УДК 517.51

А. А. Довгошей, Л. Л. Потемкина
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

АНАЛИТИЧНОСТЬ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА ВЕЩЕСТВЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

We consider the result obtained by M. Ya. Perel'man and stating that the first modulus of continuity of any real-analytic function f is a function analytic in some neighborhood of zero. We generalize these result to arbitrary higher order moduli of continuity.

Результат М. Я. Перельмана про те, що перший модуль неперервності будь-якої дійсно-аналітичної функції f є функцією, аналітичною в деякому околі нуля, узагальнено на довільні модулі неперервності вищого порядку.

1. Введение и формулировка основной теоремы. М. Я. Перельман [1] установил следующую теорему.

Теорема. *Пусть $f(x)$ — вещественно-аналитическая функция на отрезке $[a, b]$, тогда ее первый модуль непрерывности $\omega(f, \delta)$ — функция, аналитическая в начале координат.*

В работах [2, 3] найдены условия аналитичности в нуле модуля непрерывности кусочно-аналитических функций. Однако вопрос об аналитичности модулей непрерывности порядка выше первого оставался практически не исследованным. Настоящая работа направлена на устранение этого пробела.

Введем необходимые обозначения. Пусть $f \in C^k[a, b]$, т. е. имеет на $[a, b]$ непрерывную производную порядка k. Положим

$$m_k := \max_{a \le x \le b} \left| f^{(k)}(x) \right|, \qquad M_k := \left\{ x \in [a, b] : \left| f^{(k)}(x) \right| = m_k \right\}. \tag{1}$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — вещественно-аналитическая на $[a, b]$ функция, k — натуральное число ≥ 2. Тогда $\omega_k(f, \delta)$ — функция, аналитическая в начале координат.*

Приведем основные определения.

Определение 1. *Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется вещественно-аналитической, если на плоскости $\mathbb{C}$ существует область $G \supset [a, b]$ и функция ψ, голоморфная в G, такая, что $\psi|_{[a,b]} = f$.*

Определение 2. *Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$, $k \in \mathbb{N}$, $x_0 \in [a, b)$ и $h \ge 0$ такое, что $x_0 + kh \in [a, b]$; k-й разностью функции f в точке x_0 с шагом h называется величина*

$$\Delta_h^k(f; x_0) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x_0 + ih). \tag{2}$$

Определение 3. *Модулем непрерывности порядка k функции $f \in C[a, b]$ называется функция*

$$\omega_k(\delta) := \omega_k(f; \delta) := \omega_k(f; \delta; [a, b]) := \sup_{\substack{a \le x_0 \le b - kh \\ 0 \le h \le \delta}} \left| \Delta_h^k(f; x_0) \right|.$$

Определение 4. *Пусть $f \in C[a, b]$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \delta < (b-a)/k$. Упорядоченную пару точек x', $x'' \in [a, b]$ назовем δ_k-экстремальной, если $0 < x'' - x' \le$ $\le k\delta$ и*

$$\omega_k(f;\delta) = \left|\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i} f\left(\frac{k-i}{k}x' + \frac{i}{k}x''\right)\right|. \tag{3}$$

***Замечание* 1.** Определения 1 – 3 стандартны. Определение 4 при $k = 1$ совпадает с определением δ-экстремальных точек из [3]. Стандартные рассуждения, основанные на компактности, показывают, что для любого $\delta \in (0, (b-a)/k)$ существует по крайней мере одна пара δ_k-экстремальных точек.

2. Вспомогательные утверждения. ***2.1. Экстремальные точки.*** Как известно, равенство $\omega_k(f;\delta) = 0$ эквивалентно тому, что f — полином степени $\le k-1$. В частности, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $f \in C[a, b]$ и при некотором $\delta_0 > 0$*

$$\omega_k(f;\delta_0) = 0, \tag{4}$$

тогда f — след полинома степени $\le k-1$.

Следующая лемма обобщает соответствующий результат из [2].

Лемма 2. *Пусть $f \in C[a, b]$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \delta < (b-a)/k$, x', x'' — δ_k-экстремальная пара точек и*

$$x_i^k := \frac{k-i}{k}x' + \frac{i}{k}x'' \tag{5}$$

при $i = \overline{0,\dots,k}$. Тогда если $[x', x''] \subset (a, b)$ и f дифференцируема в точках x_i^k, $i = \overline{0,\dots,k}$, то имеет место равенство

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i} f'(x_i^k) = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F_k(t) := \left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(x_i^k + t)\right)^2,$$

определенную при $|t| \le \min(|x'-a|; |x''-b|)$. Поскольку x', x'' — δ_k-экстремальная пара точек, то нуль — точка максимума $F_k(t)$. Согласно теореме Ферма $F_k'(0) = 0$ и с учетом (3)

$$\omega_k(f;\delta)\left|\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i} f'(x_i^k)\right| = 0. \tag{7}$$

Если $\omega_k(f;\delta) = 0$, то согласно лемме 1 f — полином степени $\le k-1$. Следовательно, f' — полином степени $\le k-2$ и при $h = (x''-x')/k$

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i} f'(x_i^k) = \Delta_h^k(f';x') = 0.$$

При $\omega_k(f;\delta) \ne 0$ второй сомножитель в левой части формулы (7) равен нулю, т. е. справедливо равенство (6).

