УДК 517.5

**А. И. Степанец** (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
**В. И. Рукасов** (Славян. пед. ун-т)

# НАИЛУЧШИЕ „СПЛОШНЫЕ" $n$-ЧЛЕННЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ $S_\varphi^p$

We find precise values of upper bounds of the best approximations of $q$-ellipsoids by polynomials of order $n$ in the spaces $S_\varphi^p$ in the case where the approximating polynomials are constructed on the basis of $n$-dimensional subsystems chosen from a given orthonormal system $\varphi$ in succession.

Знайдено точні значення верхніх меж найкращих наближень поліномами порядку $n$ $q$-еліпсоїдів у просторах $S_\varphi^p$ у випадку, коли наближаючі поліноми будуються за підсистемами розмірності $n$, що вибираються з даної ортонормованої системи $\varphi$ підряд.

**Определение и постановка задачи.** Пусть пространство $S_\varphi^p = S_\varphi^p(\mathfrak{X})$ порождено пространством $\mathfrak{X}$, системой $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и числом $p \in (0, \infty)$ (см. [1 – 5]) следующим образом.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное линейное комплексное пространство и $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — фиксированная счетная система в нем. Предположим, что для любой пары $x, y \in \mathfrak{X}$, в которой хотя бы один из векторов принадлежит $\varphi$, определено скалярное произведение $(x, y)$, удовлетворяющее условиям:

1) $(x, y) = \overline{(x, y)}$, где $\bar{z}$ — число, комплексно-сопряженное с $Z$;

2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$, $\lambda, \mu$ — произвольные числа;

3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Каждому элементу $f \in \mathfrak{X}$ сопоставляется система чисел $\hat{f}(k) = \hat{f}_\varphi(k)$ посредством равенств

$$\hat{f}(k) = \hat{f}_\varphi(k) = (f, \varphi_k), \quad k \in N,$$

и при данном фиксированном $p \in (0, \infty)$ полагается

$$S_\varphi^p = S_\varphi^p(\mathfrak{X}) = \left\{ f \in \mathfrak{X} \colon \sum_{k=1}^\infty \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p < \infty \right\}. \tag{1}$$

Элементы $x, y \in S_\varphi^p$ считаются тождественными, если при всех $k \in N$ выполняется равенство $\hat{x}_\varphi(k) = \hat{y}_\varphi(k)$. Для векторов $x, y \in S_\varphi^p$ расстояние между ними определяется соотношением

$$\rho(x, y)_p \overset{\text{df}}{=} \|x - y\|_p = \|x - y\|_{\varphi, p} =$$

$$= \left\|\widehat{(x-y)}_\varphi(\cdot)\right\|_{l_p} = \left( \sum_{k=1}^\infty \left|\hat{x}_\varphi(k) - \hat{y}_\varphi(k)\right|^p \right)^{1/p}.$$

Нулевым элементом пространства $S_\varphi^p$ считается тот вектор $\theta$, для которого $\hat{\theta}_\varphi(k) = 0$ при всех $k \in N$. Расстояние $\rho(\theta, x)$, $x \in S_\varphi^p$, называется нормой элемента $x$ и обозначается через $\|x\|_p$. Таким образом,

© А. И. СТЕПАНЕЦ, В. И. РУКАСОВ, 2003

$$\|x\|_p = \|x\|_{\varphi, p} = \rho(\theta, x)_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\hat{x}_\varphi(k)\right|^p\right)^{1/p}. \tag{2}$$

При любом $p \in (0, \infty)$ множество $S_\varphi^p$ — линейное метрическое пространство. Если $p \geq 1$, то норма, введенная равенством (2), удовлетворяет всем необходимым аксиомам, и тогда $S_\varphi^p$ — линейное нормированное пространство, содержащее ортонормированную систему $\varphi$.

Пусть, далее, $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная система комплексных чисел, $f \in \mathfrak{X}$ и

$$S[f] = S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k \tag{3}$$

— ряд Фурье элемента $f$ по системе $\varphi$. Если существует вектор $F \in \mathfrak{X}$, для которого

$$S[f] = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k, \tag{4}$$

т. е. когда

$$\hat{F}_\varphi(k) = \psi_k \hat{f}_\varphi(k), \quad k \in N, \tag{5}$$

то вектор $F$ называется $\psi$-интегралом вектора $f$ и записывается $F = \mathcal{J}^\psi f$. Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $\mathfrak{X}$, то через $\psi\mathfrak{N}$ обозначается множество $\psi$-интегралов всех элементов из $\mathfrak{N}$. В частности, если $\mathfrak{N} = U_\varphi^p$, где

$$U_\varphi^p = \left\{f \in S_\varphi^p : \|f\|_p \leq 1\right\} \tag{6}$$

— единичный шар в пространстве $S_\varphi^p$, то $\psi U_\varphi^p$ — множество $\psi$-интегралов всех элементов из $U_\varphi^p$. Отметим, что если

$$\psi_k \neq 0 \quad \forall k \in N, \tag{7}$$

то

$$\psi U_\varphi^p = \left\{f \in S_\varphi^p : \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\hat{f}_\varphi(k)}{\psi_k}\right|^p \leq 1\right\}, \tag{8}$$

