УДК 517.928

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
Р. І. Петришин, Т. М. Сопронюк (Чернівец. нац. ун-т)

ПОБУДОВА ІНТЕГРАЛЬНОГО МНОГОВИДУ БАГАТОЧАСТОТНОЇ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ З ФІКСОВАНИМИ МОМЕНТАМИ ІМПУЛЬСНОЇ ДІЇ

We determine a class of multifrequency resonance systems with pulse action for which an integral manifold exists. We construct a function that determines a discontinuous integral manifold and investigate its properties.

Визначено деякий клас багаточастотних резонансних систем з імпульсною дією, для якого існує інтегральний многовид. Побудовано функцію, яка визначає розривний інтегральний многовид, і досліджено її властивості.

Якісне дослідження розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь істотно спрощується, якщо вони належать інтегральному многовиду меншого розміру, ніж початковий фазовий простір, тому вивчення умов існування таких многовидів є актуальним. Фундаментальні ідеї М. М. Боголюбова [1] про інтегральні многовиди тороїдального типу було поширено на диференціальні рівняння в різних функціональних просторах, в тому числі і на імпульсні коливні системи зі сталими частотами [2, 3]. У даній статті аналогічне питання вивчається для нелінійних багаточастотних систем з імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Такого типу системи виникають при переході до амплітудно-фазових змінних у рівняннях руху слабко зв'язаних осциляторів з повільно змінними частотами під дією імпульсних сил. Тут використано розвинену в [4] методику побудови інтегрального многовиду для багаточастотних резонансних систем без імпульсної дії та рівномірні оцінки осциляційних інтегралів і сум від розривних функцій, досліджені в роботах [5 – 7].

1. Постановка задачі. Будемо розглядати багаточастотну систему $n+m$ рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу $t_\nu = \varepsilon^{-1}\tau_\nu$ вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x,\tau) + \tilde{a}(x,\varphi,\tau) + \varepsilon A(x,\varphi,\tau,\varepsilon),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x,\varphi,\tau,\varepsilon), \qquad \tau \neq \tau_\nu, \tag{1}$$

$$\Delta x\big|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon p(x,\tau_\nu) + \varepsilon\tilde{p}(x,\varphi,\tau_\nu) + \varepsilon^2 P(x,\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),$$

$$\Delta\varphi\big|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon q(x,\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),$$

в якій $x \in \mathcal{D} \subset R^n$, $\varphi \in R^m$, $(0,\varepsilon_0] \ni \varepsilon$ — малий параметр, $\tau = \varepsilon t \in R$ — „повільний час", $\tau_{\nu+1} - \tau_\nu = \theta\varepsilon$ для всіх $\nu \in Z$, Z — множина всіх цілих чисел, θ — додатна стала, $\mathcal{D}$ — обмежена область, функції a, $\tilde{a}$, p, $\tilde{p}$, q, A, P, ω і b визначено на множині $\overline{G} = \mathcal{D} \times R^m \times R \times (0,\varepsilon_0]$, 2π-періодичні по кожній компоненті φ_ν, $\nu = \overline{1,m}$, вектора φ і належать певним класам гладких функцій.

Оскільки середні по φ в кубі періодів функцій $\tilde{a}(x,\varphi,\tau)$, $\tilde{p}(x,\varphi,\tau)$ можна віднести відповідно до функцій $a(x,\tau)$, $p(x,\tau)$, то будемо вважати їх тотожно рівними нулю.

Позначимо через $W_l(\tau)$ і $W_l^*(\tau)$ відповідно матрицю

$$W_l(\tau) = \left(\frac{d^j}{d\tau^j}\omega_\nu(\tau)\right)_{j,\nu=1}^{l,m}$$

розмірності $l \times m$ і транспоновану до неї. Припустимо, що функції

$$\frac{d^j}{d\tau^j}\omega_\nu(\tau), \quad \nu = \overline{1,m}, \quad j = \overline{0,l}, \quad l \geq m,$$

рівномірно неперервні на R і

$$\left\|\left(W_l^*(\tau)W_l(\tau)\right)^{-1}W_l^*(\tau)\right\| \leq \sigma_1 = \text{const} \quad \forall\tau\in R. \tag{2}$$

Накладемо наступні обмеження:

$$[a; \tilde{a}; p; \tilde{p}; A; b; q] \in C^1_{x,\varphi,\tau}(\overline{G}, \sigma_1),$$

$$\sum_k \left[\|k\|^3 \sup_{\overline{G}}\|r_k\| + \|k\|^2\left(\sup_{\overline{G}}\left\|\frac{\partial r_k}{\partial\tau}\right\| + \sup_{\overline{G}}\left\|\frac{\partial r_k}{\partial x}\right\|\right)\right] \leq \sigma_1, \tag{3}$$

$$\sum_k \left[\|k\|\sup_{\overline{G}}\|c_k\| + \sup_{\overline{G}}\left\|\frac{\partial c_k}{\partial\tau}\right\| + \sup_{\overline{G}}\left\|\frac{\partial c_k}{\partial x}\right\|\right] \leq \sigma_1,$$

матриця $S(x,\tau) = \partial(a(x,\tau); p(x,\tau)) / \partial x$ одностайно по $\tau \in R$ рівномірно неперервна по $x \in \mathcal{D}$. Останнє означає, що для довільного $\delta_1 > 0$ існує таке $\delta_2 = \delta_2(\delta_1) > 0$, не залежне від x, τ, що

$$\|S(x,\tau) - S(y,\tau)\| < \delta_1 \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad y \in \mathcal{D}, \quad \tau \in R$$

при $\|x - y\| < \delta_2$.

Зазначимо, що в умовах (3) $C^1_z(\overline{G}, \sigma_1)$ — множина вектор-функцій, які при кожному фіксованому $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ мають неперервні і обмежені в $\overline{G}$ деякою додатною сталою σ_1 частинні похідні по z першого порядку; $c_k = c_k(x,\tau,\varepsilon)$, $r_k = r_k(x,\tau,\varepsilon)$ — коефіцієнти Фур'є відповідно функцій $c(x,\varphi,\tau,\varepsilon) = [\tilde{a}(x,\varphi,\tau); b(x,\varphi,\tau,\varepsilon)]$, $r(x,\varphi,\tau,\varepsilon) = [\tilde{p}(x,\varphi,\tau); q(x,\varphi,\tau,\varepsilon)]$; $k = (k_1, \ldots, k_m)$ — вектор з цілочисловими координатами. Під нормою матриці розуміємо суму модулів її елементів.