Лемма 3. *Пусть $f \in C[a, b]$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ x', x'' — δ_k-экстремальные точки. Тогда если $[x', x''] \subset (a, b)$ и функция f дифференцируема $k+1$ раз на (a, b), то в некоторой точке $\xi \in (x', x'')$*

$$f^{(k+1)}(\xi) = 0. \tag{8}$$

Доказательство. Как известно (см., например, [4, с. 159]), если функция $g(x)$ принадлежит классу $C^k[x_0, x_0+kh]$, то

$$\exists \xi \in (x_0, x_0+kh): \ \Delta_h^k(g; x_0) = h^k g^{(k)}(\xi). \tag{9}$$

Полагая в (9) $q = f'$, $x_0 = x'$, $h = (x''-x')/k$, учитывая (6) и то, что согласно определению 4 $x''-x'>0$, получаем (8).

Для k-й разности функции f с абсолютно непрерывной $(k-1)$-й производной бывает удобно использовать стандартные интегральные представления

$$\Delta_h^k(f; x_0) = h^k k! \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{k-1}} f^{(k)}(x_0 + h(t_1+\ldots+t_k))dt_k \ldots dt_1 =$$

$$= \int_0^h \ldots \int_0^h f^{(k)}(x_0+t_1+\ldots+t_k)dt_k \ldots dt_1 \tag{10}$$

(см., например, [5, с. 18] или [6, с. 205]). Из этих представлений, используя подходящую замену переменных, или по индукции с помощью формулы

$$\Delta_h^k(f; x_0) = \Delta_h^{k-1}\Delta_h^1(f; x_0) \tag{11}$$

легко получить следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть* $h>0$, $k \in \mathbb{N}$. *Если функция* f *имеет* $(k-1)$-*ю абсолютно непрерывную производную на* $[x_0, x_0+kh]$, *то*

$$\Delta_h^k(f; x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} \ldots \int_{x_1}^{x_i+h} \ldots \int_{x_{k-1}}^{x_{k-1}+h} f^{(k)}(x_k)dx_k dx_{k-1}\ldots dx_1. \tag{12}$$

Пусть f дифференцируема $k+1$ раз на (a, b). Положим

$$B_k := \left\{x \in (a,b): f^{(k+1)}(x) = 0\right\}, \qquad A_k := \left\{\left|f^{(k)}(x)\right|: x \in B_k\right\},$$

т. е. B_k — множество нулей $(k+1)$-й производной, A_k — образ B_k при отображении $x \to \left|f^{(k)}(x)\right|$.

Лемма 5. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k[a, b]$ *и дифференцируема* $k+1$ *раз на* (a, b). *Тогда если множество* A_k *конечно, то существует* $\delta_0 > 0$ *такое, что при любом* $\delta \in (0, \delta_0)$ *для любой пары* δ_k-*экстремальных точек* x', x''

$$[x', x''] \cap M_k \neq \varnothing, \tag{13}$$

где M_k *определено формулой* (1). *Кроме того, если функция* f *не является ограничением на* $[a, b]$ *полинома степени* $\leq k-1$, *то при* $\delta \in (0, \delta_0)$ *для любой пары* x', x'' δ_k-*экстремальных точек*

$$\left|x'-x''\right| = k\delta. \tag{14}$$

Доказательство. Из леммы 3 следует, что при любом $\delta > 0$, для любой пары экстремальных точек x', x''

$$[x', x''] \cap (B_k \cup \{a\} \cup \{b\}) \neq \varnothing.$$

Если

$$B_k \cup \{a\} \cup \{b\} \subseteq M_k,$$

то (13) очевидно. В противном случае

$$M_k^{\Delta} := (B_k \cup \{a\} \cup \{b\}) \setminus M_k \neq \varnothing.$$

Из конечности A_k следует

$$M_k \cap \mathrm{Cl}(M_k^{\Delta}) = \varnothing, \tag{15}$$

где $\mathrm{Cl}(M_k^{\Delta})$ — замыкание M_k^{Δ}. В самом деле, если (15) ложно, то найдется $x_0 \in M_k$ и последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ x_n \in M_k^{\Delta} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Поскольку $f \in C^k[a, b]$ и $x \in M_k$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \left|f^{(k)}(x_n)\right| = \left|f^{(k)}(x_0)\right| = m_k$, а из конечности A_k следует, что

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \left|f^{(k)}(x_n)\right| = m_k,$$

т. е. при $n \geq n_0$ $x_n \in M_k^{\Delta} \cap M_k$, что противоречит определению M_k^{Δ}.

