УДК 517.91

А. О. Пришляк (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ m-ПОЛЕЙ НА ДВУ- И ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С КРАЕМ

We consider m-fields that are generalization of the Morse–Smale vector fields for manifolds with boundary. We construct complete topological invariants of m-fields on surfaces and m-fields without closed trajectories on three-dimensional manifolds. We prove criteria of the topological equivalence of m-fields.

Розглядаються m-поля, що є узагальненням векторних полів Морса – Смейла для багатовидів із краєм. Побудовано повні топологічні інваріанти m-полів на поверхнях і m-полів без замкнених траєкторій на тривимірних багатовидах. Доведено критерії топологічної еквівалентності m-полів.

Пусть M — гладкое (класса C^∞) компактное n-мерное многообразие с краем, X — гладкое векторное поле, все особые точки которого не лежат на краю.

Пусть в окрестности точки $x_0=(x_0^1,\dots,x_0^{n-1},0)$ края задана карта с координатами $(x^1,x^2,\dots,x^n)$, $x^n\geq 0$. Поле X $(X^1,X^2,\dots,X^n)$ трансверсальное к краю в точке x_0, если $X^n(x_0)\neq 0$, и касательное, если $X^n(x_0)=0$. Обозначим через $N\subset\partial M$ подмножество точек, в которых поле касается края. Если N — подмногообразие коразмерности один в крае ∂M, то в окрестности каждой точки $x_0\in N$ можно выбрать такую систему координат $(x^1,x^2,\dots,x^n)$, что подмногообразие N задается уравнением $x^1=0$. Точку $x_0\in N$ будем называть невырожденной, если $X^1(x_0)=0$ и $\dfrac{\partial X^n}{\partial x^1}(x_0)\neq 0$. Подмногообразие N назовем невырожденным, если все его точки невырожденные. Обозначим компоненты N, для которых $\dfrac{\partial X^n}{\partial x^1}(x_0)>0$, через N_i^+, а в случае $\dfrac{\partial X^n}{\partial x^1}(x_0)<0$ через N_i^-. Назовем устойчивым многообразием для N_i^+ объединение всех точек, которые проходят через N_i^+ при движении по траекториям в положительном направлении, и неустойчивым многообразием для N_i^+, если они проходят N_i^+ в отрицательном направлении.

Через $\varphi_t(x)$ обозначим траекторию, проходящую через точку x и такую, что $\varphi_0(x)=x$. α-Предельным (ω-предельным) множеством траектории $\varphi_t(x)$ является ее предельное множество при $t\to+\infty$ $(t\to-\infty)$.

Векторное поле X называется m-полем, если выполнены следующие условия:

1) оно имеет конечное число критических элементов (особых точек и замкнутых орбит), все они невырожденные (гиперболические и не имеют с краем общих точек;

2) α- и ω-предельные множества каждой траектории принадлежат объединению критических элементов;

3) поле трансверсально пересекает край во всех точках, за исключением точек подмногообразий $N_i\subset\partial M$ размерности $n-2$, которые являются невырожденными;

4) устойчивые и неустойчивые многообразия критических элементов и подмногообразий N_i^+ пересекаются трансверсально.

m-Поля — обобщение градиентно-подобных полей Морса – Смейла для многообразий с краем. Они являются градиентными полями m-функций в соответствующей римановой метрике.

Два поля называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм многообразия на себя, который переводит интегральные траектории в интегральные, сохраняя их ориентации.

Топологическая классификация полей Морса – Смейла на поверхностях (двумерных многообразиях) получена в работах [1 – 4], а на трехмерных многообразиях — в [4, 5].

Замечание. Условия 1, 2 и 4 в определении m-поля совпадают с условиями для полей Морса – Смейла. Если представить поле X как сечение τ касательного расслоения TM, то условие 3 можно переформулировать в таком виде:

3′) сечение τ трансверсально к касательному расслоению $T\partial M$ края в многообразии TM.

Действительно, точки, в которых поле касается края, — это точки из пересечения τ с $T\partial M$. Из условия трансверсальности следует

$$\dim N_l = \dim\tau + \dim T\partial M - \dim TM = n + 2(n-1) - 2n = n - 2.$$

Условия $X^1(x_0) \neq 0$ и $\dfrac{\partial X^n}{\partial x^1}(x_0) \neq 0$ обеспечивают трансверсальность в точках из этого пересечения.