т. е. множество $\psi U_\varphi^p$ является $p$-эллипсоидом в пространстве $S_\varphi^p$ с полуосями, равными $|\psi_k|$.

Если $f$ и $F$ связаны соотношением (4) (или (5)), то иногда удобно $f$ называть $\psi$-производной элемента $F$ и писать $D^\psi F = f$.

Пусть теперь $n \in N$, $\gamma_n$ — произвольный набор из $n$ натуральных чисел,

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k \varphi_k, \tag{9}$$

где $\alpha_k$ — некоторые комплексные числа. Величина

$$e_n(f)_p = e_n(f)_{\varphi, p} = \inf_{\alpha_k, \gamma_k} \left\|f - P_{\gamma_n}\right\|_p \tag{10}$$

называется наилучшим $n$-членным приближением элемента $f \in S_\varphi^p$ в пространстве $S_\varphi^p$; величины

$$e_n\left(\psi U^q_\varphi\right)_p = e_n\left(\psi U^q_\varphi; S^p_\varphi\right) = \sup_{f\in\psi U^q_\varphi} e_n(f)_p = \sup_{f\in\psi U^q_\varphi} \inf_{\alpha_k,\gamma_k} \left\| f - P_{\gamma_n} \right\|_p \qquad (11)$$

называются наилучшими $n$-членными приближениями множества $\psi U^q_\varphi$ в пространстве $S^p_\varphi$. Точные значения величин (11) найдены в [1–5]. В частности, там доказано следующее утверждение.

**Теорема А.** *Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — система чисел, удовлетворяющая условию (7) и такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} |\psi_k| = 0, \qquad (12)$$

*$p$ и $q$ — произвольные числа, $0 < q \le p$. Тогда при любом $n \in N$ справедливо равенство*

$$e^p_n\left(\psi U^q_\varphi\right)_p = \sup_{l>n}(l-n)\left(\sum_{k=1}^{l}\overline{\psi}_k^{-q}\right)^{-p/q} = (l^*-n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\overline{\psi}_k^{-q}\right)^{-p/q}, \qquad (13)$$

*где $\overline{\psi} = \{\overline{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ — перестановка в убывающем порядке последовательности $|\psi| = \{|\psi_k|\}_{k=1}^\infty$, а $l^*$ — некоторое натуральное число.*

В настоящей работе вместо величин $e_n(f)_p$, определяемых равенством (10), рассматриваются величины

$$\bar{e}_n(f)_p = \bar{e}_n(f)_{\varphi,p} = \inf_{k'}\inf_{\alpha_k}\left\| f - \sum_{k=k'}^{k'+n-1}\alpha_k\varphi_k \right\|_p, \qquad (14)$$

которые отличаются тем, что фигурирующие в равенстве (10) полиномы $P_{\gamma_n}$ на этот раз строятся по наборам из $n$ натуральных чисел, расположенных подряд.

Для величин

$$\bar{e}_n\left(\psi U^q_\varphi\right)_p = \bar{e}_n\left(\psi U^q_\varphi; S^p_\varphi\right) = \sup_{f\in\psi U^q_\varphi}\bar{e}_n(f)_p \qquad (15)$$

устанавливается следующий аналог теоремы А.

**Теорема 1.** *Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — система комплексных чисел, для которых последовательность $|\psi_k|$, $k = 1, 2, \ldots$, не возрастая, стремится к нулю. Тогда для любых чисел $p$ и $q$ таких, что $0 < q \le p$, при любом $n \in N$ выполняется равенство*

$$\bar{e}_n\left(\psi U^q_\varphi\right)_p = (l^*-1)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{l^*}\left|\psi_{(k-1)n+1}\right|^{-q}\right)^{-1/q},$$

*где $l^*$ — натуральное число, для которого*

$$\sup_{l>n}(l-n)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{l}\left|\psi_{(k-1)n+1}\right|^{-q}\right)^{-1/q} = (l^*-1)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{l^*}\left|\psi_{(k-1)n+1}\right|^{-q}\right)^{-1/q}. \qquad (16)$$

