УДК 517.98

М. Ф. Городній (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

СТІЙКІСТЬ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

For a sectorial operator A with the spectrum $\sigma(A)$ acting in the complex Banach space B, we prove that the condition $\sigma(A) \bigcap i\mathbf{R} = \varnothing$ is sufficient for the differential equation

$$\varepsilon x_\varepsilon''(t) + x_\varepsilon'(t) = A x_\varepsilon(t) + f(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

with a small positive parameter to have the unique bounded solution x_ε for an arbitrary bounded function $f: \mathbf{R} \to B$ satisfying some Hölder condition. We also establish that bounded solutions of equations of this sort converge uniformly on $\mathbf{R}$ to the unique bounded solution of the differential equation $x'(t) = Ax(t) + f(t)$, as $\varepsilon \to 0+$.

Доведено, що для секторіального оператора A зі спектром $\sigma(A)$, який діє в комплексному банаховому просторі B, умова $\sigma(A) \bigcap i\mathbf{R} = \varnothing$ є достатньою для того, щоб диференціальне рівняння з малим додатним параметром ε

$$\varepsilon x_\varepsilon''(t) + x_\varepsilon'(t) = A x_\varepsilon(t) + f(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

мало єдиний обмежений розв'язок x_ε для довільної обмеженої функції $f: \mathbf{R} \to B$, що задовольняє певну умову Гельдера. Також встановлено, що при $\varepsilon \to 0+$ обмежені розв'язки таких рівнянь збігаються рівномірно на $\mathbf{R}$ до єдиного обмеженого розв'язку диференціального рівняння $x'(t) = Ax(t) + f(t)$.

Нехай B — комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$; I — одиничний оператор в B; A — секторіальний оператор, що діє в B з областю визначення $D(A)$ [1, с. 26].

Позначимо через $\mathfrak{R}$ клас всіх функцій $f: \mathbf{R} \to B$, для яких $\|f\|_\infty := := \sup\{\|f(t)\| \mid t \in \mathbf{R}\} < +\infty$ і знайдуться такі залежні від f сталі $K > 0$, $\alpha \in (0; 1]$, що

$$\|f(t) - f(s)\| \le K|t-s|^\alpha \quad \forall\, t, s \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Означення 1. *Функція $x: \mathbf{R} \to B$ називається відповідним до $f \in \mathfrak{R}$ обмеженим розв'язком диференціального рівняння*

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

якщо $x \in C^1(\mathbf{R}, B)$, $\|x\|_\infty < +\infty$, для довільного $t \in \mathbf{R}$ $x(t) \in D(A)$ та виконується рівність (2).

Тим же методом, що й при доведенні теореми 4 [2, с. 209], перевіряється правильність наступного твердження.

Теорема 1. *Припустимо, що спектр $\sigma(A)$ оператора A не перетинається з уявною віссю $i\mathbf{R} := \{it : t \in \mathbf{R}\}$. Тоді для довільної $f \in \mathfrak{R}$ рівняння* (2) *має єдиний обмежений розв'язок x.*

Означення 2. *При фіксованому $\varepsilon > 0$ функція $x_\varepsilon: \mathbf{R} \to B$ називається відповідним до $f \in \mathfrak{R}$ обмеженим розв'язком диференціального рівняння*

$$\varepsilon x_\varepsilon''(t) + x_\varepsilon'(t) = A x_\varepsilon(t) + f(t), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{3}$$

якщо $x_\varepsilon \in C^2(\mathbf{R}, B)$, $\|x_\varepsilon\|_\infty < +\infty$, для довільного $t \in \mathbf{R}$ $x_\varepsilon(t) \in D(A)$ та виконується рівність (3).

Мета цієї статті — довести, що коли $\sigma(A) \bigcap i\mathbf{R} = \varnothing$, то для фіксованої $f \in \mathfrak{R}$ при малих додатних значеннях параметра ε рівняння (3) має єдиний обмежений розв'язок x_ε, причому

$$\| x_\varepsilon - x \|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to 0+, \tag{4}$$

де x — відповідний до f єдиний обмежений розв'язок рівняння (2).

У випадку, коли, крім того, A — лінійний обмежений оператор та $f \in C^\infty(\mathbf{R}, B)$, аналогічний результат отримано в [3]. Таке ж питання щодо задач Коші для диференціальних рівнянь (2), (3) розглядалося в [4, 5]. Зауважимо, що в цих роботах на відміну від твердження (4) доведено, що при $\varepsilon \to 0+$ x_ε рівномірно збігається до x за нормою на обмежених множинах з $\mathbf{R}$. Про застосування таких рівнянь див. [3].

1. Секторіальність квадратного кореня з секторіального оператора. Нехай T — секторіальний оператор, що діє в B, з областю визначення $D(T)$ і такий, що $\sigma(T) \subset \{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \}$. Скориставшись означенням секторіального оператора та замінивши, якщо це необхідно, відповідні сталі, неважко переконатися, що знайдуться числа $\delta > 0$, $\varphi \in (0; \pi/2)$, $M \geq 1$, для яких

$$\sigma(T) \subset S_T := \{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z > \delta, \ |\arg z| < \varphi \}, \tag{5}$$

$$\| R_\lambda(T) \| \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \setminus S_T, \quad \lambda \neq 0. \tag{6}$$

Тут $R_\lambda(T) := (\lambda I - T)^{-1}$ — резольвента оператора T. При $t > 0$ існує експонента $\exp\{-Tt\}$ від оператора T [1, с. 28], причому

$$\begin{gathered} \exists C > 0 \ \ \forall t > 0: \| \exp\{-Tt\} \| \leq C \exp\{-\delta t\}, \\ \| T \exp\{-Tt\} \| \leq \frac{C}{t} \exp\{-\delta t\}. \end{gathered} \tag{7}$$

Також зазначимо, що коли $A = T$, то відповідний до $f \in \mathfrak{R}$ єдиний обмежений розв'язок рівняння (2) має вигляд

$$x(t) = -\int_t^{+\infty} \exp\{ T(t-s) \} f(s) ds, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{8}$$

Згідно з результатами, викладеними в розділі 1. 4 [1], справджується таке твердження.

