УДК 517.5

А. П. Голуб (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ МОМЕНТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

We establish conditions for the existence of generalized moment representations proposed by V. K. Dzyadyk in 1981.

Встановлено умови існування узагальнених моментних зображень, запропонованих В. К. Дзядиком у 1981 р.

В 1981 г. В. К. Дзядык [1] ввел понятие обобщенных моментных представлений числовых последовательностей, которое оказалось весьма полезным для решения задач построения и исследования поведения аппроксимаций Паде многих элементарных и специальных функций [2, 3]. Сформулируем соответствующее определение.

Определение 1. *Будем говорить, что для последовательности комплексных чисел* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ *построено обобщенное моментное представление на произведении линейных пространств* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$, *если известны последовательности* $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathfrak{X}$, $\{y_j\}_{j=0}^{\infty} \subset \mathfrak{Y}$ *и билинейная форма* $\langle\cdot,\cdot\rangle$, *определенная на* $\mathfrak{X} \times \times \mathfrak{Y}$, *такие что для всех* $k, j = \overline{0, \infty}$ *справедливы равенства*

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle. \tag{1}$$

В случае, когда в пространстве $\mathfrak{X}$ существует линейный оператор $A : \mathfrak{X} \to \to \mathfrak{X}$ такой, что

$$Ax_k = x_{k+1}, \quad k = \overline{0, \infty},$$

а в пространстве $\mathfrak{Y}$ существует линейный оператор $A^*: \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}$ такой, что

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \quad \forall x \in \mathfrak{X}, \quad \forall y \in \mathfrak{Y}$$

(будем называть оператор A^* *сопряженным* к оператору A относительно билинейной формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$), представление (1) можно записать в виде

$$s_k = \langle A^k x_0, y_0 \rangle, \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{2}$$

При этом, если пространства $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ являются нормированными и в некоторой области $\mathfrak{D} \in \mathbb{C}$, содержащей начало координат, равномерно сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} z^k A^k x_0$, производящая функция f последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$, определяемая рядом $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$, будет иметь представление

$$f(z) = \langle R_z^{\#}(A) x_0, y_0 \rangle, \tag{3}$$

где $R_z^{\#}(A) = (I - zA)^{-1}$, I — тождественный в $\mathfrak{X}$ оператор.

Легко видеть, что если $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathcal{L}_2[\Delta, d\mu]$ — гильбертово пространство функций, суммируемых с квадратом по мере $d\mu$ на борелевском множестве $\Delta \subset \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = \int_{\Delta} x(t) y(t) d\mu(t)$, а в качестве элементов x_k и y_j выбраны степенные функции $x_k(t) = y_k(t) = t^k$, $k = \overline{0, \infty}$, то представление (1) эквивалентно классической проблеме моментов на Δ (см., например, [4]). Как известно, для разрешимости классической проблемы моментов с неубывающей функцией μ, имеющей бесконечное число точек роста, необходимым условием является положительность определителей Ганкеля

$$H_N = \det\left\| s_{k+j} \right\|_{k,j=0}^{N} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_N \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{N+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_N & s_{N+1} & \ldots & s_{2N} \end{vmatrix} > 0, \quad N = \overline{0, \infty}.$$

При этом если ввести оператор A, действующий в $\mathcal{L}_2[\Delta, d\mu]$ по правилу

$$(Ax)(t) = tx(t),$$

то с учетом введенных обозначений представление (3) примет вид

$$f(z) = \int\limits_{\Delta} \frac{d\mu(t)}{1 - zt}.$$

Функции, имеющие такие представления, называются *марковскими* функциями.

Вместе с тем, множество последовательностей, имеющих представления вида (1), (2), а соответственно и функций, представимых в виде (3), не ограничивается случаем классической проблемы моментов. Приведем соответствующие примеры.