Основная цель данной работы — получить топологическую классификацию m-полей на дву- и трехмерных многообразиях.

1. m-Поля на поверхностях. Пусть M — гладкая ориентированная поверхность с краем, X — m-поле на ней. Построим полный топологический инвариант поля — диаграмму, состоящую из поверхности с краем и вложенным в нее ориентированным графом. Приклеим к краю поверхности M криволинейные треугольники так, что каждый треугольник приклеивается по одной стороне, которая совпадает с одной из дуг, на которые точки из N_l разбивают край поверхности. Продолжим поле на эти треугольники следующим образом. Если поле на приклеивающей стороне направлено вовнутрь треугольника, то противоположная вершина является стоком и все траектории, проходящие через треугольник, сходятся к ней. При этом две другие стороны треугольника лежат на таких траекториях. Аналогично продолжим поле на треугольники, у которых поле на приклеивающей стороне направлено вовне их. Противоположная вершина в этом случае будет источником. Подправим поле в окрестности каждой точки $z_l \in N_l^+$ так, чтобы она была седловой гиперболической точкой, одно устойчивое и одно неустойчивое многообразия которой принадлежали бы траектории первоначального поля, проходящей через нее. Два других многообразия при этом совпадают со сторонами треугольников.

Если компонента края не содержит точек из N_l, то заклеим ее диском и продлим поле так, что внутри диска будет одна особая точка — сток или источник. Если поле содержит замкнутые траектории, то разрежем по ним поверхность. Полученные компоненты края заклеим дисками и заменим поле на такое, которое совпадает с исходным вне малых окрестностей этих дисков. Новое поле имеет по одной особой точке на каждом диске, которая является источником, если замкнутая траектория — отталкивающая, и стоком, если она притягивающая.

Обозначим полученную поверхность через F, а построенное на ней поле через Y. Для этого поля построим граф G_Y, вложенный в поверхность F. Вершинами графа будут особые точки (в том числе и лежащие на границе). Ребра будут состоять из устойчивых и неустойчивых многообразий седловых особых точек, а также оставшихся траекторий, лежащих на границе. Зададим на ребрах ориентации в соответствии с направлением движения по соответствующим им траекториям. Выделим на графе вершины, лежащие в приклеенных дисках. Те из них, которые соответствуют компонентам границы, назовем граничными, а соответствующие замкнутым орбитам — орбитальными. Разобьем некоторые орбитальные вершины на пары так, что в одну пару попадают вершины, соответствующие одной замкнутой траектории. В случае ориентированной поверхности все орбитальные вершины будут разбиты на пары.

Так построенная поверхность F вместе с вложенным в нее ориентированным графом G_Y, с набором выделенных вершин, разбитых на граничные и орбитальные, некоторые из которых разбиты на пары, называется диаграммой поля X. Две диаграммы называются изоморфными, если существует гомеоморфизм поверхностей, который переводит вложенный граф во вложенный граф, граничные вершины в граничные, а орбитальные — в орбитальные, сохраняя их разбиение на пары.

Теорема 1. *Два m-поля на поверхностях с краем топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда изоморфны их диаграммы.*

Доказательство. *Необходимость.* Если задан сопрягающий гомеоморфизм поверхности M, то он естественным образом продолжается до гомеоморфизма поверхности F. Поскольку при этом устойчивые многообразия отображаются в устойчивые, а неустойчивые — в неустойчивые, то вложенный граф переходит во вложенный граф. Таким образом, этот гомеоморфизм задает изоморфизм диаграмм.

Достаточность. Пусть диаграммы полей изоморфны. Тогда изоморфизм диаграмм задает гомеоморфизм поверхностей, переводящий устойчивые многообразия в устойчивые, а неустойчивые — в неустойчивые. Разрежем поверхность F по графу G_Y. Тогда гомеоморфизм поверхности F индуцирует гомеоморфизмы полученных областей. Заменим эти гомеоморфизмы на гомеоморфизмы, которые переводят интегральные траектории в интегральные и совпадают с исходными на границах областей. Это можно сделать, так как границы областей состоят из интегральных траекторий. Поскольку построенные гомеоморфизмы совпадают на границах, то они задают сопрягающий гомеоморфизм поверхности F для поля Y. Тогда его ограничение на поверхность M будет искомым гомеоморфизмом.