Лема 1. *Оператор*

$$T^{-1/2} := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{-1/2} \exp\{-Tt\} dt \tag{9}$$

є лінійним, обмеженим та ін'єктивним в B, *причому* $(T^{-1/2})^2 = T^{-1}$, *а арифметичний обернений до* $T^{-1/2}$ *оператор* $T^{1/2}$ *є замкненим і має таку область визначення* $D(T^{1/2})$, *що* $D(T) \subset D(T^{1/2})$.

Надалі буде використовуватись така теорема.

Теорема 2. $T^{1/2}$ — *секторіальний оператор в* B.

Доведення цієї теореми ґрунтується на декількох твердженнях, запропонованих нижче.

Позначимо через Γ_T границю множини S_T. Тут і в подальшому вважаємо, що границя Γ_T додатно орієнтована відносно S_T і для $\lambda = r\exp\{i\theta\}$, $|\theta| < \pi$, $\sqrt{\lambda} = \sqrt{r} \exp\{i\theta/2\}$.

Доведення. Оскільки інтеграл (9) збігається абсолютно і $\exp\{-Tt\}$ задано абсолютно збіжним інтегралом

$$\exp\{-Tt\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_T} \exp\{-\lambda t\} R_\lambda(T)\, d\lambda, \quad t > 0,$$

то

$$T^{-1/2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_T} \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} t^{-1/2}\exp\{-\lambda t\}\, dt\right\} R_\lambda(T)\, d\lambda.$$

Неважко перевірити, що

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} t^{-1/2}\exp\{-\lambda t\}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0,$$

звідки й випливає правильність зображення (10).

Наступне твердження доводиться елементарно.

Лема 3. *Якщо* $\lambda \neq 0$ *і* λ^{-1} *належить резольвентній множині* $\rho(T^{-1/2})$ *оператора* $T^{-1/2}$, *то* $\lambda \in \rho(T^{1/2})$.

Покладемо

$$R_\lambda := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_T} \frac{1}{\lambda - \sqrt{z}} R_z(T)\, dz, \quad \lambda \in \mathbf{C} \setminus (S_T \cup \Gamma_T). \tag{11}$$

Зауважимо, що внаслідок (7) інтеграл з (11) збігається абсолютно.

Лема 4. *Для будь-якого* $\lambda \in \mathbf{C} \setminus (S_T \cup \Gamma_T)$ *справджуються рівності*

$$R_0 - R_\lambda = \lambda R_0 R_\lambda = \lambda R_\lambda R_0. \tag{12}$$

Доведення. При фіксованому $\lambda \in \mathbf{C} \setminus (S_T \cup \Gamma_T)$, $\lambda \neq 0$, існує $\beta > 0$ таке, що λ і Γ_T розташовані в $\mathbf{C}$ з різних сторін відносно кривої $\Gamma_T' := \{z - \beta \mid z \in \Gamma_T\}$, а нуль знаходиться зліва від Γ_T'. Якщо Γ_T' додатно орієнтована відносно S_T, то з урахуванням тотожності Гільберта для $R_z(T)$ і теореми Фубіні одержимо

$$R_\lambda R_0 = R_0 R_\lambda = \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_T'} \frac{1}{-\sqrt{\xi}} R_\xi(T)\, d\xi\right\}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_T} \frac{1}{\lambda - \sqrt{z}} R_z(T)\, dz\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_T'} \frac{1}{-\sqrt{\xi}}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_T} \frac{dz}{(\lambda - \sqrt{z})(z - \xi)}\right\} R_\xi(T)\, d\xi \; +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_T} \frac{1}{\lambda - \sqrt{z}}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_T'} \frac{d\xi}{-\sqrt{\xi}(\xi - z)}\right\} R_z(T)\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_T} \frac{R_z(T)\, dz}{(\lambda - \sqrt{z})(-\sqrt{z})} = \frac{1}{\lambda}(R_0 - R_\lambda).$$

При $\lambda = 0$ рівності (12), очевидно, виконуються, що й завершує доведення леми.

Лему 4 доведено.

З леми 4 та теореми 5.8.3 [4, с. 202] випливає таке твердження.

Лема 5. *Визначена співвідношенням* (11) *функція* R_λ *є резольвентою оператора* $T^{1/2}$.

***Доведення теореми* 2.** Внаслідок лем 1, 5 оператор $T^{1/2}$ є замкненим і щільно визначеним, а $\sigma(T^{1/2}) \subset S_T \cup \Gamma_T$. Зафіксуємо таке число ψ, що $\varphi < \psi < \pi/2$, і покладемо $S := \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \lambda \neq 0, \ |\arg\lambda| < \psi\}$. Згідно з означенням секторіального оператора достатньо перевірити, що

$$\exists L > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \setminus S, \quad \lambda \neq 0 : \|R_\lambda\| \leq \frac{L}{|\lambda|}. \tag{13}$$

Нехай $\lambda \in \mathbf{C} \setminus S$, $\lambda \neq 0$. Тоді $\lambda = r_0 \exp\{i\theta\}$, де $r_0 > 0$, $\varphi < \theta < 2\pi - \varphi$. Будемо стягувати криву інтегрування Γ_T у виразі (11) до півосі $t\exp\{i\theta\}$, $t \geq 0$. Аналогічно до [5, с. 145], в результаті отримаємо

$$R_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} \frac{R_{r\exp\{i\theta\}}(T)\exp\{i\theta\}dr}{\lambda - \sqrt{r}\exp\{i(\theta/2 - \pi)\}} - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} \frac{R_{r\exp\{i\theta\}}(T)\exp\{i\theta\}dr}{\lambda - \sqrt{r}\exp\{i(\theta/2)\}} =$$

$$= -\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{r}\, R_{r\exp\{i\theta\}}(T)\exp\{i\theta/2\}dr}{|\lambda|^2\exp\{i\theta\} - r}.$$