***Пример* 1.** В пространстве непрерывных на отрезке $[0; 1]$ функций $\mathcal{X} = C[0; 1]$ рассмотрим линейный ограниченный оператор A, действующий по правилу

$$(A\varphi)(t) = \int\limits_0^t \varphi(t)d\tau,$$

для которого

$$(R_z^{\#}(A)\varphi)(t) = \varphi(t) + z\int\limits_0^t \varphi(\tau)e^{z(t-\tau)}d\tau.$$

В этом случае степени оператора A можно записать в виде

$$(A^k\varphi)(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\varphi(\tau)d\tau, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

Положим $x_0(t) \equiv 1$, $y_0(t) \equiv 1$, $\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt$. Тогда

$$s_k = \langle A^k x_0, y_0\rangle = \int\limits_0^1 (A^k x_0)(t)dt = \int\limits_0^1 \frac{t^k}{k!}dt = \frac{1}{(k+1)!},$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \frac{e^z - 1}{z}.$$

Обобщенное моментное представление имеет вид

$$s_{k+j} = \frac{1}{(k+j+1)!} = \int\limits_0^1 \frac{t^k}{k!}\frac{(1-t)^j}{j!}dt, \quad k, j = \overline{0, \infty}.$$

Поскольку полученная функция f является целой и отлична от алгебраического многочлена, то для соответствующей последовательности классическая проблема моментов неразрешима (см. п. 4° § 2 гл. VII [5]).

Пример 2. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{X} = C[0;1]$ оператор A, действующий по правилу

$$(A\varphi)(t) = \varkappa\int_0^t \varphi(\tau)d\tau + t\varphi(t),$$

который является линейной комбинацией оператора интегрирования, рассмотренного в предыдущем примере, и оператора умножения на независимую переменную, соответствующего классической степенной проблеме моментов на сегменте $[0;1]$. Тогда, решая соответствующее линейное интегральное уравнение, получаем

$$(R_z^{\#}(A)\varphi)(t) = \left((I - zA)^{-1}\varphi\right)(t) = \frac{\varphi(t)}{1-zt} + \varkappa z\int_0^t \varphi(t)\frac{(1-\tau z)^{\varkappa-1}}{(1-tz)^{\varkappa+1}}d\tau.$$

Поскольку в окрестности нуля $R_z^{\#}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k A^k$, то, раскладывая предыдущее равенство по степеням z, находим, что степени оператора A действуют по правилам

$$(A^k\varphi)(t) = \varkappa\int_0^t \varphi(\tau)\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(-\varkappa+1)_m(\varkappa+1)_{k-1-m}}{m!(k-m-1)!}\tau^m t^{k-m-1}d\tau + t^k\varphi(t), \quad k = \overline{1,\infty},$$

где через $(\alpha)_k$ обозначен символ Похгаммера:

$$(\alpha)_k := \begin{cases}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1) & \text{при} \quad k \ge 1;\\ 1 & \text{при} \quad k = 0.\end{cases}$$

Положим $x_0(t) \equiv 1$, $y_0(t) \equiv 1$, $\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt$. Тогда

$$f(z) = \int_0^1 (R_z^{\#}(A)x_0)(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{(1-zt)^{\varkappa+1}}dt = \frac{(1-z)^{-\varkappa}-1}{\varkappa z}.$$

Учитывая интегральное представление для гипергеометрической функции Гаусса (см. п. 15.3.1 [5])

$$f(z) = \frac{(1-z)^{-\varkappa}-1}{\varkappa z} = {}_2F_1(1, \varkappa+1; 2; z) = \int_0^1 \frac{1}{1-zt}\frac{t^{\varkappa}(1-t)^{-\varkappa}}{\Gamma(\varkappa+1)\Gamma(-\varkappa+1)}dt,$$

видим, что при $|\varkappa| < 1$ полученная функция является марковской. Предположим, что так будет и при других значениях $\varkappa$, т. е.

$$f(z) = \frac{(1-z)^{-\varkappa}-1}{\varkappa z} = \int_\Delta \frac{d\mu(t)}{1-zt}.$$

Тогда

$$(1-z)^{-\varkappa} = 1 + \varkappa z\int_\Delta \frac{d\mu(t)}{1-zt},$$

откуда при $z = iy$, $y \in \mathcal{R}$, получаем

$$(1+y^2)^{-\varkappa/2}\left\{\sin\left(\varkappa\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right) + i\cos\left(\varkappa\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)\right\} =$$

$$= 1 - \varkappa y^2\int_\Delta \frac{t\,d\mu(t)}{1+t^2y^2} + i\varkappa y\int_\Delta \frac{d\mu(t)}{1+t^2y^2}.$$

