2}, & x \in [a+1, a+2]; \\ 0, & x \in [a, a+1/2] \cup [a+2, +\infty). \end{cases}$$

Эту функцию нельзя продолжить в $\Phi$, так как для $f \in \Phi$ интеграл

$$\int_0^\infty \frac{f(x+u) - f(x-u)}{u}\, du$$

сходится при всех $x \in \mathbb{R}$ (см. § 2 [4]), а для функции $g$ при $x = a + 1/2$ этот интеграл расходится.

***Доказательство утверждения* 4 *теоремы* 1.** Случай $r > 1$ следует из утверждения 3. Пусть теперь $r \in (0, 1]$. Если $f \in \Phi$, то, очевидно, функция $f(kx)$ лежит в том же классе при любом $k > 0$. Поэтому можно считать $a = 1$. Пусть $f(x) = cx^{-r}$ при $x \geq 1$, где $c = \alpha + i\beta$, $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Необходимость условия $\alpha \geq 0$ для $r = 1$ вытекает из утверждения 1. Докажем необходимость для $r \in (0, 1)$. При любом непрерывном продолжении с условием $f(-u) = \overline{f(u)}$ и при $x \neq 0$ имеет место равенство (см. п. 59 [5])

$$\hat{f}(x) = 2\alpha \int_0^\infty \frac{\cos tx}{t^r}\, dt - 2\beta \int_0^\infty \frac{\sin tx}{t^r}\, dt + g(x) =$$

$$= \frac{2\Gamma(1-r)}{|x|^{1-r}} \left( \alpha \sin\frac{r\pi}{2} - \beta \cos\frac{r\pi}{2} \operatorname{sign} x \right) + g(x),$$

где $g$ ограничена на $\mathbb{R}$. Поэтому для положительности $\hat{f}$ в проколотой окрестности нуля должно выполняться неравенство

$$\alpha \sin\frac{r\pi}{2} - |\beta| \cos\frac{r\pi}{2} \geq 0,$$

что эквивалентно неравенству $|\arg c| \leq \dfrac{r\pi}{2}$.

Докажем достаточность при $r \in (0, 1)$. Продолжим $f$ на $\mathbb{R}$ по формуле

$$f(x) := \begin{cases} \gamma(1-|x|)^2 + \alpha(r+1-r|x|) + i\beta x, & |x| \leq 1; \\ (\alpha + i\beta \operatorname{sign} x)|x|^{-r}, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

где $\gamma > 0$ нужно еще выбрать. Тогда

$$\hat{f}(x) = \gamma f_0(x) + f_1(x), \quad x \neq 0,$$

где

$$f_0(x) = \int_{-1}^{1} (1-|t|)^2 e^{itx}\, dt,$$

$$f_1(x) = \int_{-1}^{1} \left[\alpha(r+1-r|t|) + i\beta t\right] e^{itx}\, dt + \int_{|t|\geq 1} \frac{\alpha + i\beta \operatorname{sign} t}{|t|^r} e^{itx}\, dt.$$

Легко показать, что $f_0(x) > 0$ при $x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) \geq 2/x^2$ при $|x| \geq 2$, $|f_1(x)| \leq \leq c_1/x^2$ при $x \neq 0$. Поэтому $\hat{f}(x) > 0$ при всех $\gamma \geq c_1$ и $|x| \geq 2$. После преобразований получаем

$$f_1(x) = \frac{2\Gamma(1-r)}{|x|^{1-r}}\left(\alpha \sin\frac{r\pi}{2} - \beta\cos\frac{r\pi}{2}\operatorname{sign} x\right) + g(x),$$

где $g$ ограничена на $\mathbb{R}$ (см. выше). Учитывая положительность первого слагаемого в последнем равенстве, делаем вывод, что при всех

$$\gamma > \max\{c_1; \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| \max_{x\in[-2,2]} f_0^{-1}(x)\}$$

выполняется неравенство $\hat{f}(x) > 0$, $x \neq 0$. Поскольку $\hat{f} \in L(R)$ и $f \in C(\mathbb{R})$, то по формуле обращения (см., например, п. 72, теорему 1 [5]) получаем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{-itx}\, dt$$

и, следовательно, $f \in \Phi$.

Достаточность при $r = 1$ доказывается точно так же, если учесть, что

$$f_1(x) = \alpha\left(\int_{-1}^{1}(2-|t|)e^{itx}\, dt + \int_{|t|\geq 1}\frac{e^{itx}}{|t|}\, dt\right) -$$

$$- 2\beta\left(\int_{0}^{1} t\sin tx\, dt + \operatorname{sign} x \int_{|x|}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\, dt\right),$$

где выражение в первой скобке положительно при всех $x \neq 0$ согласно лемме, а во второй – ограничено на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим случай $r = 0$. Достаточность очевидна, так как любая неотрицательная константа принадлежит $\Phi$. Докажем необходимость. Если $f \in \Phi$ и $f(x) = c$ при $x \geq 1$, то $ff_r \in \Phi$, где $r \in (0, 1]$, $f_r \in \Phi$ и $f_r(x) = e^{ir\pi/2}x^{-r}$ при $x \geq 1$ (согласно доказанному выше такая функция существует). Как показано ранее, $|\arg(ce^{ir\pi/2})| \leq r\pi/2$, и осталось перейти к пределу при $r \to +0$.