Припустимо, що існує визначений для всіх $(\tau,\varepsilon) \in R \times (0, \varepsilon_0]$ розв'язок $\overline{x} = \overline{x}(\tau,\varepsilon)$ системи першого наближення для повільних змінних

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = a(\overline{x},\tau), \quad \tau \neq \tau_\nu,$$
$$\Delta\overline{x}\Big|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon p(\overline{x},\tau_\nu), \tag{4}$$

який належить $\mathcal{D}$ разом із своїм ρ-околом, $\rho = \text{const} > 0$, а відповідна цьому розв'язку система рівнянь у варіаціях

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial x}a(\overline{x}(\tau,\varepsilon),\tau)z, \quad \tau \neq \tau_\nu,$$
$$\Delta z\Big|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}p(\overline{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\tau_\nu)z$$

гіперболічна рівномірно по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Не втрачаючи загальності, будемо припускати, що матриці

$$H(\tau,\varepsilon) \equiv \frac{\partial a(\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau)}{\partial x}, \quad G(\tau,\varepsilon) \equiv \frac{\partial p(\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau)}{\partial x}$$

мають блочно-діагональну структуру, тоді останню систему можна подати у вигляді

$$\frac{dz_+}{d\tau} = H_+(\tau,\varepsilon)z_+, \quad \tau \neq \tau_\nu, \quad \Delta z_+\Big|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon G_+(\tau_\nu,\varepsilon)z_+, \tag{4_1}$$

$$\frac{dz_-}{d\tau} = H_-(\tau,\varepsilon)z_-, \quad \tau \neq \tau_\nu, \quad \Delta z_-\Big|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon G_-(\tau_\nu,\varepsilon)z_-, \tag{4_2}$$

де $z = (z_+; z_-)$, $z_+ \in R^{n_0}$, $z_- \in R^{n-n_0}$, n_0 не залежить від ε, $H(\tau,\varepsilon) = \operatorname{diag}[H_+(\tau,\varepsilon), H_-(\tau,\varepsilon)]$, $G(\tau,\varepsilon) = \operatorname{diag}[G_+(\tau,\varepsilon), G_-(\tau,\varepsilon)]$. На підставі гіперболічності матриціанти $Q_+(\tau,t,\varepsilon)$ і $Q_-(\tau,t,\varepsilon)$ лінійних систем відповідно (4_1) і (4_2) для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ справджують нерівності

$$\| Q_+(\tau,t,\varepsilon)\| \leq Ke^{\gamma(\tau-t)} \quad \forall\, \tau \leq t, \qquad \| Q_-(\tau,t,\varepsilon)\| \leq Ke^{-\gamma(\tau-t)} \quad \forall\, \tau \geq t$$

з деякими сталими $K \geq 1$ і $\gamma > 0$, не залежними від ε.

Нехай

$$Q(\tau,t,\varepsilon) = \begin{cases} -\operatorname{diag}(Q_+(\tau,t,\varepsilon);0), & \tau \leq t, \\ \operatorname{diag}(0;Q_-(\tau,t,\varepsilon)), & \tau > t. \end{cases}$$

Тоді очевидно, що

$$\| Q(\tau,t,\varepsilon)\| \leq Ke^{-\gamma|\tau-t|}, \quad \tau \in R, \quad t \in R, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]. \tag{5}$$

У нових змінних $y = x - \bar{x}(\tau,\varepsilon)$, $y = (y_+; y_-)$ система (1) набере вигляду

$$\begin{gathered}
\frac{dy_+}{d\tau} = H_+(\tau,\varepsilon)y_+ + F_+(y,\tau,\varepsilon) + \tilde{a}_+(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\varphi,\tau) + \\
+ \varepsilon A_+(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon), \quad \tau \neq \tau_\nu, \\
\frac{dy_-}{d\tau} = H_-(\tau,\varepsilon)y_- + F_-(y,\tau,\varepsilon) + \tilde{a}_-(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\varphi,\tau) + \\
+ \varepsilon A_-(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon), \quad \tau \neq \tau_\nu, \\
\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon), \quad \tau \neq \tau_\nu, \\
\Delta y_+\Big|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon G_+(\tau_\nu,\varepsilon)y_+ + \varepsilon\Phi_+(y,\tau_\nu,\varepsilon) + \\
+ \varepsilon\tilde{p}_+(y+\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu) + \varepsilon^2 P_+(y+\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon), \\
\Delta y_-\Big|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon G_-(\tau_\nu,\varepsilon)y_- + \varepsilon\Phi_-(y,\tau_\nu,\varepsilon) + \\
+ \varepsilon\tilde{p}_-(y+\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu) + \varepsilon^2 P_-(y+\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon), \\
\Delta\varphi\Big|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon q(y+\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),
\end{gathered} \tag{6}$$

де

$$(\tilde{a}_+;\tilde{a}_-) = \tilde{a}, \quad (\tilde{p}_+;\tilde{p}_-) = \tilde{p}, \quad (A_+;A_-) = A, \quad (P_+;P_-) = P,$$

$$F = (F_+;F_-) = a(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau) - a(\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau) - H(\tau,\varepsilon)y =$$

$$= \int_0^1 \Big[\frac{\partial}{\partial x}(a(ly+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau) - a(\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau))\Big]dly,$$

$$\Phi = (\Phi_+ ; \Phi_-) = p(y + \bar{x}(\tau, \varepsilon), \tau) - p(\bar{x}(\tau, \varepsilon), \tau) - G(\tau, \varepsilon)y =$$
$$= \int_0^1 \Big[\frac{\partial}{\partial x}(p(ly + \bar{x}(\tau, \varepsilon), \tau) - p(\bar{x}(\tau, \varepsilon), \tau)) \Big] dly.$$

При зроблених на $a(x, \tau)$ і $b(x, \tau)$ припущеннях маємо, що для довільного δ_1 можна вибрати таке $\delta_2 < \rho$, що

$$\| \Phi \| < \delta_1 \| y \|, \quad \| F \| < \delta_1 \| y \|, \quad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| < \delta_1, \quad \left\| \frac{\partial F}{\partial y} \right\| < \delta_1 \tag{7}$$

при $\| y \| < \delta_2$, $\tau \in R$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Для побудови інтегрального многовиду $y = Y(\psi, \tau, \varepsilon)$ системи (6) застосуємо ітераційний метод, який полягає в тому, що $y = Y(\psi, \tau, \varepsilon)$ визначається як границя послідовності $\{ Y_j(\psi, \tau, \varepsilon)\}$, в якій $y = Y_{j+1}(\psi, \tau, \varepsilon)$ є інтегральним многовидом системи рівнянь з імпульсною дією

$$\frac{dy}{d\tau} = H(\tau, \varepsilon)y + F_1(Y_j(\varphi, \tau, \varepsilon), \varphi, \tau, \varepsilon), \quad \tau \neq \tau_\nu,$$
$$\Delta y \big|_{\tau = \tau_\nu} = \varepsilon G(\tau_\nu, \varepsilon)y + \varepsilon \Phi_1(Y_j(\varphi, \tau_\nu, \varepsilon), \varphi, \tau_\nu, \varepsilon), \tag{8}$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b\big(\bar{x}(\tau, \varepsilon) + Y_j(\varphi, \tau, \varepsilon), \varphi, \tau, \varepsilon\big), \quad \tau \neq \tau_\nu,$$
$$\Delta \varphi \big|_{\tau = \tau_\nu} = \varepsilon q\big(\bar{x}(\tau_\nu, \varepsilon) + Y_j(\varphi_\nu, \tau_\nu, \varepsilon), \varphi, \tau_\nu, \varepsilon\big), \tag{9}$$