2. Критерий топологической эквивалентности m-полей на трехмерных многообразиях. Пусть M —замкнутое ориентированное трехмерное многообразие с краем ∂M, X — m-поле на M без замкнутых траекторий.

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — особые точки индекса 0, а $b_1, \ldots, b_n$ — особые точки индекса 1 поля X. Разобьем границу ∂M на три части: $\partial_- M$ — там, где поле входит в многообразие M, $\partial_+ M$ — где выходит из него, N_i — набор окружностей, в точках которых поле касается края. Пусть K_- — объединение устойчивых многообразий особых точек индекса 0 и 1. Рассмотрим трубчатую окрестность $U(K_-)$ этого объединения. При этом поле будет трансверсально к $\partial U(K_-) \setminus \partial M$. Положим

$$\Phi_- = \mathrm{Cl}\big((\partial U(K_-) \cup \partial_- M) \setminus (\partial U(K_-) \cap \partial_- M)\big).$$

Пусть K_+ — объединение неустойчивых многообразий особых точек индексов 2 и 3. Положим

$$\Phi_+ = \mathrm{Cl}\big((\partial U(K_+) \cup \partial_+ M) \setminus (\partial U(K_+) \cap \partial_+ M)\big).$$

Заметим, что $\partial\Phi_- = \partial\Phi_+ = \bigcup N_i$.

Обозначим через $v(x)$ и $u(x)$ устойчивые и неустойчивые многообразия особой точки x. Пусть u_i — окружности, которые получаются в результате пересечения неустойчивых многообразий особых точек индекса 1 с поверхностью Φ_-. Тогда u_i — набор непересекающихся окружностей на поверхности Φ_-.

Пересечения $w_i = v(N_i^+) \cap \Phi_-$ образуют другой набор окружностей на Φ_-. Зафиксируем ориентацию на поверхности Φ_-. Эта ориентация задает ориентацию на каждой компоненте края N_i^+. Поскольку поле задает гомеоморфизм h (отображением последования) между N_i^+ и $\nu(N_i^+)$, на $\nu(N_i^+)$ возникает индуцированная ориентация.

Если $c_1, \ldots, c_m$ — особые точки индекса 2, то пересечения $v_i = \nu(c_i) \bigcap \Phi_-$ образуют набор вложенных окружностей и дуг с концами на w_i и N_i^+. На каждом N_i^+ зафиксируем один из концов x_i дуг (если такого нет, то произвольную точку), а также его образ $h(x_i)$ при гомеоморфизме h. Другая пара фиксированных точек $(y_i, h(y_i))$ называется эквивалентной паре $(x_i, h(x_i))$, если при движении от x_i до y_i по N_i^+ за ориентацией встречаются столько же концов дуг, сколько при движении от $h(x_i)$ до $h(y_i)$ на w_i. Заметим, что другой выбор пары фиксированных точек приводит к эквивалентной паре.

Так построенная ориентированная поверхность Φ_- с краем вместе с набором окружностей u_i, набором ориентированных окружностей w_i, набором окружностей и дуг v_i, а также парами фиксированных точек называется диаграммой D поля X.

Две диаграммы называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм поверхностей, который:

1) переводит окружности и дуги каждого из набора в окружности и дуги такого же набора;

2) переводит пары фиксированных точек в пары, эквивалентные соответствующим парам фиксированных точек;

3) сохраняет или обращает ориентацию одновременно на поверхности и всех окружностях w_i.