Звідси, з урахуванням (7) та нерівності $|1 - s^2\exp\{-i\theta\}| \geq |1 - s^2\exp\{-i\varphi\}|$, $s \geq 0$, випливає

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{M}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{dr}{\sqrt{r}\left||\lambda|^2\exp\{i\theta\} - r\right|} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{M}{|\lambda|}\int_0^{+\infty} \frac{ds}{\left|1 - s^2\exp\{-i\theta\}\right|} \leq \frac{2}{\pi}\frac{M}{|\lambda|}\int_0^{+\infty} \frac{ds}{\left|1 - s^2\exp\{-i\varphi\}\right|} = \frac{L}{|\lambda|},$$

а отже, справджується оцінка (13).

Теорему 2 доведено.

2. Обмежені розв'язки диференціального рівняння 2-го порядку з секторіальним операторним коефіцієнтом. У подальшому вважатимемо, що для секторіального оператора A виконується така умова:

$$\sigma(A) \bigcap i\mathbf{R} = \varnothing.$$

В цьому випадку спектр $\sigma(A)$ оператора A зображується у вигляді $\sigma(A) = \sigma_+(A) \cup \sigma_-(A)$, де $\sigma_+(A)$, $\sigma_-(A)$ — замкнені множини, які розташовані відповідно в правій та лівій півплощинах $\mathbf{C}$, причому множина $\sigma_-(A)$ є обмеженою. Тому згідно з [1, с. 38] простір B розкладається в пряму суму інваріантних відносно оператора A підпросторів $B_\pm$, звуження $A_\pm$ оператора A на $B_\pm$ мають спектри $\sigma_\pm(A)$ відповідно, при цьому A_- — лінійний обмежений оператор, A_+ — секторіальний оператор.

Нехай $P_\pm$ — проектори в B відповідно на підпростори $B_\pm$. Для $f \in \mathfrak{R}$ покладемо $f_\pm(t) = P_\pm f(t)$, $t \in \mathbf{R}$. Тоді відповідні до f обмежені розв'язки рівнянь (2), (3) зображуються у вигляді

$$x(t) = x_+(t) + x_-(t), \qquad x_\varepsilon(t) = x_{\varepsilon,+}(t) + x_{\varepsilon,-}(t), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{14}$$

де $x_\pm$, $x_{\varepsilon\pm}$ — обмежені розв'язки в просторах $B_\pm$ відповідно рівнянь

$$x'_\pm(t) = A_\pm x_\pm(t) + f_\pm(t), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{15}$$

$$\varepsilon x''_{\varepsilon,\pm}(t) + x'_{\varepsilon,\pm}(t) = A_\pm x_{\varepsilon\pm}(t) + f_\pm(t), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{16}$$

Основним результатом цього пункту є таке твердження.

Теорема 3. *Якщо* $\sigma(A) \bigcap i\mathbf{R} = \varnothing$, *то знайдеться таке* $\varepsilon_0 > 0$, *що для довільних* $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $f \in \mathfrak{R}$ *рівняння* (3) *має єдиний обмежений розв'язок.*

З урахуванням зображення (16) для доведення теореми 3 достатньо окремо розглянути випадки $A = A_+$ і $A = A_-$ та застосувати доведені нижче теореми 4 – 6.

Теорема 4. *Припустимо, що* $A = A_+$, $f \in \mathfrak{R}$. *Тоді для кожного* $\varepsilon > 0$ *справджуються такі твердження:*

1) *коректно визначеними є лінійний обмежений оператор* $E(\varepsilon) := (I + 4\varepsilon A)^{-1/2}$ *та секторіальні оператори*

$$E^{-1}(\varepsilon) := (I + 4\varepsilon A)^{1/2}, \quad G_1(\varepsilon) := \frac{1}{2\varepsilon}\left(E^{-1}(\varepsilon) + I\right),$$

$$G_2(\varepsilon) := \frac{1}{2\varepsilon}\left(E^{-1}(\varepsilon) - I\right);$$

2) *диференціальне рівняння* (3) *має обмежений розв'язок* x_ε *вигляду*

$$x_\varepsilon(t) = -E(\varepsilon)\left(u_1(t) + u_2(t)\right), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{17}$$

де

$$u_1(t) := \int_{-\infty}^{t} \exp\{-G_1(\varepsilon)(t-s)\} f(s)ds,$$

$$u_2(t) := \int_{t}^{+\infty} \exp\{G_2(\varepsilon)(t-s)\} f(s)ds.$$

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і покладемо $T := I + 4\varepsilon A$. Відзначимо, що T — секторіальний оператор, для якого справджуються співвідношення (5), (6). Тому твердження 1 теореми 4 є наслідком леми 1 та теореми 2. При цьому спектри операторів $G_k(\varepsilon)$, $k = 1, 2$, розташовані у правій півплощині $\mathbf{C}$.