де

$$F_1(y, \varphi, \tau, \varepsilon) = F(y, \tau, \varepsilon) + \bar{a}(\bar{x}(\tau, \varepsilon) + y, \varphi, \tau) + \varepsilon A(\bar{x}(\tau, \varepsilon) + y, \varphi, \tau, \varepsilon),$$
$$\Phi_1(y, \varphi, \tau, \varepsilon) = \Phi(y, \tau, \varepsilon) + \bar{p}(\bar{x}(\tau, \varepsilon) + y, \varphi, \tau) +$$
$$+ \varepsilon P(\bar{x}(\tau, \varepsilon) + y, \varphi, \tau, \varepsilon), \quad Y_0 \equiv 0.$$

Згідно з умовами (3) $\| \partial q / \partial \varphi \| \le \sigma_1$. Крім того, нижче ми покажемо, що функції $Y_j(\varphi, \tau, \varepsilon)$ неперервно диференційовні по φ, кусково-неперервні по τ з розривами першого роду при $\tau = \tau_\nu$ і $\| \partial\, (Y_j(\varphi, \tau_\nu, \varepsilon)) / \partial \varphi \| \le \bar{\sigma}_1 = \text{const}$ для всіх $j \ge 0$, $\varphi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\nu \in Z$. Тому відображення $\varphi \to \varphi + \varepsilon q(Y_j(\varphi, \tau_\nu, \varepsilon), \varphi, \tau_\nu, \varepsilon)$ є взаємно однозначним, що гарантує існування і єдиність розв'язку $\varphi = \varphi^{\tau}_{\tau_0, j}(\psi, \varepsilon)$, $\varphi^{\tau_0}_{\tau_0, j}(\psi, \varepsilon) = \psi$, системи (9) для всіх $\tau_0 \in R$, $\tau \in R$, $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Оскільки $[b(x, \varphi, \tau, \varepsilon); q(x, \varphi, \tau, \varepsilon)] \in C^1_{x, \varphi, \tau}(\bar{G}, \sigma_1)$, то згідно з теоремами про диференційовність розв'язків диференціальних рівнянь функція $\varphi^{\tau}_{\tau_0, j}(\psi, \varepsilon)$ неперервно диференційовна по ψ для всіх $(\psi, \tau_0, \varepsilon) \in R^m \times R \times (0, \varepsilon_0] = G_1$ і по τ_0 для всіх $(\psi, \tau_0, \varepsilon) \in R^m \times \bar{R} \times (0, \varepsilon_0] = \underline{G}_1$, де $\bar{R} = R \setminus \{ \tau_\nu \}_{\nu = -\infty}^{\infty}$. Підставимо в систему (8) $\varphi = \varphi^{\tau}_{\tau_0, j}(\psi, \varepsilon)$. Тоді

$$y_{\tau_0, j} = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\tau, t, \varepsilon) F_1\Big(Y_j\big(\varphi^{t}_{\tau_0, j}(\psi, \varepsilon), \varphi^{t}_{\tau_0, j}(\psi, \varepsilon), t, \varepsilon\big), t, \varepsilon\Big) dt +$$
$$+ \varepsilon \sum_{\nu = -\infty}^{\infty} Q(\tau, \tau_\nu, \varepsilon) \Phi_1\Big(Y_j\big(\varphi^{\tau_\nu}_{\tau_0, j}(\psi, \varepsilon), \varphi^{\tau_\nu}_{\tau_0, j}(\psi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon\big), \tau_\nu, \varepsilon\Big)$$

є сім'єю обмежених розв'язків одержаної системи, залежних від параметрів τ_0, ψ, ε. Ця сім'я покриває інваріантну множину $y = Y_{j+1}(\psi, \tau, \varepsilon)$:

$$y \equiv Y_{j+1}(\psi, \tau, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\tau, t, \varepsilon) F_1\Big(Y_j\big(\varphi_{\tau,j}^t(\psi, \varepsilon), t, \varepsilon\big), \varphi_{\tau,j}^t(\psi, \varepsilon), t, \varepsilon\Big) dt +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} Q(\tau, \tau_\nu, \varepsilon) \Phi_1\Big(Y_j\big(\varphi_{\tau,j}^{\tau_\nu}(\psi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon\big), \varphi_{\tau,j}^{\tau_\nu}(\psi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon\Big). \qquad (10)$$

2. Допоміжні твердження. Для дослідження збіжності послідовностей $\{Y_j\}$ і $\{\varphi_{\tau,j}^t\}$ встановимо ряд лем.

Позначимо через $\varphi = \varphi_\tau^t(\psi, \varepsilon)$ розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\varphi_\tau^t}{dt} = \frac{\omega(t)}{\varepsilon} + b\big(\bar{x}(t, \varepsilon) + Y(\varphi_\tau^t, t, \varepsilon), \varphi_\tau^t, t, \varepsilon\big), \quad t \neq \tau_\nu,$$

$$\Delta\varphi\big|_{t=\tau_\nu} = \varepsilon q\big(\bar{x}(\tau_\nu, \varepsilon) + Y(\varphi_\tau^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon), \varphi_\tau^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon\big), \qquad \varphi_\tau^\tau = \psi \in R^m. \qquad (11)$$

Тут $Y(\varphi, t, \varepsilon)$ — неперервно диференційовна по $(\varphi, t) \in R^m \times \bar{R}$ при кожному фіксованому ε. Дослідимо властивості цього розв'язку.

Лема 1. *Нехай виконуються умови* (2), (3), (5) *і нерівності*

$$\left\|\frac{\partial Y(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial \psi}\right\| \leq d_2 \varepsilon^\alpha, \quad (\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1,$$

$$\left\|\frac{\partial Y(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + \frac{\partial Y(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial \psi}\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}\right\| \leq \bar{d}_1, \quad (\psi, \tau, \varepsilon) \in \underline{G}_1,$$

$$\left\|\Delta Y(\psi, \tau, \varepsilon)\big|_{\tau=\tau_\nu}\right\| \leq \underline{d}_1 \varepsilon, \quad (\psi, \varepsilon) \in R^m \times (0, \varepsilon_0], \quad \nu \in Z,$$

$$\underline{d}_1, \bar{d}_1, d_2 = \text{const}, \quad \alpha = \frac{1}{l+1}.$$