Теорема 2. *Для того чтобы m-поле X было топологически эквивалентным X', необходимо и достаточно, чтобы их диаграммы были эквивалентны.*

Доказательство. *Необходимость* следует из построения. Докажем *достаточность.* Пусть такой гомеоморфизм существует. Рассмотрим диски, которые принадлежат неустойчивым интегральным многообразиям $U(b_i)$, содержат точки b_i и ограничены окружностями u_i. Тогда можно продолжить гомеоморфизмы с границ этих дисков до гомеоморфизмов самих дисков, переводящих интегральные траектории в интегральные (так как каждая интегральная траектория, кроме особых точек, пересекает границу диска). Аналогично, существует гомеоморфизм дисков, состоящих из частей интегральных траекторий, начинающихся на окружностях второго типа и заканчивающихся в особых точках индекса 2. Тогда поверхность вместе с этими дисками разбивает многообразие на трехмерные диски, каждый из которых имеет по одной особой точке индекса 0 или 3. Имея гомеоморфизмы на границах этих дисков, продолжим их на внутренности. Таким образом, мы построили гомеоморфизмы между многообразиями, которые задают топологическую эквивалентность полей.

3. Продолжение изоморфизмов графов до гомеоморфизмов поверхностей. Пусть G — ориентированный граф, вложенный в поверхность Φ с краем, а G' — в Φ'. При этом будем предполагать, что каждая компонента края поверхности является циклом соответствующего графа. Если графы изоморфны (возможно, не сохраняя ориентации ребер), то различных изоморфизмов между ними конечное число. Тогда вопрос о существовании гомеоморфизма поверхностей, сужение которого на графы есть изоморфизм графов, равносилен вопросу о возможности продолжения изоморфизма графов до гомеоморфизма поверхностей.

Пусть $g: G \to G'$ — изоморфизм графов, который переводит вершины A_i графа G в вершины A_i', а ребра B_j — в B_j'. Обозначим через $U(G)$ трубчатую окрестность графа G в поверхности Φ и пусть $p:\overline{U(G)} \to G$ — проекция ее замыкания на граф. Тогда дополнение $\Phi \setminus U(G)$ состоит из поверхностей F_i с краями и $\bigcup \partial F_i = \partial U(G)$. Каждую окружность, входящую в край поверхности F_i, разобьем на дуги так, чтобы каждая дуга отображалась проекцией p ровно на одно ребро графа G, а прообразом $p^{-1}(B_j)$ каждого ребра были две дуги из границ всех поверхностей. Зададим на дугах ориентации так, чтобы проекция p сохраняла ориентации, и будем обозначать эти дуги так же, как и соответствующие им ребра.

На каждой поверхности F_i зададим ориентацию (согласованную с ориентацией F, если поверхность F ориентирована, и произвольным образом — в противном случае). Для каждой окружности из границы поверхности выпишем слово, состоящее из букв $B_j^{\pm 1}$, обозначающих дуги (ребра графа), которые лежат на этой окружности. При этом буквы выписываются в той последовательности, в которой они встречаются при обходе окружности по направлению, согласованному с ориентацией поверхности F_i. Буква имеет степень $+1$, если ориентация соответствующей ей дуги совпадает с этой ориентацией окружности, и -1 — в противном случае. Два слова называются эквивалентными, если одно можно получить из другого в результате циклической перестановки букв. Это соответствует другому выбору начала обхода окружности. Слова называются обратными, если одно получается из другого в результате выписывания букв в обратном порядке, с обращением степеней и, возможно, циклической перестановки. Это соответствует обходу окружности против ориентации.

Для каждой поверхности F_i составим список, который состоит из числа n_i, равного роду поверхности F_i, и слов, выписанных при обходе границы поверхности вдоль ориентации. Два таких списка назовем элементарными, если у них совпадают числа n_i и между словами можно установить биекцию так, что соответствующие слова эквивалентны. Списки будут обратные, если у них совпадают n_i и все слова обратные.

Таким образом, для поверхности Φ и графа G мы построили набор списков слов (НСС) так, что каждый список соответствует одной поверхности F_i. Два таких набора назовем эквивалентными, если существует биективное соответствие между списками такое, что соответствующие списки либо эквивалентные, либо обратные.