Внаслідок (7) задана формулою (17) функція x_ε є коректно визначеною, крім того, $\|x_\varepsilon\|_\infty < +\infty$. Перевіримо, що x_ε — розв'язок рівняння (3). Поклавши в (8) послідовно $T = G_k(\varepsilon)$, $k = 1, 2$, і скориставшись рівністю (2) та обмеженістю оператора $E(\varepsilon)$, робимо висновок, що для довільного $t \in \mathbf{R}$ існує

$$x'_\varepsilon(t) = E(\varepsilon)G_1(\varepsilon)u_1(t) - E(\varepsilon)G_2(\varepsilon)u_2(t). \tag{18}$$

Зауважимо, що на $D(E^{-1}(\varepsilon))$ оператор $E(\varepsilon)$ комутує з операторами $G_k(\varepsilon)$, $k = 1, 2$, і

$$E(\varepsilon)G_1(\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon}(E(\varepsilon) + I), \quad E(\varepsilon)G_2(\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon}(I - E(\varepsilon)), \tag{19}$$

тобто звуження операторів $E(\varepsilon)G_k(\varepsilon)$, $k = 1, 2$, на $D(E^{-1}(\varepsilon))$ є обмеженими операторами. Оскільки функції u_1, u_2 діють з $\mathbf{R}$ в $D(E^{-1}(\varepsilon))$, то, аналогічно до (18), для кожного $t \in \mathbf{R}$ існує

$$x''_\varepsilon(t) = -G_1(\varepsilon)E(\varepsilon)G_1(\varepsilon)u_1(t) - G_2(\varepsilon)E(\varepsilon)G_2(\varepsilon)u_2(t) +$$
$$+ \left(G_1(\varepsilon)E(\varepsilon) + G_2(\varepsilon)E(\varepsilon)\right) f(t).$$

Тому з урахуванням (19) одержимо

$$\varepsilon x_\varepsilon''(t) + x_\varepsilon'(t) = f(t) + (I - \varepsilon G_1(\varepsilon))G_1(\varepsilon)E(\varepsilon)u_1(t) -$$
$$- (I + \varepsilon G_2(\varepsilon))G_2(\varepsilon)E(\varepsilon)u_2(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{20}$$

Оскільки на $D(T)$ $(T^{1/2})^2 = T$ (див., наприклад, вправу 3^* [1, с. 34]), то на $D(A)$ $(I - \varepsilon G_1(\varepsilon))G_1(\varepsilon) = -A$, $(I + \varepsilon G_2(\varepsilon))G_2(\varepsilon) = A$, а отже, внаслідок (20), функція x_ε є обмеженим розв'язком рівняння (3).

Теорему 4 доведено.

З наступної теореми випливає єдиність обмеженого розв'язку диференціального рівняння (3), коли $A = A_+$.

Теорема 5. *Якщо* $A = A_+$, *то для довільного* $\varepsilon > 0$ *однорідне диференціальне рівняння*

$$\varepsilon y''(t) + y'(t) = A y(t), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{21}$$

має тільки нульовий обмежений розв'язок.

Доведення. Нехай y — обмежений розв'язок рівняння (21). Тоді визначеною є B-значна функція $u(t; s) := \exp\{-As\} y(t)$, $t \in \mathbf{R}$, $s > 0$, причому $(-A)$ — генератор аналітичної напівгрупи [1, с. 28], а отже, для кожного $t_0 \in \mathbf{R}$ існує подвійна границя $\lim_{t \to t_0, s \to 0+} u(t; s) = y(t_0)$. Оскільки для довільних $t \in \mathbf{R}$, $s > 0$

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u(t; s)}{\partial t^2} + \frac{\partial u(t; s)}{\partial t} = A u(t; s), \qquad \frac{\partial u(t; s)}{\partial s} = -A u(t; s),$$

то u — розв'язок такої задачі Коші для рівняння з частинними похідними:

$$\begin{gathered} \varepsilon u_{tt} + u_t + u_s = \bar{0}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad s > 0, \\ u(t; 0) = y(t), \quad t \in \mathbf{R}. \end{gathered} \tag{22}$$

Застосовуючи до рівностей (22) лінійний неперервний функціонал $f^* : B \to \mathbf{C}$, робимо висновок, що дійсні функції $\operatorname{Re} f^*(u(t; s))$ та $\operatorname{Im} f^*(u(t; s))$ є розв'язками задач Коші вигляду

$$\begin{gathered} \varepsilon v_{tt} + v_t + v_s = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad s > 0, \\ v(t; 0) = g(t), \quad t \in \mathbf{R}, \end{gathered} \tag{23}$$

з початковими умовами $g(t) = \operatorname{Re} f^*(y(t))$ та $g(t) = \operatorname{Im} f^*(y(t))$ відповідно. Таким чином, задача Коші (23), де $g \in C(\mathbf{R})$, $|g|_\infty := \sup\{|g(t)|, \ t \in \mathbf{R}\}$, з урахуванням (7) при $T = A$ має такий неперервний на $\mathbf{R} \times [0; +\infty)$, двічі диференційовний й по t та один раз диференційовний по s на $\mathbf{R} \times (0; +\infty)$ розв'язок v, що

$$\exists C_1 > 0 \ \ \forall s \geq 0 \ \ \forall t \in \mathbf{R} : |v(t; s)| \leq C_1 \exp\{-\delta s\}. \tag{24}$$

Доведемо, що це можливо тільки для $g(t) \equiv 0$, $t \in \mathbf{R}$.

Справді, при фіксованому $L > 0$, використовуючи в (23) заміну змінних $\xi = t - s$, $\eta = -s$, $v(t; s) = w(\xi(t; s), \eta(t; s))$, в області $t \in \mathbf{R}$, $0 < s \leq L$ отримаємо

$$\begin{gathered} w_\eta = \varepsilon w_{\xi\xi}, \quad \xi \in \mathbf{R}, \quad -L < \eta < 0, \\ w(\xi; -L) = v(\xi + L; L), \quad \xi \in \mathbf{R}. \end{gathered} \tag{25}$$

Відомо (див., наприклад, [6, с. 196, 228]), що задача Коші (25) для рівняння теплопровідності має єдиний обмежений розв'язок, який зображується у вигляді

$$w(\xi;\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{\frac{-(\xi-k)^2}{4\varepsilon(\eta+L)}\right\} \frac{v(k+L;L)dk}{\sqrt{\varepsilon(\eta+L)}}, \quad \xi \in \mathbf{R}, \quad \eta > -L.$$

Звідси та з (24) випливає співвідношення

$$|w(t;s)| \le C_1 \exp\{-\delta L\} \quad \forall \xi \in \mathbf{R} \quad \forall \eta > -L.$$

Тому, скориставшись неперервністю v та w, робимо висновок, що $|g|_\infty \le \le C_1 \exp\{-\delta L\}$, оскільки $w(t;0) = v(t;0) = g(t)$, $t \in \mathbf{R}$.