Из определения M_k и (15) следует, что

$$\forall x \geq \mathrm{Cl}(M_k^{\Delta}): \left|f^{(k)}(x)\right| < m_k.$$

Поскольку M_k и $\mathrm{Cl}(M_k^{\Delta})$ — непересекающиеся компакты, а $f \in C^k[a, b]$, то $\exists \varepsilon \in (0, (b-a)/2)$ $\exists \varepsilon_1 \in (0, m_k)$ $\forall x \in [a, b]$:

$$\left((x \in V_{\varepsilon}(M_k^{\Delta})) \Rightarrow \left(\left|f^{(k)}(x)\right| < m_k - \varepsilon_1\right)\right) \& \left((x \in V_{\varepsilon}(M_k)) \Rightarrow \left(\left|f^{(k)}(x)\right| > m_k - \varepsilon_1\right)\right), \tag{16}$$

где для $A \subseteq [a, b]$ $V_{\varepsilon}(A)$ — ε-окрестность множества A,

$$V_{\varepsilon}(A) := \left\{x \in [a,b]: \inf_{t \in A} |x - t| < \varepsilon\right\}.$$

Положим $\delta_0 = \varepsilon / k$. Проверим, что при таком δ_0 выполнено (13).

Пусть $\delta \in (0, \delta_0)$ и x', x'' — δ_k-экстремальная пара точек, для которой $[x', x''] \cap M_k = \varnothing$. Согласно лемме 3

$$[x', x''] \cap M_k^{\Delta} \neq \varnothing,$$

и с учетом выбора δ_0

$$[x', x''] \subset V_{\varepsilon}(M_k^{\Delta}).$$

В силу (16) и определения (4)

$$\omega_k(f; \delta) = \left|\Delta_h^k(f, x')\right| \leq \left|f^{(k)}(\xi)\right| h^k < (m_k - \varepsilon_1)\delta^k,$$

где $h := \dfrac{x'' - x'}{k} \leq \delta$, а $\xi \in (x', x'')$. С другой стороны, $M_k \neq \varnothing$ и для любого $x \in M_k$ отрезок $[x, x + k\delta]$ или отрезок $[x + k\delta, x]$ лежит в $V_{\varepsilon}(M_k)$ — ε-окрестности M_k. В любом случае из (16) получаем неравенство

$$\omega_k(f; \delta) > (m_k - \varepsilon_1)\delta^k,$$

что противоречит предыдущему неравенству. Соотношение (13) доказано, перейдем к доказательству равенства (14).

Пусть теперь f не является следом многочлена степени $\leq k - 1$. При $M_k^{\Delta} = \varnothing$ (16) редуцируется к виду

$$\exists\varepsilon\in\left(0,\frac{b-a}{2}\right)\ \exists\varepsilon_1\in(0,m_k)\ \forall x\in[a,b]:\ (x\in V_\varepsilon(M_k))\ \Rightarrow\ \left(\left|f^{(k)}(x)\right|>m_k-\varepsilon_1\right). \tag{17}$$

Выберем $\varepsilon>0$ так, чтобы при $M_k^\Delta=\varnothing$ выполнялось (17) или при $M_k^\Delta\neq\varnothing$ — (16). Как и выше, положим $\delta_0=\varepsilon/k$.

Покажем, что при $\delta\in(0,\ \delta_0)$ для любых δ_k-экстремальных точек x', x'' выполнено (14). Из (13) и неравенства $\delta<\varepsilon/k$ следует включение

$$[x',x'']\subset U_\varepsilon,$$

где U_ε — некоторая компонента связности $V_\varepsilon(M_k)$. Заметим, что:

1) U_ε — промежуток числовой оси длины не менее $\varepsilon>k\delta$;

2) для любых x_1 и x_2 из U_ε

$$f^{(k)}(x_1)f^{(k)}(x_2)\ >\ 0.$$

Свойство 1 следует из определения $V_\varepsilon(M_k)$ и связности сегмента $[a,\ b]$, а если свойство 2 ложно, то найдется точка $\xi\in U_\varepsilon$, в которой $f^{(k)}(\xi)=0$, что противоречит (16) или (17). Если $\delta>h:=\dfrac{x''-x'}{k}$, то существует отрезок $[x_0,x_0+k\delta]$ такой, что

$$U_\varepsilon\supseteq[x_0,x_0+k\delta]\supset[x',x'+kh]=[x',x''].$$

Не уменьшая общности можно считать, что $f^{(k)}(x)>0$ на U_ε. Представляя $\Delta_\delta^k(f;x_0)$ и $\Delta_h^k(f;x')$ в виде (12), из аддитивности интеграла получаем

$$\Delta_\delta^k(f;x_0)\ >\ \Delta_h^k(f;x')\ =\ \omega_k(f;\delta),$$

что противоречит определению k-го модуля непрерывности.

2.2. Вспомогательный многочлен. Пусть k — натуральное число, а r — целое неотрицательное число. Введем в рассмотрение полином

$$P_{k,r}(z)\ :=\ \sum_{n=0}^{r}\frac{S(k+r-n,\ k)}{(k+r-n)!n!}z^n, \tag{18}$$

где $S(p,k)=\dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^p$ — числа Стирлинга второго рода (определение и элементарные свойства этих чисел можно найти в [7, с. 58] или [8, с. 627]).