Тоді існують такі не залежні від ε *сталі* $c_r = c_r(\underline{d}_1, \bar{d}_1)$, $r = 1, 2$, *що при досить малому* $\varepsilon_0 > 0$ *для всіх* $(\psi, t, \varepsilon) \in G_1$ *справджуються оцінки*

$$\left\|\frac{\partial}{\partial \psi}\big(\varphi_\tau^t(\psi, \varepsilon) - \psi\big)\right\| \leq c_1 \varepsilon^\alpha (1 + d_2) e^{\gamma|\tau - t|/3}, \quad \tau \in R, \qquad (12)$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial \tau}\varphi_\tau^t(\psi, \varepsilon)\right\| \leq c_2\Big(1 + \frac{\|\omega(\tau)\|}{\varepsilon}\Big) e^{\gamma|\tau - t|/3}, \quad \tau \in \bar{R}. \qquad (13)$$

Доведення. Використаємо схему доведення леми 12.1 з [4]. Задача Коші (11) при $t \geq \tau$ приводить до рівностей

$$\varphi_\tau^t - \psi = \int_\tau^t \Big[\frac{\omega(l)}{\varepsilon} + b\big(\bar{x}(l, \varepsilon) + Y(\varphi_\tau^l, l, \varepsilon), \varphi_\tau^l, l, \varepsilon\big)\Big] dl +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\tau \leq \tau_\nu < t} q\big(\bar{x}(\tau_\nu, \varepsilon) + Y(\varphi_\tau^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon), \varphi_\tau^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon\big), \qquad (14)$$

$$z_\tau^t = \int_\tau^t \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\left(z_\tau^l + E\right)dl + \int_\tau^t \frac{\partial b}{\partial \varphi}\left(z_\tau^l + E\right)dl +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\tau \le \tau_\nu < t} \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\left(z_\tau^{\tau_\nu} + E\right) + \varepsilon \sum_{\tau \le \tau_\nu < t} \frac{\partial q}{\partial \varphi}\left(z_\tau^{\tau_\nu} + E\right), \qquad (15)$$

де $z_\tau^t \equiv \dfrac{\partial}{\partial \psi}\left(\varphi_\tau^t - \psi\right)$, E — одинична матриця.

Перейдемо до нових змінних

$$\overline{\theta}_\tau^t = \varphi_\tau^t - \frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t \omega(\xi)\,d\xi.$$

Тоді, враховуючи, що $\tau_{\nu+1} - \tau_\nu = \theta\varepsilon$, отримуємо нерівність

$$\left\| z_\tau^t \right\| \le \sigma_1 d_2 \varepsilon^\alpha \left(m(\tau - t)\left(1 + \frac{1}{\theta}\right) + 1 + \int_\tau^t \left\| z_\tau^l \right\| dl + \varepsilon \sum_{\tau \le \tau_\nu < t} \left\| z_\tau^{\tau_\nu} \right\| \right) +$$

$$+ \sum_{k \ne 0} \left\| \int_\tau^t B_k\left(\overline{x}(l,\varepsilon) + Y\left(\varphi_\tau^l, l, \varepsilon\right), l, \varepsilon\right)\left(z_\tau^l + E\right)\exp\left\{ i\left(k, \overline{\theta}_\tau^l\right)\right\} \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon}\int_\tau^l (k, \omega(\xi))\,d\xi \right\} dl \right\| + \sum_{k \ne 0} \left\| \varepsilon \sum_{\tau \le \tau_\nu < t} Q_k\left(\overline{x}(\tau_\nu, \varepsilon) + Y\left(\varphi_\tau^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon\right), \tau_\nu, \varepsilon\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(z_\tau^{\tau_\nu} + E\right)\exp\left\{ i\left(k, \overline{\theta}_\tau^{\tau_\nu}\right)\right\}\exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon}\int_\tau^{\tau_\nu} (k, \omega(\xi))\,d\xi \right\} \right\|. \qquad (16)$$

Тут $B_k(x, \tau, \varepsilon)$ і $Q_k(x, \tau, \varepsilon)$ — коефіцієнти Фур'є відповідно функцій $\partial b(x, \varphi, \tau, \varepsilon)/\partial\varphi$ і $\partial q(x, \varphi, \tau, \varepsilon)/\partial\varphi$.

Як і в [4, с. 150], розглянемо спочатку випадок $t \ge \tau + 2$ і подамо відрізок $[\tau, t]$ у вигляді об'єднання відрізків

$$[\tau, t] = \bigcup_{s=0}^{q} T_s,$$

$$T_s = [\tau + s, \tau + s + 1], \quad 0 \le s < q, \quad T_q = [\tau + q, t],$$

де q — ціла частина числа $t - \tau - 1$, а довжина відрізка T_q не менша за одиницю і менша ніж два.

Оцінимо величини стрибків функцій $B_k\left(z_\tau^l + E\right)\exp\left\{ i\left(k, \overline{\theta}_\tau^l\right)\right\}$ і $Q_k\left(z_\tau^l + E\right) \times \exp\left\{ i\left(k, \overline{\theta}_\tau^l\right)\right\}$ в точках імпульсної дії на відрізку T_s:

$$\left\| \Delta\left(B_k\left(z_\tau^l + E\right)\exp\left\{ i\left(k, \overline{\theta}_\tau^l\right)\right\}\right)\Big|_{l=\tau_\nu} \right\| \le$$

$$\le 2(\sigma_1 + \underline{d}_1)\varepsilon\left(\sup_{\overline{G}} \| B_k \| + \sup_{\overline{G}} \left\| \frac{\partial B_k}{\partial x} \right\| \right)\left(m + \sup_{T_s} \left\| z_\tau^l \right\| \right),$$

$$\left\| \Delta\left(Q_k\left(z_\tau^l + E\right)\exp\left\{ i\left(k, \overline{\theta}_\tau^l\right)\right\}\right)\Big|_{l=\tau_\nu} \right\| \le$$

$$\le 2(\sigma_1 + \underline{d}_1)\varepsilon\left(\|k\| \sup_{\overline{G}} \| Q_k \| + \sup_{\overline{G}} \left\| \frac{\partial Q_k}{\partial x} \right\| \right)\left(m + \sup_{T_s} \left\| z_\tau^l \right\| \right)$$

при $d_2 \varepsilon_0^\alpha \le 1$.