*Такое число $l^*$ всегда существует.*

***Доказательство.*** Прежде всего заметим, что при любом $p \in (0, \infty)$ для любого $f \in S^p_\varphi$

$$\tilde{e}_n^p(f) = \|f\|_p^p - \sup_{k'} \sum_{k=k'}^{k'+n-1} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p. \tag{17}$$

Действительно, согласно (2)

$$\left\| f - \sum_{k=k'}^{k'+n-1} \alpha_k \varphi_k \right\|_p^p = \sum_{k \overline{\in} \gamma'_n} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p + \sum_{k \in \gamma'_n} \left|\hat{f}_\varphi(k) - \alpha_k\right|^p \geq$$

$$\geq \sum_{k \overline{\in} \gamma'_n} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p = \|f\|_p^p - \sum_{k \in \gamma'_n} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p. \tag{18}$$

Здесь и далее $\gamma'_n$ обозначает набор целых чисел из промежутка $[k', k'+n-1]$. Следовательно,

$$\inf_{\alpha_k} \left\| f - \sum_{k=k'}^{k'+n-1} \alpha_k \varphi_k \right\|_p^p \geq \|f\|_p^p - \sum_{k \in \gamma'_n} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p. \tag{19}$$

Если положить $\alpha_k = \hat{f}_\varphi(k)$, то получим неравенство, противоположное (19), что вместе с (14) и означает справедливость равенства (17). Таким образом, согласно (15) и (17) имеем (если положить $m_k = \left|\hat{f}_\varphi^\psi(k)\right|^q$)

$$\tilde{e}_n^p\left(\psi U_\varphi^q\right)_p = \sup_{f \in \psi U_\varphi^q} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p - \sup_{k'} \sum_{k \in \gamma'_n} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p \right) =$$

$$= \sup_{\sum_{k=1}^{\infty} \left|\hat{f}_\varphi^\psi(k)\right| \leq 1} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^p \left|\hat{f}_\varphi^\psi(k)\right|^p - \sup_{k'} \sum_{k \in \gamma'_n} |\psi_k|^p \left|\hat{f}_\varphi^\psi(k)\right|^p \right) \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{\sum_{k=1}^{\infty} m_k \leq 1 \\ m_k \geq 0}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^p m_k^r - \sup_{k'} \sum_{k \in \gamma'_n} |\psi_k|^p m_k^r \right), \quad r = \frac{p}{q}. \tag{20}$$

Для нахождения значения правой части этого неравенства потребуется следующая лемма.

**Лемма.** *Пусть* $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— произвольная невозрастающая последовательность положительных чисел, для которой*

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_k = 0, \tag{21}$$

*и* $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность неотрицательных чисел такая, что*

$$|m| \overset{\text{df}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} m_k \leq 1. \tag{22}$$

*(В таком случае записываем* $\alpha \in A$ *и, соответственно,* $m \in \mathcal{M}$*). Пусть, далее, при каждых* $\alpha \in A$, $m \in \mathcal{M}$, $r > 0$ *и* $n \in N$

$$F_{n,r}(\alpha, m) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k^r - \sup_{k'} \sum_{k \in \gamma'_n} \alpha_k m_k^r \tag{23}$$

*и*

$$\sigma_{n,r}(\alpha) = \sup_{m\in\mathcal{M}} F_{n,r}(\alpha, m). \tag{24}$$

*Тогда при любых* $r \geq 0$ *и* $n \in N$ *выполняется равенство*

$$\sigma_{n,r}(\alpha) = \sup_{q>1} (q-1)\left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_{(i-1)n+1}^{-1/r}\right)^{-r}. \tag{25}$$

*Верхняя грань в правой части* (25) *всегда достигается при некотором значении* $q^*$. *При этом для последовательности* $m' = \{m'_k\}$ *из* $\mathcal{M}$,

$$m'_k = \begin{cases} \alpha_{(i-1)n+1}^{-1/r}\left(\sum\limits_{j=1}^{q^*} \alpha_{(j-1)n+1}^{-1/r}\right)^{-1}, & k = (i-1)n+1, \quad i = 1, 2, \ldots, q^*, \\ 0 & \text{— при остальных значениях } k, \end{cases} \tag{26}$$

*выполняется равенство*

$$F_{n,r}(\alpha, m') = (q^*-1)\left(\sum_{i=1}^{q^*} \alpha_{(i-1)n+1}^{-1/r}\right)^{-r}. \tag{27}$$