Сравнивая поведение мнимых частей при $y \to \infty$, делаем вывод, что $-1 \le \kappa \le 1$. Таким образом, полученная функция при $|\kappa| > 1$ марковской не является. При этом обобщенное моментное представление имеет вид

$$s_{k+j} = \frac{(\kappa+1)_{k+j}}{(k+j+1)!} = \int_0^1 \frac{(\kappa+1)_k t^k}{k!} \sum_{m=0}^{j} \frac{(-\kappa+1)_m (\kappa)_{j-m}}{m!(j-m)!} t^m dt, \quad k, j = \overline{0, \infty}.$$

С учетом этого важным является вопрос об условиях существования представлений вида (1). Автором и В. К. Дзядыком [2] был установлен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{H}$ — бесконечномерное гильбертово пространство и $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ — произвольная ортонормированная последовательность в нем. Тогда для того чтобы числовая последовательность $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ имела в $\mathcal{H}$ обобщенное моментное представление вида*

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty}, \tag{4}$$

где

$$\langle x, y \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (x, e_m)(y, e_m),$$

элементы x_k, $k = \overline{0, \infty}$, и y_j, $j = \overline{0, \infty}$, имеют вид

$$x_k = \sum_{m=0}^{k} \alpha_m^{(k)} e_m, \qquad y_j = \sum_{m=0}^{j} \beta_m^{(j)} e_m \tag{5}$$

и при этом $\alpha_k^{(k)} \ne 0$, $k = \overline{0, \infty}$, $\beta_j^{(j)} \ne 0$, $j = \overline{0, \infty}$, необходимо и достаточно, чтобы все определители Ганкеля

$$H_N := H_{0,N} = \det \left\| s_{k+j} \right\|_{k,j=0}^{N}$$

последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ были отличными от 0.

Доказательство. Предположим, что представление (4) существует. Тогда

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{k} \alpha_m^{(k)} e_m, \sum_{m=0}^{j} \beta_m^{(j)} e_m \right\rangle = \sum_{m=0}^{\min\{k,j\}} \alpha_m^{(k)} \beta_m^{(j)}, \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{6}$$

Рассмотрим при каждом $N = \overline{0, \infty}$ две треугольные матрицы

$$A_N = \begin{pmatrix} \alpha_0^{(0)} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_0^{(1)} & \alpha_1^{(1)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0^{(N)} & \alpha_1^{(N)} & \dots & \alpha_N^{(N)} \end{pmatrix} \tag{7}$$

и

$$B_N = \begin{pmatrix} \beta_0^{(0)} & \beta_0^{(1)} & \dots & \beta_0^{(N)} \\ 0 & \beta_1^{(1)} & \dots & \beta_1^{(N)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_N^{(N)} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Несложно заметить, что, если ввести матрицы

$$S_N = \left\| s_{k+j} \right\|_{k,\,j=0}^{N} = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_N \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{N+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_N & s_{N+1} & \dots & s_{2N} \end{pmatrix}, \quad N = \overline{0, \infty},$$

равенства (6) равносильны равенствам

$$S_N = A_N B_N, \quad N = \overline{0, \infty}, \tag{9}$$

и, следовательно,

$$H_N = \det S_N = \det A_N \det B_N = \prod_{k=0}^{N} \alpha_k^{(k)} \prod_{j=0}^{N} \beta_j^{(j)} \neq 0.$$

Чтобы доказать достаточность условий теоремы, примем во внимание, что в силу теоремы 1 § 4 гл. II [7] любую невырожденную матрицу (и, в частности, невырожденные согласно условиям теоремы матрицы S_N, $N = \overline{0, \infty}$) можно представить в виде произведения нижней треугольной матрицы на верхнюю треугольную матрицу. Выберем числа $\alpha_k^{(k)}$, $k = \overline{0, \infty}$, и $\beta_j^{(j)}$, $j = \overline{0, \infty}$, таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\alpha_0^{(0)} \beta_0^{(0)} = H_0, \quad \alpha_1^{(1)} \beta_1^{(1)} = \frac{H_1}{H_0}, \dots, \quad \alpha_N^{(N)} \beta_N^{(N)} = \frac{H_N}{H_{N-1}}, \dots,$$