Спрямувавши L до нескінченності, одержимо $|g|_\infty = 0$, а отже, $g(t) \equiv 0$, $t \in \mathbf{R}$.

Оскільки наведені вище міркування є правильними для довільного лінійного неперервного функціонала $f^*: B \to \mathbf{C}$, то $y(t) \equiv \vec{0}$, $t \in \mathbf{R}$.

Теорему 5 доведено.

Перейдемо до аналізу випадку $A = A_-$.

Теорема 6. *Нехай* $A = A_-$. *Тоді існує таке* $\varepsilon_0 > 0$, *що для кожного* $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ *справджуються твердження*:

1) *коректно визначеними є лінійні обмежені оператори*

$$F(\varepsilon) := (I + 4\varepsilon A)^{-1/2}, \quad F^{-1}(\varepsilon) := (I + 4\varepsilon A)^{1/2},$$
$$H_1(\varepsilon) := -\frac{1}{2\varepsilon}\left(F^{-1}(\varepsilon) + I\right), \quad H_2(\varepsilon) := -\frac{1}{2\varepsilon}\left(I - F^{-1}(\varepsilon)\right),$$

причому спектри операторів $H_k(\varepsilon)$, $k = 1, 2$, *розташовані у лівій півплощині* $\mathbf{C}$;

2) *диференціальне рівняння* (3) *має для довільної функції* $f \in C(\mathbf{R}; B)$, $\|f\|_\infty < +\infty$, *єдиний обмежений розв'язок* x_ε. *Цей розв'язок зображується у вигляді*

$$x_\varepsilon(t) = F(\varepsilon) \times$$
$$\times \left(-\int_{-\infty}^{t} \exp\{H_1(\varepsilon)(t-s)\} f(s)ds + \int_{-\infty}^{t} \exp\{H_2(\varepsilon)(t-s)\} f(s)ds \right), \quad t \in \mathbf{R}. \quad (26)$$

Доведення. Оскільки $A = A_-$, то існує таке $\nu > 0$, для якого

$$\sigma(A) \subset V := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < \|A\| + 1, \ \operatorname{Re} z < -\nu\}. \quad (27)$$

Зафіксуємо таке $\varepsilon_0 > 0$, щоб $4\varepsilon_0(\|A\| + 1)^2 < \min\{1; \nu/2\}$. Зауважимо, що для довільних $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $z \in (V \cup \partial V)$ справджуються нерівності

$$\operatorname{Re}(1 + 4\varepsilon z) > 0, \quad \left|\frac{\sqrt{1+4\varepsilon z} - 1}{2\varepsilon} - z\right| < \frac{\nu}{2}. \quad (28)$$

Тому коректно визначеними як функції від оператора A [7, с. 455] є лінійні неперервні оператори $F(\varepsilon)$, $F^{-1}(\varepsilon)$, $H_k(\varepsilon)$, $k = 1, 2$, причому згідно з теоремою Данфорда про відображення спектра

$$\sigma(H_1(\varepsilon)) \subset \left\{z \in \mathbf{C} \,\middle|\, \operatorname{Re} z < -\frac{1}{2\varepsilon}\right\},$$

а внаслідок (27), (28)

$$\sigma(H_2(\varepsilon)) \subset \left\{\frac{\sqrt{1+4\varepsilon z} - 1}{2\varepsilon} \,\middle|\, z \in (V \cup \partial V)\right\} \subset \left\{z \in \mathbf{C} \,\middle|\, \operatorname{Re} z < -\frac{\nu}{2}\right\}. \quad (29)$$

Отже, твердження 1 теореми 6 доведено.

Скориставшись відомими властивостями експоненти від лінійного обмеженого оператора зі спектром у лівій півплощині $\mathbf{C}$ (див., наприклад, [8]), неважко перевірити, що при фіксованому $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ інтеграли з формули (26) абсолютно збігаються, а визначена цією формулою функція x_ε є розв'язком диференціального рівняння (3). Єдиність такого розв'язку випливає з того, що для кожного $\lambda \in i\mathbf{R}$ оператор $(\varepsilon\lambda^2 + \lambda)I - A$ має неперервний обернений оператор. Отже, до еквівалентного рівнянню (3) диференціального рівняння першого порядку

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} O & L \\ \dfrac{A}{\varepsilon} & -\dfrac{I}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \dfrac{f(t)}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

в якому $u(t) := x'(t)$, у просторі B^2 з нормою $\|(u_1; u_2)'\|_2 := \|u_1\| + \|u_2\|$, $(u_1; u_2)' \in B^2$, можна застосувати теорему, яку одержав М. Г. Крейн [8, с. 119].

Теорему 6 доведено.

3. Рівномірна збіжність на R обмежених розв'язків диференціальних рівнянь (3) до обмеженого розв'язку рівняння (2) при $\varepsilon \to 0+$. Основним результатом цього пункту є таке твердження.

Теорема 7. *Нехай $\sigma(A) \bigcap i\mathbf{R} = \varnothing$. Якщо для фіксованого $f \in \mathfrak{R}$ x — відповідний до f єдиний обмежений розв'язок рівняння* (2), *x_ε — відповідний до f єдиний обмежений розв'язок рівняння* (3) *при $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, то виконується твердження* (4).