***Доказательство.*** Пусть $m$ — произвольная последовательность из $\mathcal{M}$. Согласно (22)

$$\sum_{k\in\gamma'_n} \alpha_k m_k^r \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k^r \leq \alpha_1 \quad \forall k' \in N, \quad r \in (0, 1].$$

Поэтому всегда можно указать по крайней мере одно значение $k^*$, для которого

$$\sup_{k'} \sum_{k=k'}^{k'+n-1} \alpha_k m_k^r = \sum_{k=k^*}^{k^*+n-1} \alpha_k m_k^r \overset{\text{df}}{=} S = S_{n,r}(m). \tag{28}$$

Отметив это, сумму

$$\sum = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k^r$$

представим в виде

$$\sum = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(\alpha, m), \qquad A_i(\alpha, m) = \sum_{k=in+1}^{(i+1)n} \alpha_k m_k^r \tag{29}$$

и положим

$$M_i = \sum_{k=in+1}^{(i+1)n} m_k, \qquad i = 0, 1, \ldots . \tag{30}$$

Ясно, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} M_i = |m| \tag{31}$$

и в силу (28)

$$A_i(\alpha, m) \leq S, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots . \tag{32}$$

Далее построим последовательность $\overline{m} = \{\overline{m}_k\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом.

Если при данном $i$

$$\alpha_{in+1} M_i^r \leq S,$$

то полагаем

$$\overline{m}_{in+1} = M_i;$$

если же

$$\alpha_{in+1} M_i^r > S,$$

то положим

$$\overline{m}_{in+1} = \overline{M}_i,$$

где значение $\overline{M}_i$ выбрано из условия

$$\alpha_{in+1} \overline{M}_i^r = S.$$

Таким образом определяются значения $\overline{m}_k$ при $k = in + 1$, $i = 1, 2, \ldots$. В оставшихся точках $k$ положим $\overline{m}_k \equiv 0$.

Учитывая, что при $r \geq 1$ для любых чисел $a_1, a_2, x_1$ и $x_2$, удовлетворяющих условиям $a_1 \geq a_2 > 0$, $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$, выполняется неравенство

$$a_1 x_1^r + a_2 x_2^r \leq a_1 (x_1 + x_2)^r,$$

заключаем, что всегда

$$\alpha_{in} \overline{m}_{in+1}^r \geq A_i(\alpha, m).$$

Следовательно, согласно (29)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k^r \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{m}_k^r$$

и в то же время при любом $k' \in N$

$$\sum_{k=k'}^{k'+n-1} \alpha_k \overline{m}_k \leq S.$$

Поэтому

$$F_{n,r}(\alpha, m) \leq F_{n,r}(\alpha, \overline{m}), \tag{33}$$

причем согласно построению и соотношению (31)

$$|\overline{m}| = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{m}_k \leq |m|. \tag{34}$$

Таким образом, показано, что для любой последовательности $m \in \mathcal{M}$ можно указать последовательность $\overline{m} \in \mathcal{M}$ вида

$$\overline{m}_k = \begin{cases} \mu_{in+1}, & k = in+1, \quad i = 0, 1, \ldots; \\ 0 & \text{— при остальных значениях } k, \end{cases} \tag{35}$$

где $\mu_k$ — некоторые неотрицательные числа, для которой выполняется соотношение (33).

Поэтому если через $\mathcal{M}'$ обозначим подмножество из $\mathcal{M}$ последовательностей $\overline{m} = \{\overline{m}_k\}_{k=1}^{\infty}$ вида (35), то вследствие (33) будем иметь

$$\sigma_{n,r}(\alpha) = \sup_{m \in \mathcal{M}'} F_{n,r}(\alpha, m). \tag{36}$$

Если $m \in \mathcal{M}'$, то функционал $F_{n,r}(\alpha, m)$ имеет вид

$$F_{n,r}(\alpha, m) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{(i-1)n+1} m_i^r - \sup_i \alpha_{(i-1)n+1} m_i^r. \tag{37}$$

Положим $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$a_k = \alpha_{(k-1)n+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{38}$$

и

$$e_{1,r}(a, m) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k m_k^r - \sup_k a_k m_k^r, \tag{39}$$

где $m_k$ — члены некоторой последовательности из $\mathcal{M}$. Тогда с учетом (22) – (25) будем иметь

$$\sigma_{n,r}(\alpha) = \sup_{m \in \mathcal{M}} e_{1,r}(a, m) \overset{\mathrm{df}}{=} e_{1,r}(a). \tag{40}$$

Для нахождения величины $e_{1,r}(a)$ применима лемма 5.1 из [1] (§ 11.5) (см. также [3]), в силу которой

$$e_{1,r}(a) = \sup_{q>1} (q-1) \left( \sum_{k=1}^{q} a_k^{-1/r} \right)^{-r}. \tag{41}$$

Согласно (38)

$$\sum_{k=1}^{q} a_k^{-1/r} = \sum_{k=1}^{q} \alpha_{(k-1)n+1}^{-1/r}. \tag{42}$$

Поэтому, объединяя соотношения (40) – (42), получаем равенство (25).