Лемма. *Пусть G (G') — ориентированный граф, вложенный в поверхность Φ (Φ') с краем, $g: G \to G'$ — изоморфизм графов, который переводит вершины A_i графа G в вершины A_i', а ребра B_j — в B_j'. Тогда изоморфизм графов продолжается до гомеоморфизма поверхностей тогда и только тогда, когда при замене B_j на $B_j'^{\pm 1}$ (знак берется в зависимости от того, сохраняется ориентация ребра или нет) в наборе списков для пары (F, G) получится набор, эквивалентный набору списков пары (F', G'). При этом гомеоморфизм сохраняет ориентацию поверхности, если все соответствующие списки эквивалентны.*

Доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения для замкнутых поверхностей [6].

Граф вместе с НСС называется НСС-графом. НСС-графы называются изоморфными, если между ними существует изоморфизм, удовлетворяющий условиям леммы.

4. Различающие графы m-полей. ***А. Различающий граф m-полей на поверхности.*** Как и в п.1, по m-полю построим его диаграмму. Составим НСС для графа G_γ в поверхности F. Различающим графом называется граф G_γ с заданным НСС, с набором выделенных вершин, разбитых на граничные и орбитальные, некоторые из которых разбиты на пары. Два различающихся графа называются изоморфными, если существует их изоморфизм как НСС-графов, который переводит граничные вершины в граничные, а орбитальные — в орбитальные, сохраняя их разбиение на пары.

Предложение 1. *Два m-поля на поверхностях с краем топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда изоморфны их различающие графы.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1 и леммы.

B. Различающий граф на трехмерном многообразии. Рассмотрим диаграмму m-поля на трехмерном многообразии. Составим граф из таких наборов u_i, v_i, w_i окружностей и дуг, а также окружностей, входящих в границу поверхности Φ. Вершинами графа будут точки пересечения между этими окружностями и концы дуг. Если на какой-то окружности нет вершины, то выберем на ней вершину произвольным образом. Тогда эта окружность будет образовывать петлю, являющуюся компонентой связности графа.

Все ребра графа разбиваются на наборы u, v, w, ∂ в зависимости от того, в какой набор входит окружность или содержащая их дуга. Зададим ориентацию ребер этого графа, совпадающую с ориентацией окружностей w_i на ребрах из набора w и произвольную на других ребрах. Для этого вложенного графа, как и в п. 3, построим набор списков слов, буквы которых соответствуют ребрам графа. Зафиксируем пары вершин графа, соответствующие фиксированным точкам диаграммы.

Так построенный ориентированный граф вместе с разбиением множества его ребер на наборы u, v, w, ∂, НСС и парами выделенных вершин назовем различающим графом векторного m-поля. Два различающих графа назовем эквивалентными, если существует изоморфизм НСС-графов, сохраняющий разбиение множества ребер на наборы, ориентации ребер и разбиение вершин на пары.

Предложение 2. *Два векторных поля топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны их различающие графы.*

Доказательство основано на лемме и теореме 2.

5. КТ-диаграммы m-полей на поверхности. Назовем элементарным треугольником треугольник, стороны которого ориентированы так, что одна из вершин является источником, а другая — стоком. Это равносильно тому, что стороны не образуют ориентированного цикла. Вершину, которая не является источником или стоком, будем называть седловой.

Элементарным квадратом называется квадрат, стороны которого ориентированы так, что две вершины являются источниками, а две другие — стоками. Очевидно, что пары источников (как и пары стоков) составляют противоположные вершины квадрата. С точностью до гомеоморфизма, переводящего стороны в стороны, сохраняя их ориентацию, существуют единственный элементарный треугольник и единственный элементарный квадрат.

Квадратно-треугольной диаграммой (или КТ-диаграммой) называется представление поверхности в виде несвязного объединения элементарных треугольников и квадратов, склеенных по сохраняющим ориентацию гомеоморфизмам сторон. При этом разрешается склеивать стороны одного элементарного треугольника или квадрата между собой. Будем требовать, чтобы седловая вершина каждого треугольника принадлежала границе поверхности.

Две КТ-диаграммы называются изоморфными, если существует гомеоморфизм поверхности, который переводит треугольники в треугольники, квадраты в квадраты, сохраняя ориентацию сторон.

Покажем, как по m-полю X, заданному на поверхности Φ, построить КТ-диаграмму и наоборот. Как и в п. 1, построим поверхность Φ, поле Y на ней. Каждый треугольник будет соответствовать точно одной седловой особой точке на границе, а каждый квадрат — седловой точке внутри поверхности.