***Доказательство утверждения* 2 *теоремы* 1.** Поскольку $f$ и $\bar{f}$ принадлежат $\Phi$ одновременно, можно считать, что $\operatorname{Im} f(x) \geq 0$ при $x \geq a$. При $r \in (0, 1]$ выберем функцию $f_r \in \Phi$, которая при $x \geq a$ равна $e^{ir\pi/2}x^{-r}$ (см. утверждение 3). Тогда $ff_r \in \Phi$ и

$$\operatorname{Re}(f(x)f_r(x)) = -\sin\frac{r\pi}{2}x^{-r}\operatorname{Im} f(x) \leq 0$$

при $x \geq a$. Но тогда в силу утверждения 1 $\operatorname{Re}(ff_r) \in L(\mathbb{R})$, а это эквивалентно сходимости указанного интеграла.

***Замечание* 1.** Из доказательства теоремы 1 видно, что для продолжений, указанных в утверждениях 3 и 4, в точке $a$ существует конечная левая производная.

***Замечание* 2.** Если для функции $f$, заданной на $[a, +\infty)$, $a > 0$, существует хотя бы одно продолжение $f_0 \in \Phi$ и $f(x) \neq 0$ при $x \geq a$, то существует другое продолжение $f_1 \in \Phi$, которое не обращается в нуль при всех $x \in \mathbb{R}$. Это верно, по крайней мере, в следующих случаях: 1) $\operatorname{Re} f(a) > 0$; 2) $\operatorname{Im} f(a) \neq 0$; 3) $\operatorname{Im} f(a) = 0$ и функция $\operatorname{Im} f_0$ имеет конечную или бесконечную (равную $+\infty$ или $-\infty$) левую производную в точке $a$.

Действительно, в первом и во втором случаях в силу непрерывности в точке $a$ существует $a_0 \in (0, a)$ такое, что при $x \in [a_0, a]$ выполняются соответственно неравенства $\operatorname{Re} f_0(x) > 0$ или $\operatorname{Im} f_0(x) \neq 0$. Тогда в качестве указанного продолжения достаточно выбрать функцию вида

$$f_1(x) = f_0(x) + \lambda(a - |x|)_+ \in \Phi, \quad \lambda > 0.$$

Очевидно, при любом $\lambda > 0$ $f_1(x) \neq 0$, если $x \in [a_0, a]$. А для достаточно больших значений $\lambda > 0$ $\operatorname{Re} f_1(x) > 0$ при $x \in [0, a_0]$ и, следовательно, $f_1(x) \neq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

В третьем случае рассматриваем функцию

$$g(x) = f_0(x) + e^{i\varepsilon x}(a - |x|)_+ \in \Phi,$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$ выбираем так, чтобы левая производная функции $\operatorname{Im} g$ в точке $a$ была отлична от нуля. Тогда при некотором $a_0 \in (0, a)$ для всех $x \in [a_0, a)$ выполняется неравенство $\operatorname{Im} g(x) \neq 0$. Поэтому в качестве указанного продолжения достаточно взять функцию вида

$$f_1(x) = g(x) + \lambda(a - |x|)_+ \in \Phi, \quad \lambda > 0.$$

Очевидно, при любом $\lambda > 0$ $\operatorname{Im} f_1(x) \neq 0$ для $x \in [a_0, a)$. Если значение $\lambda > 0$ достаточно большое, то $\operatorname{Re} f_1(x) > 0$ при $x \in [0, a_0]$ и, следовательно, $f_1(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R}$.

**2.** Обозначим через $W_M^{r,\beta}$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, множество непрерывных, $2\pi$-периодических функций, для которых тригонометрический ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^r e^{i\beta\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} k} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

является рядом Фурье некоторой функции $f_\beta^{(r)}$, удовлетворяющей условию $\left|f_\beta^{(r)}(x)\right| \leq M$ п. в. Здесь $\hat{f}(k)$ — коэффициенты Фурье функции $f$ по тригонометрической системе $\{e^{ikx}\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Эти классы впервые ввел Надь [6]. При $\beta = r$ получаем $W_M^r = W_M^{r,r}$ — класс непрерывных, $2\pi$-периодических функций с ограниченной $r$-й производной по Вейлю ($\left|f_\beta^{(r)}(x)\right| \leq M$ п. в.), а при $\beta = r - 1$ получаем $\tilde{W}_M^r = W_M^{r,r-1}$ — класс непрерывных, $2\pi$-периодических функций с ограниченной $r$-й производной сопряженной функции ($\left|\tilde{f}_\beta^{(r)}(x)\right| \leq M$ п. в.).