Существование числа $q^*$, о котором говорится в лемме, следует из ограниченности величин

$$(q-1) \left( \sum_{i=1}^{q} \alpha_{(i-1)n+1}^{-1/r} \right)^{-r}.$$

Остается проверить равенство (27). Согласно (26) и (37) имеем

$$F_{n,r}(\alpha, m') = \sum_{i=1}^{q^*-1} \alpha_{(i-1)n+1} \alpha_{(i-1)n+1}^{-1/r} \left( \sum_{j=1}^{q^*} \left( \alpha_{(j-1)n+1}^{-1/r} \right)^{-1} \right)^{r} =$$

$$= (q^*-1) \left( \sum_{i=1}^{q^*} \alpha_{(i-1)n+1}^{-1/r} \right)^{-r}.$$

Лемма доказана. Продолжим доказательство теоремы. Полагая $\alpha_k = |\psi_k|^p$, видим, что для нахождения значений правой части (20) применима лемма, согласно которой

$$\tilde{e}_n^p \left( \psi U_\varphi^q \right)_p \leq \sup_{l>1} (l-1) \left( \sum_{k=1}^{l} \left| \psi_{(k-1)n+1} \right|^{-q} \right)^{-p/q}, \tag{43}$$

причем существует значение $l^*$, реализующее верхнюю грань правой части этого соотношения. Остается показать, что это соотношение является равенством. Для этого достаточно указать в множестве $\psi U_\varphi^q$ элемент $f_*$, для которого выполняется равенство

$$\tilde{e}_n^p(f_*) = (l^* - 1)\left(\sum_{k=1}^{l^*} \left|\psi_{(k-1)n+1}\right|^{-q}\right)^{-p/q}. \tag{44}$$

Для этого, исходя из соотношения (26), полагаем

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k,$$

где числа $c_k$ подобраны так, что

$$c_k^q = \begin{cases} \left|\psi_{(i-1)n+1}\right|^{-q}\left(\sum_{j=1}^{l^*}\left|\psi_{(j-1)n+1}\right|^{-q}\right)^{-1}, & k=(i-1)n+1, \quad i=1,2,\ldots,l^*; \\ 0 & \text{— при остальных значениях } k. \end{cases} \tag{45}$$

Элемент $h$, являясь линейной комбинацией конечного числа элементов системы $\varphi$, принадлежит пространствам $S_\varphi^p$ при любых $p > 1$, а так как

$$\|h\|_{\varphi,q}^q = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^q = 1,$$

то $h \in U_\varphi^q$. Следовательно, полагая $f_* = \mathcal{J}^\psi h$, замечаем, что $f_* \in \psi U_\varphi^q$ и $f_*^\psi = h$.

В силу (45)

$$c_k^p = \begin{cases} \left|\psi_{(i-1)n+1}\right|^{-p}\left(\sum_{j=1}^{l^*}\left|\psi_{(j-1)n+1}\right|^{-q}\right)^{-p/q}, & k=(i-1)n+1, \quad i=1,2,\ldots,l^*; \\ 0 & \text{— при остальных значениях } k. \end{cases}$$

Следовательно,

$$|\psi_k|^p c_k^p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{l^*}\left|\psi_{(j-1)n+1}\right|^{-q}\right)^{-p/q}, & k=(i+1)n+1, \quad i=1,2,\ldots,l^*; \\ 0 & \text{— при остальных значениях } k. \end{cases}$$

Поэтому, вычисляя значение $\tilde{e}_n^p(f_*)$ согласно формуле (17), получаем равенство (44). Теорема доказана.

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 2. – 468 с.

2. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств $S_\varphi^p$ // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 392 – 416.

3. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств $S_\varphi^p$ в разных метриках // Там же. – № 8. – С. 1121 – 1146.

4. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств $S^p$. – Киев, 2001. – 85 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2001.2).

5. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Прямые и обратные теоремы приближения функций в пространстве $S^p$ // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 106 – 124.

Получено 30.12.2002