Рассмотрим внутреннюю седловую точку. В нее входят две траектории (входящие усы) и две траектории из нее выходят (выходящие усы). Из определения

m-поля следует, что входящие усы начинаются в источниках (возможно, на границе поверхности), а выходящие заканчиваются в стоках. Для входящего и выходящего усов седловой точки и для любого $\varepsilon > 0$ найдется траектория, соединяющая соответствующие источник и сток, которая лежит в ε-окрестности объединения этих усов. Четыре такие траектории, по одной для каждой пары входящих и выходящих усов, образуют четырехугольник, гомеоморфный элементарному квадрату. Его стороны ориентированы в соответствии с движением по этим траекториям.

Для седловой точки, лежащей на границе поверхности, проведем аналогичные построения. Построим три траектории, соединяющие концы усов этого седла. Стянув усы, лежащие на краю поверхности, в точку, получим элементарный треугольник. Его стороны ориентированы в соответствии с движением по траекториям.

Назовем две траектории γ_0 и γ_1, соединяющие источник и сток, d-изотопными, если существует постоянная на концах изотопия γ_t такая, что для каждого $t \in [0, 1]$ γ_t является траекторией поля.

КТ-диаграмма получается из элементарных квадратов и треугольников, построенных для каждой седловой точки, после склейки их сторон. При этом стороны склеиваются тогда и только тогда, когда они d-изотопны. Обратно, по каждой КТ-диаграмме можно восстановить поле Y. Действительно, вставив в седловые вершины треугольников пары сторон (стянутых при построении КТ-диаграммы в точку), получим пятиугольники. На каждом четырех- и пятиугольнике поле задается естественным образом.

Как и для обыкновенных диаграмм, выделим на КТ-диаграмме граничные и орбитальные вершины и разобьем некоторые из них на пары. Из предыдущих рассуждений следует такое утверждение.

Предложение 3. *Два m-поля на поверхности с краем топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм их КТ-диаграмм, который переводит граничные вершины в граничные, орбитальные — в орбитальные, сохраняя разбиение их на пары.*

6. Подсчет числа топологически не эквивалентных m-полей на двумерном диске. Обозначим через $n(i)$ число топологически не эквивалентных полей на диске с i седловыми точками на границе. Приведем результаты вычислений, выполненных на основе использования КТ-диаграмм для m-полей на диске:

Если поле не имеет особых точек внутри диска, то $n(0) = 1$, $n(1) = 1$, $n(2) = 6$, $n(3) = 27$. В этом случае КТ-диаграмма состоит из i треугольников (стороны одного и того же треугольника не склеиваются, иначе появится особая точка внутри диска).

Для полей с одной особой точкой внутри диска, которая является источником, $n(0) = 1$, $n(1) = 1$, $n(2) = 4$, $n(3) = 50$.

Если эта точка является стоком, то числа те же, что и для источника. В случае одной внутренней седловой точки $n(0) = 1$, $n(1) = 3$, $n(2) = 26$, $n(3) = 297$.

1. *Арансон С. Х., Гринес В. З.* Топологическая классификация полей на замкнутых двумерных многообразиях // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, вып. 1. – С. 149 – 169.
2. *Bolsinov A. V., Oshemkov A. A., Sharko V. V.* On classification of flows on manifolds. I // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1996. – **2**, № 2. – P. 131 – 146.
3. *Peixoto M.* On the classification of flows on two-manifolds // Dynamical Systems / Ed. M. Peixoto. – New York: Acad. Press, 1973. – P. 389 – 419.
4. *Fleitas G.* Classification of gradient like flows of dimensions two and three // Bol. Soc. brasil. mat. – 1975. – **9**. – P. 155 – 183.
5. *Уманский Я. Л.* Схема трехмерной динамической системы Морса – Смейла без замкнутых траекторий // Докл. АН СССР. – 1976. – **230**, № 6. – С. 1286 – 1289.
6. *Пришляк А. О.* О вложенных в поверхность графах // Успехи мат. наук. – 1997. – **56**, № 4. – С. 211 – 212.

Получено 10.10.2001