Доведення. Скориставшись рівностями (14), (15), неважко перевірити, що доданки $x_\pm$ єдиного обмеженого розв'язку x рівняння (2) мають такий вигляд:

$$x_-(t) := \int_{-\infty}^{t} \exp\{A_-(t-s)\} f_-(s)ds,$$
$$x_+(t) := -\int_{t}^{+\infty} \exp\{A_+(t-s)\} f_+(s)ds. \tag{30}$$

Тому для доведення теореми 7 достатньо окремо розглянути випадки $A = A_+$ та $A = A_-$.

Нехай $A = A_+$. З урахуванням (17) для перевірки правильності твердження (4) необхідно переконатися, що

$$a(\varepsilon) := \sup_{t \in \mathbf{R}} \left\| \int_{-\infty}^{t} E(\varepsilon) \exp\{-G_1(\varepsilon)(t-s)\} f(s)ds \right\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0+, \tag{31}$$

$$b(\varepsilon) := \sup_{t \in \mathbf{R}} \left\| \int_{t}^{+\infty} (E(\varepsilon)\exp\{G_2(\varepsilon)(t-s)\} - \exp\{A(t-s)\}) f(s)ds \right\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{32}$$

Спочатку доведемо твердження (31). В подальшому будемо вважати, що $A = T$, і застосовувати позначення з пункту 1. На підставі леми 2 за допомогою міркувань, які були використані при доведенні леми 4, робимо висновок, що для кожного $t > 0$

$$E(\varepsilon)\exp\{-G_1(\varepsilon)t\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_T} \exp\left\{-\frac{t}{2\varepsilon}(\sqrt{1+4\varepsilon z} + 1)\right\} \frac{R_z(T)dz}{\sqrt{1+4\varepsilon z}}. \tag{33}$$

Внаслідок (6), (33) одержимо нерівності

$$a(\varepsilon) \leq$$

$$\leq \sup_{t \in \mathbf{R}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left\{-\frac{t-s}{2\varepsilon}\right\}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_T}\left|\frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon z}}\exp\left\{-\frac{t-s}{2\varepsilon}\sqrt{1+4\varepsilon z}\right\}\right|\| R_z(T)\| |dz|\right)\| f(s)\| ds \leq$$

$$\leq \frac{M\| f\|_\infty}{2\pi}\int_{-\infty}^{t}\exp\left\{-\frac{k}{2\varepsilon}\right\}\left(\int_{\Gamma_T} h_1(z;k;\varepsilon)|dz|\right)dk, \qquad (34)$$

де

$$h_1(z;k;\varepsilon) := \frac{1}{\left|z\sqrt{1+4\varepsilon z}\right|}\exp\left\{-\frac{k}{2\varepsilon}\mathrm{Re}\sqrt{1+4\varepsilon z}\right\}, \quad z \in \Gamma_T, \quad k>0, \quad \varepsilon>0.$$

Зауважимо, що $\Gamma_T = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, де $\gamma_1 := \{\tau + i\tau \operatorname{tg}\varphi : \tau \geq \delta\}$, $\gamma_2 := \{\delta + i\tau : |\tau| \leq \delta \operatorname{tg}\varphi\}$, $\gamma_3 := \{\tau - i\tau \operatorname{tg}\varphi : \tau \geq \delta\}$. Оскільки при $p>0$ $\mathrm{Re}\sqrt{p+iq} \geq \sqrt{p}$, то

$$\mathrm{Re}\sqrt{1+4\varepsilon z} \geq \sqrt{1+4\varepsilon \mathrm{Re}\, z} > 1 \quad \forall z \in \Gamma_T \quad \forall \varepsilon > 0. \qquad (35)$$

Тому для довільних $z \in \gamma_2$, $k>0$, $\varepsilon>0$ виконується $h_1(z;k;\varepsilon) \leq 1/\delta$, звідки

$$\int_{\gamma_2} h_1(z;k;\varepsilon)|dz| \leq 2 \operatorname{tg}\varphi. \qquad (36)$$

Якщо $z \in \gamma_1 \cup \gamma_3$, $\mathrm{Re}\, z = \tau$, $k>0$, $\varepsilon>0$, то у відповідності з (35) отримаємо $h_1(z;k;\varepsilon) \leq \left(\tau\sqrt{1+4\varepsilon\tau}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\right)^{-1}$, а отже,

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_3} h_1(z;k;\varepsilon)|dz| \leq 2\int_{\delta}^{+\infty}\frac{d\tau}{\tau\sqrt{1+4\varepsilon\tau}} = 2\ln\left(\frac{\sqrt{1+4\varepsilon\delta}+1}{\sqrt{1+4\varepsilon\delta}-1}\right). \qquad (37)$$

Підставляючи (36), (37) в (34), робимо висновок, що

$$\exists L_1 > 0 \quad \exists \varepsilon_1 > 0 : a(\varepsilon) \leq L_1 \varepsilon \ln\frac{1}{\varepsilon}, \quad 0<\varepsilon<\varepsilon_1, \qquad (38)$$

звідки випливає правильність (31).

Перевіримо твердження (32). Зауважимо, що аналогічно до (34),

$$b(\varepsilon) \leq \frac{M\| f\|_\infty}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{\Gamma_T}\left|\frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon z}}\exp\left\{\frac{-2kz}{1+\sqrt{1+4\varepsilon z}}\right\}-\exp\{-kz\}\right|\frac{|dz|}{|z|}\right)dk \leq$$

$$\leq \frac{M\| f\|_\infty}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{\Gamma_T}(h_2(z;k;\varepsilon)+h_3(z;k;\varepsilon))|dz|\right)dk, \qquad (39)$$