Оскільки при $l \neq \tau_\nu$ виконуються рівність

$$\frac{dz_\tau^l}{dl} = \left(\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial \varphi} + \frac{\partial b}{\partial \varphi}\right)\left(z_\tau^l + E\right)$$

і нерівність

$$\sup_{T_s}\left\|\frac{d}{dl}z_\tau^l\right\| \leq 2\sigma_1\left(m + \sup_{T_s}\left\|z_\tau^l\right\|\right), \tag{17}$$

то на відрізках T_s одиничної довжини справджуються оцінки

$$I_k(T_s) \equiv \left\|\int_{\tau+s}^{\tau+s+1} B_k\left(z_\tau^l + E\right)\exp\left\{i\left(k, \overline{\theta}_\tau^l\right)\right\}\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_\tau^l (k, \omega(\xi))d\xi\right\}dl\right\| \leq$$

$$\leq c_3\varepsilon^\alpha\left(1 + \sup_{T_s}\left\|z_\tau^l\right\|\right)\left[\sup_{\overline{G}}\|B_k\| + \frac{1}{\|k\|}\left(\sup_{\overline{G}}\left\|\frac{\partial}{\partial\tau}B_k\right\| + \sup_{\overline{G}}\left\|\frac{\partial}{\partial x}B_k\right\|\right)\right],$$

$$S_k(T_s) \equiv \left\|\varepsilon\sum_{\tau+s\leq\tau_\nu<\tau+s+1} Q_k\left(z_\tau^{\tau_\nu} + E\right)\exp\left\{i\left(k, \overline{\theta}_\tau^{\tau_\nu}\right)\right\}\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_\tau^{\tau_\nu}(k, \omega(\xi))d\xi\right\}\right\| \leq$$

$$\leq c_3\varepsilon^\alpha\left(1 + \sup_{T_s}\left\|z_\tau^l\right\|\right)\left[\|k\|^2\sup_{\overline{G}}\|Q_k\| + \|k\|\left(\sup_{\overline{G}}\left\|\frac{\partial}{\partial\tau}Q_k\right\| + \sup_{\overline{G}}\left\|\frac{\partial}{\partial x}Q_k\right\|\right)\right]$$

при $d_2\varepsilon_0^\alpha \leq 1$ з деякою сталою $c_3 = c_3(\underline{d}_1, \overline{d}_1)$. Останні нерівності встановлено аналогічно нерівності для $\Delta_{s,k}$ з [4, с. 150] з тією відмінністю, що тут ми використали рівномірні оцінки осциляційних інтегралів та сум [7] для розривних функцій, які мають вигляд

$$\left\|\int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\tau}\Phi(y,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar{\tau}}^{y}(k, \omega(z))dz\right\}dy\right\| \leq \tilde{c}_3(L)\varepsilon^{1/(l+1)}\left(\sup_{y\in[\bar{t},\bar{t}+L]}\|\Phi(y,\varepsilon)\| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\|k\|}\sup_{\substack{y\in[\bar{t},\bar{t}+L]\\ y\neq\tau_\nu}}\left\|\frac{\partial}{\partial y}\Phi(y,\varepsilon)\right\| + \frac{1}{\|k\|}\sum_{\bar{t}\leq\tau_\nu<\bar{t}+L}\left\|\Delta\Phi(y,\varepsilon)\big|_{y=\tau_\nu}\right\|\right), \tag{18}$$

$$\left\|\varepsilon\sum_{\bar{t}\leq\tau_\nu<\bar{t}+\tau}\Psi(\tau_\nu,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar{\tau}}^{\tau_\nu}(k, \omega(z))dz\right\}\right\| \leq$$

$$\leq \tilde{c}_3(L)\|k\|\varepsilon^{1/(l+1)}\left(\sup_{[\bar{t},\bar{t}+L]}\|\Psi(y,\varepsilon)\| + \sum_{\bar{t}\leq\tau_\nu<\bar{t}+L}\left\|\Delta\Psi(y,\varepsilon)\big|_{y=\tau_\nu}\right\| + \overline{L}(\varepsilon)\right). \tag{19}$$

Тут матриця $\Phi(y, \varepsilon)$ для кожного фіксованого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ неперервно диференційовна по $y \in [\bar{t}, \bar{t} + L]$ за винятком точок τ_ν; на кожному півінтервалі $(\tau_\nu, \tau_{\nu+1}]$ матриця $\Psi(y, \varepsilon)$ задовольняє умову Ліпшиця по y зі сталою $\overline{L}(\varepsilon)$, не залежною від ν.

Для оцінки $\sup_{T_s}\left\|z_\tau^l\right\|$ застосуємо, як і в [4, с. 151], диференційовну норму

$$\|y\|_1 = \left(\sum_{i,j=1}^m y_{ij}^2\right)^{1/2} \leq \|y\| \leq m^2\|y\|_1, \quad \left|\frac{d}{dl}\|y\|_1\right| \leq \left\|\frac{d}{dl}y\right\|_1,$$

$$y = y(l) = \left(y_{ij}\right)_{i,j=1}^{m}.$$

Позначимо $m^2\left\|z_\tau^l\right\|_1$ через $u(l)$, а кількість імпульсів $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{\overline{q}}$ на відрізку T_s через $\overline{q}$. Функція $u(l)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\tau + s, \tau + s + 1]$ за винятком точок імпульсної дії і тих точок, де вона перетворюється в нуль. Якщо $u(\tau_0) = 0$, то згідно з (14) $u(l) \le \underset{\sim}{c_3}$ для всіх $\tau \in [\tau + s, \tau + s + 1]$, $\underset{\sim}{c_3} = \text{const}$. Тому вважатимемо, що $u(l) \ne 0$ на T_s. Тоді при $\tau_1 > \tau + s$ маємо

$$\sup_{T_s} u(l) = \sup_{T_s} u(l) - \inf_{T_s} u(l) + \inf_{T_s} u(l) \le$$

$$\le \sup_{[\tau+s,\tau_1]} u(l) - \inf_{[\tau+s,\tau_1]} u(l) + \sum_{\nu=1}^{\overline{q}-1}\left(\sup_{(\tau_\nu,\tau_{\nu+1}]} u(l) - \inf_{(\tau_\nu,\tau_{\nu+1}]} u(l)\right) +$$

$$+ \sup_{(\tau_{\overline{q}},\tau+s+1]} u(l) - \inf_{(\tau_{\overline{q}},\tau+s+1]} u(l) + \sum_{\tau+s\le\tau_\nu<\tau+s+1}\left|\Delta u(l)\big|_{l=\tau_\nu}\right| + \int_{\tau+s}^{\tau+s+1} u(l)\,dl.$$

Із зображення (15) випливає оцінка

$$\left\|\Delta z_\tau^l\big|_{l=\tau_\nu}\right\| \le 2\varepsilon\sigma_1\left(\left\|z_\tau^{\tau_\nu}\right\| + m\right),$$

яка з урахуванням нерівностей (17) і

$$\sup_{(\tau_\nu,\tau_{\nu+1}]} u(l) - \inf_{(\tau_\nu,\tau_{\nu+1}]} u(l) \le \int_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}}\left|\frac{du(l)}{dl}\right|dl$$

дає можливість встановити, що

$$\sup_{T_s}\left\|z_\tau^l\right\| \le \underset{\sim}{c_3}\left(1 + \int_{\tau+s}^{\tau+s+1}\left\|z_\tau^l\right\|dl + \varepsilon\sum_{\tau+s\le\tau_\nu<\tau+s+1}\left\|z_\tau^{\tau_\nu}\right\|\right). \tag{20}$$

Якщо ж $\tau_1 = \tau + s$, то із (15) отримуємо

$$\left\|z_\tau^{\tau_1}\right\| \le \left\|(E+\varepsilon D)^{-1}\right\|\left(\left\|z_\tau^{\tau_1+0}\right\| + \|D\|\varepsilon\right), \qquad D = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial\varphi} + \frac{\partial q}{\partial\varphi}\right)\bigg|_{l=\tau_1},$$

звідки за рахунок малості $\varepsilon_0 > 0$ маємо

$$\left\|z_\tau^{\tau_1}\right\| \le 2\left\|z_\tau^{\tau_1+0}\right\| + 1 \le 2\sup_{(\tau+s,\tau+s+1]}\left\|z_\tau^l\right\| + 1.$$

Ці міркування підтверджують правильність оцінки вигляду (20) і при $\tau_1 = \tau + s$.