**Теорема 2.** 1. *При любом $r > 0$ можно указать константу $C_r$ и финитную функцию $\varphi_r \in C(\mathbb{R})$ $(\operatorname{supp}\varphi_r \subset [-1, 1])$ такие, что*

$$f \in W_M^r \iff \left\| f(x) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_r\left(\frac{k}{n}\right)\hat{f}(k)e^{ikx} \right\|_C \le \frac{C_r M}{n^r} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. *При любом $r \ge 1/2$ можно указать константу $C_r$ и финитную функцию $\varphi_r \in C(\mathbb{R})$ $(\operatorname{supp}\varphi_r \subset [-1, 1])$ такие, что*

$$f \in \tilde{W}_M^r \iff \left\| f(x) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_r\left(\frac{k}{n}\right)\hat{f}(k)e^{ikx} \right\|_C \le \frac{C_r M}{n^r} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. *Пусть выполнено одно из двух условий: $r > 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ или $r \in (0, 1]$, $\beta = 2k + \varepsilon$, $k \in \mathbb{Z}$, $|\varepsilon| \le r$. Тогда можно указать константу $C_{r,\beta}$ и финитную функцию $\varphi_{r,\beta} \in C(\mathbb{R})$ $(\operatorname{supp}\varphi_{r,\beta} \subset [-1, 1])$ такие, что*

$$f \in W_M^{r,\beta} \iff \left\| f(x) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{r,\beta}\left(\frac{k}{n}\right)\hat{f}(k)e^{ikx} \right\|_C \le \frac{C_{r,\beta} M}{n^r} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

***Доказательство.*** Утверждения 1 и 2 очевидно следуют из утверждения 3 при $\beta = r$ и $\beta = r - 1$ соответственно, поэтому докажем утверждение 3. Используем следующую теорему Тригуба.

**Теорема** (см. теорему 2, $m = 1$ [7]). *Пусть функция $g$, определенная на множестве $|x| \ge n \ge c > 0$, допускает продолжение $g_n$ на $\mathbb{R}$ такое, что $g_n^{-1} \in \Phi$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{g_n(k)}{g_n(0)} = 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда*

$$\left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(k)\hat{f}(k)e^{ikx} \right\|_{L_\infty} \le 1 \iff$$

$$\iff \left\| f - \sum_{|k|\le n} \left(1 - \frac{g(k)}{g_n(k)}\right)\hat{f}(k)e^{ikx} \right\|_C \le \frac{1}{g_n(0)} \quad \forall n \ge c,$$

*где слева под знаком нормы — ряд Фурье некоторой функции из $L_\infty$.*

В нашем случае

$$g(x) = |x|^r e^{i\beta\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} x}.$$

Выберем $f_{r,\beta} \in \Phi$ так, чтобы

$$f_{r,\beta}(x) = |x|^{-r} e^{-i\beta\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} x}$$

при $|x| \ge 1$. В случае $r > 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ такая функция $f_{r,\beta}$ построена в теореме 1. Можно считать, что $f_{r,\beta}(x) \ne 0$, $x \in \mathbb{R}$ (см. замечания 1 и 2). Положим $\varphi_{r,\beta}(x) = 1 - f_{r,\beta}(x)g(x)$ и применим теорему Тригуба с функцией

$$g_n(x) = n^r f_{r,\beta}^{-1}\left(\frac{x}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

В случае $r \in (0, 1]$, $\beta = 2k + \varepsilon$, $k \in \mathbb{Z}$, $|\varepsilon| \le r$, где $k$ четное, такая функция также существует. Если $k$ нечетное, то в силу теоремы 1 функция $f_{r,\beta}$ с требуемыми свойствами не существует. Поступим следующим образом. В определении класса $W_M^{r,\beta}$ вместо множителей

$$\left\{ |k|^r e^{i\beta \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} k} \right\}$$

используем множители

$$\left\{ -|k|^r e^{i\beta \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} k} \right\}$$

и, очевидно, от этого класс $W_M^{r,\beta}$ не изменится. Затем $f_{r,\beta} \in \Phi$ подберем так, чтобы

$$f_{r,\beta}(x) = -|x|^{-r} e^{-i\beta \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x}$$

при $|x| \ge 1$, а дальше повторяем рассуждения, приведенные выше.

Аналогичный результат для класса функций с ограниченной константой степенью оператора Лапласа ранее получен Р. М. Тригубом [8].


1. *Крейн М. Г.* О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций // Докл. АН СССР. – 1940. – **26**, № 1. – С. 17 – 20.
2. *Лукач Е.* Характеристические функции. – М.: Наука, 1979. – 424 с.
3. *Polya G.* Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen // Math. Z. – 1918. – **2**. – S. 352 – 383.
4. *Тригуб Р. М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – **44**, № 6. – С. 1378 – 1409.
5. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
6. *Nagy B.* Sur une classe generale de procedes de sommation pour les series de Fourier // Acta Math. – 1948. – P. 14 – 52.
7. *Тригуб Р. М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье и приближение функций линейными средними их рядов // Конструктивная теория функций 81. – София: Изд-во Болг. АН, 1983. – С. 178 – 180.
8. *Тригуб Р. М.* Некоторые свойства преобразования Фурье меры и их применение // Теория приближения функций: Тр. междунар. конф. по теории приближения функций (Киев, 1983). – М.: Наука, 1987. – С. 439 – 443.


Получено 30.11.2001,
после доработки — 18.11.2002