де

$$h_2(z;k;\varepsilon) := \frac{4\varepsilon\exp\{-k\,\mathrm{Re}\, z\}}{\left|\sqrt{1+4\varepsilon z}\left(\sqrt{1+4\varepsilon z}+1\right)\right|},$$

$$h_3(z;k;\varepsilon) := \frac{1}{\left|z\sqrt{1+4\varepsilon z}\right|}\left|\exp\left\{\frac{-2kz}{1+\sqrt{1+4\varepsilon z}}\right\}-\exp\{-kz\}\right|,$$

$$z \in \Gamma_T, \quad k>0, \quad \varepsilon>0.$$

Зафіксуємо $k > 0$, $\varepsilon > 0$. Внаслідок (35) для кожного $z \in \gamma_2$ одержимо $h_2(z; k; \varepsilon) \le 2\varepsilon\exp\{-k\delta\}$. Якщо ж $z \in \gamma_2 \cup \gamma_3$, $\operatorname{Re} z = \tau$, то $h_2(z; k; \varepsilon) \le \le 4\varepsilon\exp\{-k\tau\}(1 + 4\varepsilon\tau)^{-1}$. Звідси випливає

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_{\Gamma_T} h_2(z; k; \varepsilon)|dz|\right)dk \le 4\varepsilon\operatorname{tg}\varphi + 8\varepsilon\cos\varphi\int_0^{+\infty}\frac{d\tau}{\tau(1+4\varepsilon\tau)} =$$

$$= 4\varepsilon\left(\operatorname{tg}\varphi + 2\cos\varphi\ln\left(\frac{1+4\varepsilon\delta}{4\varepsilon\delta}\right)\right). \tag{40}$$

Для оцінки функції h_3 використаємо таку нерівність, яка доводиться елементарно:

$$\forall\lambda,\ \mu \in \mathbf{C},\quad \operatorname{Re}\lambda > 0,\quad \operatorname{Re}\mu > 0 : |\exp\{-\lambda\} - \exp\{-\mu\}| \le$$
$$\le 4|\lambda - \mu|\exp\{-\min\{\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\mu\}\}. \tag{41}$$

Оскільки функція

$$g(z; \varepsilon) := \min\left\{\operatorname{Re} z, \operatorname{Re}\frac{2z}{\sqrt{1+4\varepsilon z}+1}\right\}$$

на компактній множині $\gamma_2 \times [0; 1]$ є неперервною і набуває тільки додатних значень, то існує $m := \min\{g(z; \varepsilon) \mid (z; \varepsilon) \in \gamma_2 \times [0; 1]\} > 0$. Тому з урахуванням (41), (35) для довільних $\varepsilon \in (0; 1]$, $k > 0$, $z \in \gamma_2$ справджується нерівність

$$h_3(z; k; \varepsilon) \le \frac{4\exp\{-mk\}}{|z|}\left|\frac{2kz}{\sqrt{1+4\varepsilon z}+1} - kz\right| \le \frac{4\varepsilon\delta k\exp\{-mk\}}{\cos\varphi},$$

звідки

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_{\gamma_2} h_3(z; k; \varepsilon)|dz|\right)dk \le \frac{8\varepsilon\delta^2\operatorname{tg}\varphi}{m^2\cos\varphi}. \tag{42}$$

Знову зафіксуємо $k > 0$, $\varepsilon > 0$ та покладемо $\rho := \dfrac{\operatorname{tg}\varphi - 1}{2\varepsilon}$. Користуючись рівністю $\operatorname{Re}\sqrt{\lambda} = \sqrt{\left(\sqrt{\xi^2+\zeta^2}+\xi\right)/2}$, $\lambda = \xi + i\zeta \in \mathbf{C}$, та збільшуючи, якщо потрібно, значення $\varphi \in (0; \pi/2)$ так, щоб виконувалася нерівність $\operatorname{tg}\varphi > 9$, неважко довести, що

$$\forall z \in \gamma_1 \cup \gamma_3,\quad \operatorname{Re} z \ge \rho : \operatorname{Re}(kz) \ge \operatorname{Re}\left(\frac{k}{2\varepsilon}(\sqrt{1+4\varepsilon z}-1)\right) \ge \frac{k}{2\sqrt{\varepsilon}}\operatorname{Re}\sqrt{z},$$

$$\forall z \in \gamma_1 \cup \gamma_3,\quad \delta \le \operatorname{Re} z < \rho : \operatorname{Re}(kz) \le \operatorname{Re}\left(\frac{k}{2\varepsilon}(\sqrt{1+4\varepsilon z}-1)\right).$$

Тому, застосовуючи нерівності (41), (35), одержуємо

$$\forall z \in \gamma_1 \cup \gamma_3,\quad \operatorname{Re} z = \tau : h_3(z; k; \varepsilon) \le \frac{16\varepsilon k\tau q(\tau; k; \varepsilon)}{\sqrt{1+4\varepsilon\tau}(\sqrt{1+4\varepsilon\tau}+1)^2\cos\varphi},$$

де

$$q(\tau; k; \varepsilon) = \exp\{-k\tau\},\quad \tau \in [\delta; \rho];\qquad q(\tau; k; \varepsilon) = \exp\left\{-\frac{k\sqrt{\tau}}{2\sqrt{\varepsilon}}\right\},\quad \tau \ge \rho.$$

Звідси випливає

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_{\gamma_1\cup\gamma_3} h_3(z;k;\varepsilon)|dz|\right)dk \le$$

$$\le \frac{32\varepsilon}{\cos^2\varphi}\left(\int_0^{+\infty}\left(\int_\delta^{+\infty} k\exp\{-k\tau\}dk\right)\frac{\tau\, d\tau}{\sqrt{1+4\varepsilon\tau}\left(\sqrt{1+4\varepsilon\tau}+1\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\int_\rho^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} k\exp\left\{\frac{k\sqrt{\tau}}{2\sqrt{\varepsilon}}\right\}dk\right)\frac{\tau\, d\tau}{\sqrt{1+4\varepsilon\tau}\left(\sqrt{1+4\varepsilon\tau}+1\right)^2}\right) \le$$

$$\le \frac{32\varepsilon}{\cos^2\varphi}\left(\int_{4\varepsilon\delta}^{+\infty}\frac{du}{u(u+1)}+\int_{2(tg\varphi-1)}^{+\infty}\frac{du}{(1+u)^{3/2}}\right).$$

Внаслідок виконання (39), (40), (42), (43)

$$\exists L_2>0 \quad \exists \varepsilon_2\in(0;1): b(\varepsilon)\le L_2\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}, \quad 0<\varepsilon<\varepsilon_2.$$

Таким чином, твердження (32), а отже і твердження теореми 7 при $A =$ доведено.