Отже, на підставі (20) $I_k(T_s)$ та $S_k(T_s)$ можна оцінити таким чином:

$$\begin{aligned} I_k(T_s) &\le \overline{c}_3\varepsilon^\alpha\left(1 + \int_{\tau+s}^{\tau+s+1}\left\|z_\tau^l\right\|dl + \varepsilon\sum_{\tau+s\le\tau_\nu<\tau+s+1}\left\|z_\tau^{\tau_\nu}\right\|\right)\times \\ &\times\left[\|k\|\sup_{\overline{G}}\|b_k\| + \sup_{\overline{G}}\left\|\frac{\partial}{\partial\tau}b_k\right\| + \sup_{\overline{G}}\left\|\frac{\partial}{\partial x}b_k\right\|\right], \\ S_k(T_s) &\le \overline{c}_3\varepsilon^\alpha\left(1 + \int_{\tau+s}^{\tau+s+1}\left\|z_\tau^l\right\|dl + \varepsilon\sum_{\tau+s\le\tau_\nu<\tau+s+1}\left\|z_\tau^{\tau_\nu}\right\|\right)\times \\ &\times\left[\|k\|^3\sup_{\overline{G}}\|q_k\| + \|k\|^2\left(\sup_{\overline{G}}\left\|\frac{\partial}{\partial\tau}q_k\right\| + \sup_{\overline{G}}\left\|\frac{\partial}{\partial x}q_k\right\|\right)\right] \end{aligned} \tag{21}$$

з деякою сталою $\bar{c}_3$ для всіх $s = \overline{0, \bar{q}-1}$, $k \neq 0$. Тут $b_k = b_k(x, \tau, \varepsilon)$ і $q_k = q_k(x, \tau, \varepsilon)$ — коефіцієнти Фур'є відповідно функцій $b(x, \varphi, \tau, \varepsilon)$ і $q(x, \varphi, \tau, \varepsilon)$.

З урахуванням умови $1 \leq t - q < 2$ оцінки вигляду (21) легко встановити і для $I_k(T_q)$ та $S_k(T_q)$.

Враховуючи нерівності (16), (21) і обмеження (3) на коефіцієнти Фур'є, при $t \geq \tau + 2$ дістаємо нерівність

$$\left\| z_\tau^t \right\| \leq \bar{c}_4 \varepsilon^\alpha (d_2+1) \left(t - \tau + 1 + \int\limits_\tau^t \left\| z_\tau^l \right\| dl + \varepsilon \sum_{\tau \leq \tau_\nu < t} \left\| z_\tau^{\tau_\nu} \right\| \right) \tag{22}$$

з деякою сталою $\bar{c}_4$. Якщо ж $t \in [\tau, \tau+2)$, то без розбиття $[\tau, t]$ на частини із (15) на підставі розробленого вище методу для $\tau \leq t < \tau + 2$ отримаємо нерівність вигляду (22) зі сталою $\underline{c}_4$ замість $\bar{c}_4$. Покладемо $c_4 = \max\{\underline{c}_4, \bar{c}_4\}$. Тоді на підставі зростання по t функції $t - \tau + 1$ маємо нерівність

$$\frac{\left\| z_\tau^t \right\|}{t-\tau+1} \leq c_4 (d_2+1)\varepsilon^\alpha \left(1 + \int\limits_\tau^t \frac{\left\| z_\tau^l \right\|}{l-\tau+1} dl + \varepsilon \sum_{\tau \leq \tau_\nu < t} \frac{\left\| z_\tau^{\tau_\nu} \right\|}{\tau_\nu - \tau + 1} \right),$$

яка з урахуванням умови $\tau_{\nu+1} - \tau_\nu = \theta\varepsilon$ і леми 2.1 [2, с. 16] приводить до оцінки

$$\left\| z_\tau^t \right\| \leq c_5 \varepsilon^\alpha (1+d_2) e^{c_5(1+d_2)\varepsilon^\alpha(\tau - t)} (1 + \tau - t)$$

для всіх $t \geq \tau$. Виберемо ε_0 так, щоб $c_5(1+d_2)\varepsilon_0^\alpha \leq \gamma/6$. Тоді для всіх $t \geq \tau$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і $\psi \in R^m$ справедлива оцінка (12) зі сталою $c_1 \leq 6c_6/\gamma$. Для $t < \tau$ доведення оцінки аналогічне.

Диференціюючи рівність (15) по τ при $\tau \neq \tau_\nu$, отримуємо

$$\frac{\partial \varphi_\tau^t}{\partial \tau} = -\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} - b(\bar{x}(\tau, \varepsilon) + Y(\psi, \tau, \varepsilon), \psi, \tau, \varepsilon) +$$

$$+ \int\limits_\tau^t \left[\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial \varphi} + \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right] \frac{\partial \varphi_\tau^l}{\partial \tau} dl + \varepsilon \sum_{\tau < \tau_\nu < t} \left[\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial \varphi} + \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right] \frac{\partial \varphi_\tau^l}{\partial \tau} \bigg|_{l=\tau_\nu}.$$

Остання рівність по формі запису відрізняється від рівності (16) лише наявністю доданка $-\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} - b(\bar{x}(\tau, \varepsilon) + Y(\psi, \tau, \varepsilon), \psi, \tau, \varepsilon)$. Якщо повторити схему доведення оцінки (12), то дістанемо нерівність (13), наявність у правій частині якої доданка $\| \omega(\tau) \| \varepsilon^{-1}$ обумовлена останнім зауваженням. Лему доведено.

Використовуючи оцінки осциляційних інтегралів (18) та сум (19) і метод доведення нерівності (20), легко обґрунтувати наступне твердження, в якому $f(y, \varepsilon)$ та $g(y, \varepsilon)$ — матриці таких розмірів, що їх добуток $f(y, \varepsilon) g(y, \varepsilon)$ є визначеним.