Целью настоящего подпункта является доказательство следующего утверждения.

Утверждение 1. *Пусть r — нечетное натуральное число. Тогда уравнение*

$$P_{k,r}(z)\ =\ 0$$

имеет единственный вещественный корень $z_0=-k/2$, причем $P'_{k,r}(-k/2)\neq0$.

Доказательство утверждения 1 разобьем на ряд лемм.

Лемма 6. *При произвольных натуральных k и r имеет место тождество*

$$\frac{d}{dz}(P_{k,r}(z))\ =\ P_{k,r-1}(z). \tag{19}$$

Доказательство. Действительно,

$$\frac{d}{dz}(P_{k,r}(z))\ =\ \sum_{n=1}^{r}\frac{S(k+r-n)}{(k+r-n)!(n-1)!}z^{n-1}\ =\ \sum_{n=0}^{r-1}\frac{S(k+r-1-n)}{(k+r-1-n)!n!}z^n\ =\ P_{k,r-1}(z).$$

Лемма 7. *Пусть k и r — произвольные натуральные числа. Тогда число $z_0 \in \mathbb{C}$ является корнем уравнения $P_{k,r}(z) = 0$ тогда и только тогда, когда*

$$\Delta_1^k(\psi_{k,r,z_0}; 0) = 0, \tag{20}$$

где $\psi_{k,r,z_0}(x) = (x + z_0)^{k+r}$.

Доказательство. В силу линейности оператора конечной разности, учитывая, что $S(m, k) = 0$ при $m < k$, получаем

$$\Delta_1^k(\psi_{k,r,z_0}; 0) = \Delta_1^k\left(\sum_{n=0}^{k+r} \frac{(k+r)!}{n!(k+r-n)!} z_0^n x^{k+r-n}\right) = (k+r)!\left(\sum_{n=0}^{k+r} \frac{z_0^n \Delta_1^k(x^{k+r-n}; 0)}{n!(k+r-n)!}\right) =$$

$$= k!(k+r)! \sum_{n=0}^{k+r} \frac{z_0^n S(k+r-n, k)}{n!(k+r-n)!} = k!(k+r)! \sum_{n=0}^{r} \frac{S(k+r-n, k)}{n!(k+r-n)!} z_0^n =$$

$$= k!(k+r)! P_{k,r}(z_0).$$

Перепишем уравнение (20), использовав определение конечной разности:

$$\Delta_1^k(\psi_{k,r,z_0}; 0) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} (z_0 + i)^{k+r} \binom{k}{i} = 0. \tag{21}$$

Лемма 8. *Пусть k — натуральное и r — нечетное натуральное число, тогда $z_0 = -k/2$ — корень уравнения* (21).

Доказательство. Пусть k — четное, тогда $k = 2l$, $z_0 = -l$, $(-1)^{k-i} = (-1)^i$. Следовательно, используя равенство $\sum_{n=0}^{m} x_n = \sum_{n=0}^{m} x_{m-n}$, получаем

$$2\Delta_1^k(\psi_{k,r,z_0}; 0) = \sum_{i=0}^{2l} (-1)^{2l-i} (-l+i)^{2l+r} \binom{2l}{i} + \sum_{i=0}^{2l} (-1)^i (-i+l)^{2l+r} \binom{2l}{2l-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{2l} (-1)^i \binom{2l}{i} \left[(i-l)^{2l+r} + (-i+l)^{2l+r}\right] = 0.$$

Поскольку $2l + r$ нечетно, выражение в квадратных скобках равно нулю.

Пусть k — нечетно, тогда $k = 2l+1$, $k + r$ — четное, $z_0 = -l - 1/2$, $(-1)^{k-i} = -(-1)^{-i}$. Проводя аналогичные преобразования, убеждаемся, что

$$2\Delta_1^k(\psi_{k,r,z_0}; 0) = \sum_{i=0}^{2l+1} (-1)^{2l+1-i} \binom{2l+1}{i} \left(-l - \frac{1}{2} + i\right)^{2l+1+r} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{2l+1} (-1)^i \binom{2l+1}{2l+1-i} \left(l + \frac{1}{2} - i\right)^{2l+1+r} =$$

$$= \sum_{i=0}^{2l+1} (-1)^i \binom{2l+1}{i} \left[\left(l + \frac{1}{2} - i\right)^{2l+1+r} - \left(-l - \frac{1}{2} + i\right)^{2l+1+r}\right] = 0.$$

Поскольку $2l + 1 + r$ четное, выражение в квадратных скобках равно нулю.

Лемма 9. *Пусть k — натуральное, r — нечетное, $z_0 = -k/2$ и δ — отличное от нуля действительное число. Тогда*

$$\Delta_1^k(\psi_{k,r,z_0+\delta}; 0) \neq 0, \tag{22}$$

где $\psi_{k,r,z_0+\delta}(x) = (x + z_0 + \delta)^{k+r}$.