и положим

$$\alpha_k^{(m)} = \alpha_k^{(k)} \frac{S_N \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k-1 & m \\ 0 & 1 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix}}{H_k}, \quad k = \overline{0, m}, \quad m = \overline{0, \infty},$$

$$\beta_j^{(m)} = \beta_j^{(j)} \frac{S_N \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & j-1 & j \\ 0 & 1 & \dots & j-1 & m \end{pmatrix}}{H_j}, \quad j = \overline{0, m}, \quad m = \overline{0, \infty},$$

где через $S_N \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_r \\ q_1 & q_2 & \dots & q_r \end{pmatrix}$ обозначены миноры матрицы S_N, расположенные на пересечении строк с номерами $0 \le p_1 < \dots < p_r \le N$ и столбцов с номерами $0 \le q_1 < \dots < q_r \le N$, т. е.

$$S_N \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_r \\ q_1 & q_2 & \dots & q_r \end{pmatrix} = \det \left\| s_{p_k + q_j} \right\|_{k,\,j=0}^{r}.$$

Тогда при каждом $N = \overline{0, \infty}$ получим представление (9) с треугольными матрицами A_N и B_N, имеющими вид (7) и (8). По так выбранным числам $\alpha_k^{(m)}$ и $\beta_j^{(m)}$ с помощью равенств (5) зададим векторы x_k и y_j. Поскольку для соответствующих матриц (7) и (8) справедливы равенства (9), которые, как уже отмечалось, равносильны равенствам (4), тем самым доказана достаточность условий теоремы 1.

***Замечание* 1.** Поскольку отличие от нуля определителя Ганкеля H_{N-1} последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ является необходимым условием существования и невырожденности аппроксиманты Паде $[N-1/N]_f(z)$ функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z_k$ (см. часть 1 теоремы 1.1.2 [8]), утверждение теоремы означает, что если существуют и невырождены аппроксиманты Паде порядков $[N-1/N]$, $N \geq 1$, функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$, то обобщенные моментные представления последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ могут быть построены.

***Замечание* 2.** Из доказательства теоремы 1 можно сделать вывод, что при выполнении ее условий обобщенные моментные представления могут быть построены неоднозначно даже в случае, когда пространство $\mathcal{H}$, ортонормированная последовательность $\{e_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ и вид (6) элементов x_k, $k = \overline{0,\infty}$, и y_j, $j = \overline{0,\infty}$, фиксированы.

Перейдем к нахождению условий существования представлений вида (2) и (3). Из утверждения, полученного Д. З. Аровым (см. предложение 1 [9]), следует, в частности, что для произвольной функции f, аналитической в круге $K_R = \{z : |z| \leq R\}$, $0 < R < \infty$, и произвольного бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ существуют элементы x_0, $y_0 \in \mathcal{H}$ и линейный ограниченный оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, норма которого меньше $1/R$ и такой, что

$$f(z) = (R_z^{\#}(A)x_0, y_0) \quad \forall z \in K_R. \tag{10}$$

Как отметил М. Л. Горбачук, аналогичное утверждение можно получить также из интегральной формулы Коши.

***Замечание* 3.** В указанных построениях линейный оператор определяется только радиусом круга аналитичности, но не зависит от самой функции f, в связи с чем для наборов функций $\{f_\lambda\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$, аналитических в круге K_R, можно построить представления вида

$$f_\lambda(z) = (R_z^{\#}(A)x_0, y_0^{(\lambda)}),$$

что является существенным при изучении совместных аппроксимаций Паде наборов $\{f_\lambda\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$ (см., например, [10]).

Аналогичный результат справедлив и для целых функций.