Лема 2. *Якщо виконуються умови* (2), (3) *і матриці* $f(y, \varepsilon)$, $g(y, \varepsilon)$ *неперервно диференційовні по* $y \in R$ *за винятком точок розриву першого роду* $y = \tau_\nu$, *причому на кожному відрізку* $[\bar{t}, \bar{t} + T]$, $R \ni \bar{t}$ *— довільне,* $0 < T$ *— фіксоване, виконуються нерівності*

$$\left\| \Delta f(y, \varepsilon) \big|_{y=\tau_\nu} \right\| \leq \varepsilon \left\| \tilde{f}(\bar{t}, T, \varepsilon) \right\|, \qquad \sup_{\substack{y \in [\bar{t}, \bar{t}+T] \\ y \neq \tau_\nu}} \left\| \frac{\partial}{\partial y} f(y, \varepsilon) \right\| < \infty,$$

$$\left\| \Delta g(y, \varepsilon) \big|_{y=\tau_\nu} \right\| \leq \varepsilon \sigma_2 \left(1 + \sup_{y \in [\bar{t}, \bar{t}+T]} \| g(y, \varepsilon) \| \right), \qquad \sup_{y \in [\bar{t}, \bar{t}+T]} \| g(y, \varepsilon) \| < \infty,$$

$$\sup_{\substack{y\in[\bar t,\bar t+T]\\ y\neq\tau_\nu}}\left\|\frac{\partial}{\partial y}g(y,\varepsilon)\right\| \le \sigma_2\left(1+\sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|g(y,\varepsilon)\|\right),$$

то при досить малому $\varepsilon_0>0$ *для всіх* $\bar t\in R$, $\bar\tau\in R$, $\tau\in[0,T]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $k\neq 0$ *справедливі оцінки*

$$\left\|\int_{\bar t}^{\bar t+\tau} f(y,\varepsilon)g(y,\varepsilon)\exp\left\{i\left(k,\overline{\theta}_{\bar\tau}^{y}\right)\right\}\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar\tau}^{y}(k,\omega(z))\,dz\right\}dy\right\| \le$$

$$\le \sigma_3\varepsilon^{1/(l+1)}\left(1+\int_{\bar t}^{\bar t+\tau}\|g(y,\varepsilon)\|dy+\varepsilon\sum_{\bar t\le\tau_\nu<\bar t+\tau}\|g(\tau_\nu,\varepsilon)\|\right)\times$$

$$\times\left(\sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|f(y,\varepsilon)\|+\frac{1}{\|k\|}\sup_{\substack{y\in[\bar t,\bar t+T]\\ y\neq\tau_\nu}}\left\|\frac{\partial}{\partial y}f(y,\varepsilon)\right\|+\frac{1}{\|k\|}\left\|\tilde f(\bar t,T,\varepsilon)\right\|\right), \qquad (23)$$

$$\left\|\varepsilon\sum_{\bar t\le\tau_\nu<\bar t+\tau} f(\tau_\nu,\varepsilon)g(\tau_\nu,\varepsilon)\exp\left\{i\left(k,\overline{\theta}_{\bar\tau}^{\tau_\nu}\right)\right\}\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar\tau}^{\tau_\nu}(k,\omega(z))\,dz\right\}\right\| \le$$

$$\le \sigma_4\varepsilon^{1/(l+1)}\left(1+\int_{\bar t}^{\bar t+\tau}\|g(y,\varepsilon)\|dy+\varepsilon\sum_{\bar t\le\tau_\nu<\bar t+\tau}\|g(\tau_\nu,\varepsilon)\|\right)\times$$

$$\times\left(\|k\|^2\sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|f(y,\varepsilon)\|+\|k\|\sup_{\substack{y\in[\bar t,\bar t+T]\\ y\neq\tau_\nu}}\left\|\frac{\partial f(y,\varepsilon)}{\partial y}\right\|+\|k\|\left\|\tilde f(\bar t,T,\varepsilon)\right\|\right) \qquad (24)$$

зі сталими σ_3, σ_4, *які залежать від* T, *але не залежать від* ε, $\bar\tau$, $\bar t$ *і* k.

Наступну лему буде використано при дослідженні збіжності відстаней між елементами послідовності $\left\{\varphi_{\tau,j}^{t}\right\}_{j=0}^{\infty}$. Тут $\varphi_{\tau,j}^{t}(\psi,\varepsilon)$ — розв'язок задачі Коші

$$\frac{d}{dt}\varphi_{\tau,j}^{t}(\psi,\varepsilon) = \frac{\omega(t)}{\varepsilon} + b\left(\overline{x}(t,\varepsilon)+Y_j\left(\varphi_{\tau,j}^{t}(\psi,\varepsilon),t,\varepsilon\right),\varphi_{\tau,j}^{t}(\psi,\varepsilon),t,\varepsilon\right), \qquad t\neq\tau_\nu,$$
$$(25)$$
$$\Delta\varphi_{\tau,j}^{t}\Big|_{t=\tau_\nu} = \varepsilon q\left(\overline{x}(\tau_\nu,\varepsilon)+Y_j\left(\varphi_{\tau,j}^{\tau_\nu},\tau_\nu,\varepsilon\right),\varphi_{\tau,j}^{\tau_\nu},\tau_\nu\right), \qquad \varphi_{\tau,j}^{\tau}(\psi,\varepsilon) = \psi.$$

Позначимо через $\varphi_{\tau}^{t,1}(\psi,\varepsilon)$ і $\varphi_{\tau}^{t,2}(\psi,\varepsilon)$ два довільних послідовних елементи послідовності $\left\{\varphi_{\tau,j}^{t}\right\}_{j=0}^{\infty}$, а через $Y^1(\psi,\tau,\varepsilon)$ і $Y^2(\psi,\tau,\varepsilon)$ — відповідні їм елементи послідовності $\left\{Y_j\right\}_{j=0}^{\infty}$ із задачі Коші (25).

Лема 3. *Нехай*:

1) *виконуються умови* (2), (3) *і* (5);

2) *функції* $Y^1(\psi,\tau,\varepsilon)$ *і* $Y^2(\psi,\tau,\varepsilon)$ *неперервно диференційовні по* $(\varphi,\tau)\in R^m\times\overline{R}$ *при кожному* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, 2π-*періодичні по* φ_η, $\eta=\overline{1,m}$, *і задовольняють нерівності*

$$\left\|\frac{\partial Y^s}{\partial\psi}\right\| \le d_2\varepsilon^{\alpha}, \quad (\psi,\tau,\varepsilon)\in G_1, \qquad \left\|\frac{\partial Y^s}{\partial\tau}+\frac{\partial Y^s}{\partial\psi}\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}\right\| \le \bar d_1, \quad (\psi,\tau,\varepsilon)\in \underline{G}_1,$$

$$\left\|\Delta Y^s(\psi,\tau,\varepsilon)\Big|_{\tau=\tau_\nu}\right\| \le \underline{d}_1\varepsilon, \quad (\psi,\varepsilon)\in R^m\times(0,\varepsilon_0], \quad \nu\in Z, \quad s=1,2.$$

Тоді існує така стала c_6, що при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ для всіх $(\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1$ і $t \in R$ виконується оцінка

$$\left\|\varphi_\tau^{t,1}(\psi,\varepsilon)-\varphi_\tau^{t,2}(\psi,\varepsilon)\right\| \le c_6 e^{\gamma|t-\tau|/3}\sup_{G_1}\left\|Y^1(\psi,\tau,\varepsilon)-Y^2(\psi,\tau,\varepsilon)\right\|. \tag{26}$$