Доказательство. Пусть $\delta > 0$. Используя интегральное представление (10), убеждаемся, что

$$\Delta_1^k(\psi_{k,r,z_0+\delta};0) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{(k+r)!}{r!}(z_0+\delta+t_1+\ldots+t_k)^r\, dt_1\ldots dt_k,$$

а так как r нечетно, а $\delta>0$, то

$$(z_0+\delta+t_1+\ldots+t_k)^r > (z_0+t_1+\ldots+t_k)^r.$$

В силу леммы 8

$$0 = \Delta_1^k(\psi_{k,r,z_0}) < \Delta_1^k(\psi_{k,r,z_0+\delta}).$$

Аналогично при $\delta<0$ $\Delta_1^k(\psi_{k,r,z_0+\delta})<0$.

Леммы 8 и 9 показывают, что уравнение $P_{k,r}(z)=0$ при нечетном r имеет единственный вещественный корень $z_0 = -k/2$. Осталось доказать, что $P'_{k,r}(-k/2)\neq 0$. В силу лемм 6 и 7 это равносильно тому, что при четном r

$$\Delta_1^k\left(\psi_{k,r,-k/2};0\right) \neq 0.$$

Опять используем интегральное представление (10). Тогда

$$\Delta_1^k\left(\psi_{k,r,-k/2};0\right) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{(k+r)!}{r!}\left(-\frac{k}{2}+t_1+\ldots+t_n\right)^r dt_1\ldots dt_n > 0,$$

так как под интегралом стоит неотрицательная непрерывная функция, отличная от тождественного нуля на области интегрирования.

Утверждение 1 доказано.

2.3. Вещественно-аналитические и голоморфные функции. Плоскость $\mathbb{R}^2$ вложим стандартным образом в $\mathbb{C}^2$:

$$(x,h) \to (x+io,\, h+io).$$

Лемма 10. *Пусть $f\colon [a,b]\to R^2$ — вещественно-аналитическая функция и $k\in\mathbb{N}$. Тогда в $\mathbb{C}^2$ существует область $D\supseteq\{(x+io,\, h+io)\colon h\geq 0,\ x\in[a,b],\ x+kh\in[a,b]\}$, в которую разность $\Delta_h^k(f;x)$ продолжается как голоморфная функция комплексных аргументов x и h.*

Доказательство. Пусть G — область из определения 1 и $\tilde{f}$ — голоморфное продолжение f в G. При $j=\overline{0,1,\ldots,k}$ положим

$$D_j := \{(x,h)\colon x\in\mathbb{C},\ h\in\mathbb{C},\ x+jh\in G\}.$$

Возьмем в качестве D компоненту связности $\bigcap_{j=0}^k D_j$, содержащую $(0,0)$. Заменив в правой части формулы (2) f на $\tilde{f}$ и (x_0,h) на комплексные (x,h) из D, получим искомое продолжение разности $\Delta_h^k(f;x)$. При этом голоморфность полученного продолжения следует из голоморфности $\tilde{f}(x+jh)$.

Следующая лемма представляет собой известную подготовительную теорему Вейерштрасса.

Лемма 11. *Пусть функция $f(z;w)$ голоморфна в связной окрестности U точки $(0,0)\in\mathbb{C}^2$, $f(0,0)=0$, $f(z;0)\neq 0$ в U. Тогда в некотором бикруге*

$$V = \{(z,w)\colon |z|<r,\ |w|<R\} \subseteq U$$

справедливо представление

$$f(z;w) = (z^n + c_1(w)z^{n-1}+\ldots+c_n(w))\,\varphi(z;w), \tag{23}$$

где n — *порядок нуля функции* $f(z;0)$ *в нуле, функции* $c_i(w)$, $1 \le i \le n$, *голоморфны в* $\{w : |w| < R\}$, $\varphi(z;w)$ — *голоморфна в* V *и не обращается там в нуль. Функции* $c_i(w)$, $1 \le i \le n$, *и* $\varphi(z,w)$ *однозначно определяются функцией* $f(w)$.

***Замечание* 2.** Полином в правой части (23) будем называть полиномом Вейерштрасса функции $f(z;w)$ (по переменной z). Пусть выполнены условия предыдущей леммы. Представим $f(z;w)$ в окрестности нуля в виде ряда по однородным многочленам

$$f(z,w) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(z;w), \qquad p_i(z;w) = \sum_{l+s=i} a_{ls} z^l w^s, \tag{24}$$

аналогично для полинома Вейерштрасса

$$z^n + \sum_{i=1}^{n} c_i(w) z^{n-i} = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(z;w). \tag{25}$$

Пусть $p(z;w)$ и $Q(z;w)$ — первые отличные от нуля однородные полиномы в (24) и (25) соответственно. Тогда справедливо равенство

$$p(z;w) = \varphi(0;0)\,Q(z;w). \tag{26}$$

Для доказательства разложим $\varphi(z;w)$ по однородным полиномам

$$\varphi(z;w) = \sum_{i=0}^{\infty} M_i(z;w).$$

Тогда из (23) следует

$$p_i(z;w) = \sum_{l+s=i} Q_l(z;w) M_s(z;w),$$

откуда с учетом равенства $M_0(z;w) = \varphi(0;0) \ne 0$ получаем (26).