Теорема 2. *Для произвольной целой функции f и произвольного бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ существуют элементы x_0, $y_0 \in \mathcal{H}$ и линейный ограниченный оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ с нулевым спектральным радиусом такой, что*

$$f(z) = (R_z^{\#}(A)x_0, y_0) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть функция f представима степенным рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k.$$

Из условий теоремы следует, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|s_k|} = 0.$$

Отсюда делаем вывод, что можно выбрать монотонно убывающую к нулю последовательность положительных чисел $\{\delta_k\}_{k=0}^{\infty}$ такую, что

$$\sqrt[k]{|s_k|} \leq \delta_k \quad \forall\, k = \overline{0, \infty}.$$

В частности, если f является целой функцией конечного порядка ρ, то можно положить

$$\delta_k = \frac{\gamma}{n^{\rho}},$$

где $\gamma = \text{const} > 0$ (см. §1 гл. 7 [11]). Для произвольного ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ пространства $\mathcal{H}$ и произвольного $\lambda > 1$ рассмотрим последовательность элементов

$$x_k = (\lambda\delta_k)^k e_k, \quad k = \overline{0, \infty},$$

и определим на элементах базиса $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ линейный ограниченный оператор A:

$$A\, e_k = \lambda \frac{\delta_{k+1}^{k+1}}{\delta_k^k} e_{k+1}, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Нетрудно проверить, что

$$A\, x_k = x_{k+1}, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

С другой стороны, поскольку

$$A^m e_k = \lambda^m \frac{\delta_{k+m}^{k+m}}{\delta_k^k} e_{k+m}, \quad k = \overline{0, \infty},$$

то

$$\left\| A^m \right\| = \sup_k \lambda^m \frac{\delta_{k+m}^{k+m}}{\delta_k^k} = \sup_k \left(\frac{\delta_{k+m}}{\delta_k} \right)^k (\lambda\delta_{k+m})^m \leq (\lambda\delta_{k+m})^m,$$

следовательно,

$$\sqrt[m]{\left\| A^m \right\|} \leq \lambda\delta_{k+m} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Таким образом, оператор A имеет нулевой спектральный радиус. Определим теперь элемент $y_0 \in \mathcal{H}$ в виде суммы ряда

$$y_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda\delta_m)^m} s_m e_m.$$

Очевидно,

$$\| y_0 \|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda\delta_m)^{2m}} |s_m|^2 \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2m}} = \frac{1}{1 - 1/\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} < \infty,$$

следовательно, $y_0 \in \mathcal{H}$. С другой стороны,

$$(x_k, y_0) = \left((\lambda\delta_k)^k e_k, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda\delta_m)^m} s_m e_m \right) = s_k, \quad k = \overline{0, \infty},$$

а это означает справедливость представления (11).

***Замечание* 4.** Из доказательства теоремы 2 видно, что если взять набор $\{f_\lambda\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$ целых функций порядка ρ, то для них можно построить представления вида

$$f_\lambda(z) = (R_z^{\#}(A)x_0, y_0^{(\lambda)})$$

с общим оператором A, имеющим нулевой спектральный радиус. Более того, оператор A может быть построен таким образом, что

$$\sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \frac{C}{n^\rho} \quad \forall n = \overline{1, \infty},$$

где $C = \text{const}$.

***Замечание* 5.** В теореме 2 доказано существование представлений функций f в виде (10), т. е. в терминах скалярного произведения, которое, как известно, является полуторалинейной формой. Трансформация этих представлений в представления в терминах билинейных форм является очевидной.

Автор благодарит члена-корреспондента НАН Украины М. Л. Горбачука за полезные обсуждения.

1. *Дзядык В. К.* Об обобщении проблемы моментов // Докл. АН УССР. – 1981. – № 6. – С. 8 – 12.
2. *Дзядык В. К., Голуб А. П.* Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде. – Киев, 1981. – С. 3 – 15. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 81.58).
3. *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления и рациональные аппроксимации. – Киев, 1987. – 50 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 87.25).
4. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М.: Физматгиз, 1961. – 312 с.
5. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1988. – 304 с.
6. *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
8. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Р.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
9. *Аров Д. З.* Пассивные линейные стационарные динамические системы // Сиб. мат. журн. – 1979. – **20**, № 2. – С. 211 – 228.
10. *Голуб А. П.* О совместных аппроксимациях Паде набора вырожденных гипергеометрических функций // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 6. – С. 701 – 706.
11. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2 т. – М.: Наука, 1968. – Т. 2. – 624 с.

Получено 05.02.2002