Нехай $A=A_-$. З огляду на (26), (30) для доведення твердження (4) дост нью переконатися, що

$$c(\varepsilon) := \sup_{t\in\mathbf{R}}\left\|\int_{-\infty}^t F(\varepsilon)\exp\{H_1(\varepsilon)(t-s)\}f(s)ds\right\|\to 0, \quad \varepsilon\to 0+,$$

$$d(\varepsilon) := \sup_{t\in\mathbf{R}}\left\|\int_{-\infty}^t \left(F(\varepsilon)\exp\{H_2(\varepsilon)(t-s)\}-\exp\{A(t-s)\}\right)f(s)ds\right\|\to 0, \quad \varepsilon\to 0$$

Доведемо твердження (45). Нехай γ позначає границю множини V, визначена співвідношенням (27). Аналогічно до (34), згідно з (28) при $\varepsilon\in$ $\varepsilon_0]$ отримуємо

$$c(\varepsilon)\le$$

$$\le \sup_{t\in\mathbf{R}}\int_{-\infty}^t \exp\left\{-\frac{t-s}{2\varepsilon}\right\}\left(\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\left|\frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon z}}\exp\left\{-\frac{t-s}{2\varepsilon}\sqrt{1+4\varepsilon z}\right\}\right|\|R_z(A)\||dz|\right)\|f(s)\|ds$$

$$\le \frac{\|f\|_\infty}{2\pi}\int_0^{+\infty}\exp\left\{-\frac{k}{2\varepsilon}\right\}\left(\int_\gamma h_4(z;\varepsilon)|dz|\right)dk,$$

де $h_4(z;\varepsilon) := \|R_z(A)\|\left|(1+4\varepsilon z)^{-1/2}\right|$ — неперервна, а отже, обмежена функція компактній множині $\gamma\times[0;\varepsilon_0]$. Тому

$$\exists L_3>0: c(\varepsilon)\le L_3\varepsilon, \quad 0<\varepsilon<\varepsilon_0,$$

тобто справджується твердження (45).

Перевіримо правильність твердження (46). Аналогічно до (39),

$$d(\varepsilon)\le\frac{\|f\|_\infty}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_\gamma\left(h_5(z;k;\varepsilon)+h_6(z;k;\varepsilon)\right)|dz|\right)dk,$$

де

$$h_5(z;k;\varepsilon) := \frac{4\varepsilon|z|\exp\{k\operatorname{Re}z\}\|R_z(A)\|}{\left|\sqrt{1+4\varepsilon z}\left(\sqrt{1+4\varepsilon z}+1\right)\right|},$$

$$h_6(z;k;\varepsilon) := \frac{\|R_z(A)\|}{|\sqrt{1+4\varepsilon z}|}\left|\exp\left\{\frac{2kz}{1+\sqrt{1+4\varepsilon z}}\right\}-\exp\{kz\}\right|,$$

$$z\in\gamma, \quad k>0, \quad \varepsilon\in(0;\varepsilon_0].$$

Оскільки неперервна функція, яка визначена на компактній множині, є обмеженою на цій множині і для кожного $z\in\gamma$ справджується нерівність $\operatorname{Re}z\leq\leq-\nu$, то

$$\exists L_4>0 \quad \forall z\in\gamma, \quad k>0, \quad \varepsilon\in(0;\varepsilon_0]: h_5(z;k;\varepsilon) \leq L_4\varepsilon\exp\{-\nu k\}. \tag{49}$$

З урахуванням (41), (29) при $z\in\gamma$, $k>0$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$

$$h_6(z;k;\varepsilon)\leq\frac{4k|z|\|R_z(A)\|}{|\sqrt{1+4\varepsilon z}|}\left|\frac{2}{1+\sqrt{1+4\varepsilon z}}-1\right|\exp\left\{\max\left\{\operatorname{Re}kz, \operatorname{Re}\frac{2kz}{1+\sqrt{1+4\varepsilon z}}\right\}\right\}\leq$$

$$\leq \frac{16\varepsilon k|z|^2\|R_z(A)\|\exp\{-k\nu/2\}}{\left|\sqrt{1+4\varepsilon z}\left(\sqrt{1+4\varepsilon\tau}+1\right)^2\right|},$$

звідки отримуємо таку оцінку:

$$\exists L_5>0 \quad \forall z\in\gamma, \quad k>0, \quad \varepsilon\in(0;\varepsilon_0]: h_6(z;k;\varepsilon) \leq L_5\varepsilon k\exp\{-k\nu/2\}. \tag{50}$$

Підставляючи (49), (50) в (48), робимо висновок, що

$$\exists L_6>0: d(\varepsilon)\leq L_6\varepsilon, \quad 0<\varepsilon<\varepsilon_0, \tag{51}$$

а отже, виконується твердження (46).

Теорему 7 доведено.

Наслідок. *Якщо виконуються умови теореми 7, то*

$$\|x_\varepsilon - x\|_\infty = O\left(\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon\to 0+.$$

Доведення випливає з оцінок (38), (44), (47), (51).

1. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
2. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Киев: Выща шк., 1992. – 319 с.
3. *Дороговцев А. Я.* Устойчивость стационарных решений // Докл. РАН. – 1999. – **369**, № 3. – С. 309–310.
4. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.
5. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
7. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 592 с.
8. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.

Одержано 07.02.2002