***Замечание* 3.** Если f — вещественно-аналитическая функция, то и c_i, $1 \le \le i \le n$, и φ также можно считать вещественно-аналитическими функциями.

Лемма 12. *Пусть* $f_i : [0, a_i] \to \mathbb{R}$ — *вещественно-аналитические функции,* $a_i > 0$, $i = 1, 2$. *Тогда существует* $\varepsilon = \varepsilon(f_1; f_2) > 0$ *такое, что имеет место одно и только одно из соотношений*

$$\forall x \in (0, \varepsilon): \ f_1(x) < f_2(x),$$

$$\forall x \in (0, \varepsilon): \ f_1(x) = f_2(x),$$

$$\forall x \in (0, \varepsilon): \ f_1(x) > f_2(x).$$

Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой единственности аналитических функций.

3. Доказательство основной теоремы. Отметим, что в случае $f(x) = P(x)$, где $P(x)$ — полином степени не выше k, аналитичность $\omega_k(\delta)$ очевидна. Далее считаем, что $f(x)$ не является полиномом степени $\le k$. При таком предположении M_k — конечное непустое множество, а $m_k > 0$.

Если множество M_k содержит более одного элемента, то существует конечная последовательность точек $\{t_i\}_{i=0}^{n}$, $n \ge 2$, $a := t_0 < \ldots < t_n := b$, такая, что при $1 \le i \le n$ $[t_{i-1}, t_i] \cap M_k$ одноточечно и при $i \ne 0$, $i \ne n$ $t_i \notin M_k$.

Обозначим через x_i единственную точку множества M_k, принадлежащую $[t_i, t_{i+1}]$, $0 \le i \le n-1$. Пусть

$$\delta_1 := \frac{1}{k}\min\left|t_i - x_j\right|, \quad 1 \le i \le n-1, \quad 0 \le j \le n-1;$$

из свойств последовательности $\{t_i\}_{i=0}^{n}$ следует, что $\delta_1 > 0$. Выберем $\delta_0 \in (0, \delta_1)$ так, чтобы выполнялось (13) и (14).

Произвольному $\delta \in (0, \delta_0)$ соответствует δ_k-экстремальная пара точек x', x''. В силу (13) для некоторого j_0 $x_{j_0} \in [x', x'']$. Если $j = 0$, то $t_0 \le x' \le x_{j_0} \le \le x''$, а из (14) $x'' - x_{j_0} \le k\delta < k\delta_0 \le t_1 - x_{j_0}$. Следовательно, $[x', x''] \subseteq [t_0, t_1]$ и, значит,

$$\omega_k(f;\delta) = \left|\Delta_\delta^k(f;x')\right| \le \omega_k(f;\delta;[x_0,x_1]) \le \max_{1\le i\le n}\omega_k(f;\delta;[t_{i-1},t_i]).$$

Поскольку обратное неравенство очевидно, для $j_0 = 0$

$$\omega_k(f,\delta) = \max_{1\le i\le n}\omega_k(f;\delta;[t_{i-1},t_i]).$$

При $0 < j_0 < n-1$ и $j_0 = n-1$ это равенство доказывается аналогично. Согласно лемме 12, если при всех $i = \overline{1,\ldots,n}$ функции $\omega_k(f;\delta;[t_{i-1},t_i])$ аналитичны в нуле, то $\omega_k(f;\delta;[a,b])$ — также функция, аналитическая в нуле. Поэтому теорему достаточно доказать для случая одноточечного M_k.

Пусть $M_k = \{x_0\}$. Рассмотрим вначале случай, когда x_0 совпадает с одним из концов отрезка $[a,b]$. При $x_0 = a$ из (13) следует $x' = a$, а при $x_0 = b$ — соответственно $x'' = b$.

Для удобства можно полагать, что $f^{(k)}(x_0) = m_k > 0$. (Если $f^{(k)}(x_0) = -m_k$, то будем рассматривать функцию $(-f(x))$, что не влияет на $\omega_k(\delta)$.) Если $x_0 = = a$, то на некотором отрезке $[a, a+\varepsilon]$ $f^{(k)}(x) > 0$ и монотонно убывает. Тогда, как известно [4, с. 160],

$$\omega_k(\delta) = \Delta_\delta^k(f;a)$$

и аналитичность $\omega_k(\delta)$ следует из определения k-й разности. Случай $x_0 = b$ сводится к рассмотренному заменой переменной $x \to b + a - x$. Осталось рассмотреть случай $x_0 \in (a,b)$. Положим $\delta_1 = \dfrac{1}{k}\min\left(|x_0 - a|, |x_0 - b|\right)$. Поскольку $x_0 \in (a,b)$, то $\delta_1 > 0$. Выберем $\delta_0 \in (0, \delta_1)$ так, чтобы выполнялось (13) и (14). Пусть $\delta \in (0, \delta_0)$ и x', x'' — пара δ_k-экстремальных точек. Тогда $[x', x''] \subsetneq (a,b)$ и согласно лемме 5 $x_0 \in [x', x'']$. В точке x_0 достигается максимум $f^{(k)}(x)$ и, следовательно, $f^{(k+1)}(x_0) = 0$. А так как $f(x)$ не является полиномом степени $\le k$, то $f^{(k+1)}(x)$ — аналитическая функция, не являющаяся тождественным нулем. Следовательно, в некоторой ε-окрестности точки x_0 $f^{(k+1)}(x) \ne 0$ при $x \ne x_0$. Тогда согласно лемме 3 $x_0 \in (x', x'')$ (если $0 < < \delta < \varepsilon/k$). Кроме того, в силу (14)

$$x'' - x' = k\delta.$$

Положим $t := x' - x_0$ и покажем, что в некоторой окрестности нуля t — однозначная аналитическая функция переменной δ. Этого достаточно для аналитичности $\omega_k(\delta)$.

Согласно лемме 2

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f'(x'+i\delta) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f'(x_0+t+i\delta) = 0. \tag{27}$$

Рассмотрим вещественно-аналитическую функцию двух переменных

$$F(t;\delta) := \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i} f'(x_0+t+i\delta). \tag{28}$$

В некоторой окрестности начала координат функцию $F(t;\delta)$ можно представить рядом вида

$$F(t;\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\delta)t^n.$$

Поскольку

$$q_n(\delta) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n F}{\partial t^n}\bigg|_{t=0},$$

после дифференцирования (28) находим

$$q_n(\delta) = \frac{1}{n!}\Delta_\delta^k(f^{n+1};x_0). \tag{29}$$

Найдем разложение $q_n(\delta)$ в ряд Маклорена. Пусть в интервале $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p(x-x_0)^p.$$

Тогда для любого $n+1 \in \mathbb{N}$

$$f^{(n+1)}(x) = \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p(p)_{n+1}(x-x_0)^{p-n-1}, \tag{30}$$

где $(p)_{n+1} := p(p-1)\ldots(p-n)$.

Из (29), (30) и определения k-й разности имеем

$$q_n(\delta) = \frac{1}{n!}\sum_{p=n+1}^{\infty} a_p(p)_{n+1}\Delta_\delta^k(\varphi_{p-n-1};0), \tag{31}$$

где $\varphi_{p-n-1}(x) = x^{p-n-1}$.

Легко видеть, что

$$\Delta_\delta^k(\varphi_p;0) = \left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}(i)^p\right)\delta^p = k!S(p,k)\delta^p, \tag{32}$$

где $S(p,k)$ — числа Стирлинга второго рода. Поскольку $S(p,k)=0$ при $p<$ $<k$, из (31) и (32) получаем

$$q_n(\delta) = \frac{k!}{n!}\sum_{p=n+1+k}^{\infty} a_p(p)_{n+1}S(p-n-1,k)\delta^{p-n-1}. \tag{33}$$

Из (33) следует, что при любом n функция $q_n(\delta)$ имеет в нуле нуль порядка $\geq k$. Предположим, что $a_{k+2}\neq 0$. Тогда первый ненулевой член ряда $q_1(\delta)$ есть

$$\frac{k!}{n!}a_{k+2}(k+2)_2S(k,k)\delta^k = \frac{(k+2)!}{n!}a_{k+2}\delta^k \neq 0,$$

т. е. порядок нуля в нуле равен k. Уравнение (27) можно переписать в виде $F(t;$ $\delta)=0$. Разделив на δ^k, получим

$$\Phi(t;\delta) = 0, \tag{34}$$

где $\delta^k\Phi(t;\delta) \equiv F(t;\delta)$. $\Phi(t;\delta)$ — вещественно-аналитическая функция, для которой в окрестности начала координат $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} \neq 0$. Таким образом, к (34) применима теорема о неявной функции, откуда следует аналитичность $t(\delta)$, а значит, и $\omega_k(\delta)$.

В общем случае при $a_{k+2} = 0$ существует натуральное $m \geq 2$, для которого

$$a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots = a_{k+2m-1} = 0, \qquad a_{k+2m} \neq 0,$$
$$\operatorname{sign} a_{k+2m} = -\operatorname{sign} a_k. \tag{35}$$

Действительно, если при всех натуральных j $a_{k+j} = 0$, то $f(x)$ — полином степени $\leq k$, что противоречит предположению, принятому в начале доказательства. Следовательно, при некотором $j \geq 1$ $a_{k+j} \neq 0$. Система (35) в этом случае дает необходимые условия существования экстремума $f^{(k)}(x)$ в точке x_0 (см., например, [9, с. 287]). Из (35) следует, что при $0 \leq n \leq 2m-1$ первый ненулевой член разложения $q_n(\delta)$ в ряд (33) будет содержать множитель a_{k+2m}:

$$q_n(\delta) = \frac{k!}{n!}a_{k+2m}(k+2m)_{n+1}S(k+2m-n-1,k)\delta^{k+2m-n-1} +$$
$$+ \frac{k!}{n!}\sum_{p=k+2m+1} a_p(p)_{n+1}S(p-n-1,k)\delta^{p-n-1}. \tag{36}$$

Следовательно, при $0 \leq n \leq 2m-1$ первый ненулевой член разложения функции $t^n q_n(\delta)$ имеет степень (суммарную по t и δ) $k+2m-1$.

При $n \geq 2m$ степень первого члена разложения $t^n q_n(\delta)$ не меньше, чем

$$n + k \geq 2m + k. \tag{37}$$

Разложим $F(t;\delta)$ в ряд по однородным многочленам в нуле

$$F(t;\delta) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{l+s=i}\left(\frac{\partial^i F}{\partial t^l\partial\delta^s}\right)_{\substack{t=0\\ \delta=0}}\frac{t^l\delta^s}{l!s!}.$$

Пусть $P(t;\delta)$ — первый отличный от нуля многочлен в этом разложении. Учитывая (36) и (37), видим, что

$$P(t;\delta) = k!(k+2m)!a_{k+2m}\delta^k\sum_{n=0}^{2m-1}\frac{S(k+2m-n-1,k)}{(k+2m-n-1)!n!}t^n\delta^{2m-n-1},$$
$$\deg P(t;\delta) = k+2m-1. \tag{38}$$

Как и ранее, удобно перейти к функции $\Phi(t;\delta)$, $\Phi(t;\delta)\delta^k = F(t;\delta)$. Для функции $\Phi(t;\delta)$ выполнены все условия леммы 11, причем $n = 2m-1$. Обозначим через $W(t;\delta)$ полином Вейерштрасса функции $\Phi(t;\delta)$ по переменной t, умноженной на постоянную $\dfrac{S(k,k)}{k!(2m-1)!}$. Тогда, используя равенства (23), (26) и (38), можно утверждать, что

$$W(t;\delta) = \sum_{n=0}^{2m-1}\frac{S(k+2m-n-1,k)}{(k+2m-n-1)!n!}t^n\delta^{2m-n-1}k_n(\delta),$$

где функции $k_n(\delta)$ аналитичны в некотором круге $|\delta| < R$, причем $k_n(0) = 1$.

При $\delta \neq 0$

$$W(t;\delta) = \delta^{2m-1} \sum_{n=0}^{2m-1} \frac{S(k+2m-n-1,\ k)}{(k+2m-n-1)!n!} \left(\frac{t}{\delta}\right)^n k_n(\delta).$$

Следовательно, при $\delta \neq 0$ уравнение $W(t;\delta) = 0$ равносильно уравнению

$$\sum_{n=0}^{2m-1} \frac{S(k+2m-n-1,\ k)}{(k+2m-n-1)!n!} z^n k_n(\delta) = 0, \tag{39}$$

где $z = t/\delta$.

Из (39) и утверждения 1 следует

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{t}{\delta} = -\frac{k}{2}. \tag{40}$$

Действительно, если (40) ложно, учитывая, что $x_0 \in [0, -k]$, можно найти последовательности $\delta_m \to 0$ и $t_m \to 0$, для которых $W(t_m; \delta_m) = 0$ и существует

$$\lim_{m \to \infty} \frac{t_m}{\delta_m} = x_0 \neq -\frac{k}{2}.$$

Поскольку $\lim_{m \to \infty} k_n(\delta_m) = 1$, то действительное число $x_0 \neq -k/2$ — корень уравнения (см. формулу (18)) $P_{k,2m-1}(z) = 0$, что противоречит утверждению 1.

Из леммы 11, примененной к функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S(k+2m-n-1,\ k)}{(k+2m-n-1)!n!} z^n k_n(\delta) = 0$$

в точке $z = -k/2$, $\delta = 0$, следует, что z — голоморфная функция δ в некоторой окрестности нуля. Отсюда следует голоморфность $t(\delta)$ и $\omega(\delta)$.

Теорема доказана.

1. *Перельман М. Я.* О модуле непрерывности аналитических функций // Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. наук. – 1941. – Вып. 12, № 83. – С. 62 – 86.
2. *Довгошей А. А., Потемкина Л. Л.* Условия аналитичности модуля непрерывности кусочно-аналитических функций // Допов. НАН України. – 2002. – № 7. – С. 16 – 20.
3. *Довгошей А. А., Потемкина Л. Л.* Модуль непрерывности кусочно-аналитических функций // Мат. заметки. – 2003. – **73**, № 1. – С. 63 – 76.
4. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
5. *Шевчук И. А.* Приближение полиномами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 223 с.
6. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986. – 743 с.
7. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. – М.: Мир, 1990. – 440 с.
8. *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и М. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1969. – Т.1. – 608 с.

Получено 16.07.2001,
после доработки — 04.11.2002