Доведення. При $\tau \le t$ з (25) випливає

$$\varphi_\tau^{t,1}(\psi,\varepsilon) - \varphi_\tau^{t,2}(\psi,\varepsilon) = \int_\tau^t \Big(b\big(\bar{x}(l,\varepsilon)+Y^1\big(\varphi_\tau^{l,1},l,\varepsilon\big),\varphi_\tau^{l,1},l,\varepsilon\big) -$$
$$- b\big(\bar{x}(l,\varepsilon)+Y^2\big(\varphi_\tau^{l,2},l,\varepsilon\big),\varphi_\tau^{l,1},l,\varepsilon\big)\Big)dl + I_1 - I_2 +$$
$$+ \varepsilon\sum_{\tau\le\tau_\nu<t}\Big(\Big(q\big(\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon)+Y^1\big(\varphi_\tau^{\tau_\nu,1},\tau_\nu,\varepsilon\big),\varphi_\tau^{\tau_\nu,1},\tau_\nu,\varepsilon\big) -$$
$$- q\big(\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon)+Y^2\big(\varphi_\tau^{\tau_\nu,2},\tau_\nu,\varepsilon\big),\varphi_\tau^{\tau_\nu,1},\tau_\nu,\varepsilon\big)\Big) + S_1 - S_2, \tag{27}$$

де

$$I_j = \int_\tau^t \Big(b\big(\bar{x}(l,\varepsilon)+Y^2\big(\varphi_\tau^{l,2},l,\varepsilon\big),\varphi_\tau^{l,j},l,\varepsilon\big)dl,$$

$$S_j = \varepsilon\sum_{\tau\le\tau_\nu<t} q\big(\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon)+Y^2\big(\varphi_\tau^{\tau_\nu,2},\tau_\nu,\varepsilon\big),\varphi_\tau^{\tau_\nu,j},\tau_\nu,\varepsilon\big), \quad j = 1, 2.$$

Тому на підставі зроблених припущень

$$\left\|\varphi_\tau^{t,1}(\psi,\varepsilon)-\varphi_\tau^{t,2}(\psi,\varepsilon)\right\| \le \sup_{G_1}\left\|Y^1(\psi,\tau,\varepsilon)-Y^2(\psi,\tau,\varepsilon)\right\|\sigma_1\left(1+\frac{1}{\theta}\right)(t-\tau+1) +$$
$$+ \sigma_1 d_2 \varepsilon_0^\alpha\left(\int_\tau^t\left\|\varphi_\tau^{l,1}(\psi,\varepsilon)-\varphi_\tau^{l,2}(\psi,\varepsilon)\right\|dl + \varepsilon\sum_{\tau\le\tau_\nu<t}\left\|\varphi_\tau^{\tau_\nu,1}(\psi,\varepsilon)-\varphi_\tau^{\tau_\nu,2}(\psi,\varepsilon)\right\|\right) +$$
$$+ \| I_1 - I_2 \| + \| S_1 - S_2 \|. \tag{28}$$

Якщо скористатись оцінками осциляційних інтегралів (18) і сум (19) від розривних функцій, обмеженнями (3) на коефіцієнти Фур'є функцій $b(x, \varphi, \tau, \varepsilon)$ і $q(x, \varphi, \tau, \varepsilon)$ та використати методику, розроблену при доведенні леми 1, то для $t \ge \tau + 2$ отримаємо нерівність

$$\| I_1 - I_2 \| + \| S_1 - S_2 \| \le c_7\left(\varepsilon_0^\alpha\left[\int_\tau^t\left\|\varphi_\tau^{l,1}(\psi,\varepsilon)-\varphi_\tau^{l,2}(\psi,\varepsilon)\right\|dl +\right.\right.$$
$$\left.\left.+ \varepsilon\sum_{\tau\le\tau_\nu<t}\left\|\varphi_\tau^{\tau_\nu,1}(\psi,\varepsilon)-\varphi_\tau^{\tau_\nu,2}(\psi,\varepsilon)\right\|\right] + (t-\tau)\sup_{G_1}\left\|Y^1(\psi,\tau,\varepsilon)-Y^2(\psi,\tau,\varepsilon)\right\|\right). \tag{29}$$

Тоді при $t \ge \tau + 2$ одержуємо

$$\left\|\varphi_\tau^{t,1}(\psi,\varepsilon)-\varphi_\tau^{t,2}(\psi,\varepsilon)\right\| \le c_8(t-\tau+1)\sup_{G_1}\left\|Y^1(\psi,\tau,\varepsilon)-Y^2(\psi,\tau,\varepsilon)\right\| +$$
$$+ c_8\varepsilon_0^\alpha\left(\int_\tau^t\left\|\varphi_\tau^{l,1}(\psi,\varepsilon)-\varphi_\tau^{l,2}(\psi,\varepsilon)\right\|dl + \varepsilon\sum_{\tau\le\tau_\nu<t}\left\|\varphi_\tau^{\tau_\nu,1}(\psi,\varepsilon)-\varphi_\tau^{\tau_\nu,2}(\psi,\varepsilon)\right\|\right),$$

а для $t \in [\tau, \tau + 2]$ з (27) безпосередньо знаходимо

$$\left\|\varphi_\tau^{t,1}(\psi,\varepsilon)-\varphi_\tau^{t,2}(\psi,\varepsilon)\right\| \le 2\sigma_1\left(1+\frac{1}{\theta}\right)\sup_{G_1}\left\|Y^1(\psi,\tau,\varepsilon)-Y^2(\psi,\tau,\varepsilon)\right\|e^{2\sigma_1(2+1/\theta)}.$$

Об'єднуючи дві останні нерівності, встановлюємо оцінку

$$\left\|\varphi_\tau^{t,1}(\psi,\varepsilon)-\varphi_\tau^{t,2}(\psi,\varepsilon)\right\| \le c_9(1+t-\tau)e^{\tilde c_9\varepsilon_0^\alpha(t-\tau)}\sup_{G_1}\left\|Y^1(\psi,\tau,\varepsilon)-Y^2(\psi,\tau,\varepsilon)\right\|,$$

яка приводить до нерівності (26) при $\tilde c_9\varepsilon_0^\alpha \le \gamma/6$ зі сталою $c_6 \le 6c_9/\gamma$. При $\tau > > t$ доведення аналогічне. Лему доведено.

Лема 4. *Якщо виконуються умови леми* 1, *то існують такі сталі* $\varepsilon_0 > 0$ *і* $c_{10} = c_{10}(\underline{d}_1, \overline{d}_1)$, *що для всіх* $(\psi, t, \varepsilon) \in G_1$ *і* $\nu \in Z$ *має місце нерівність*

$$\left\|\varphi_{\tau_\nu+0}^t(\psi,\varepsilon)-\varphi_{\tau_\nu}^t(\psi,\varepsilon)\right\| \le c_{10}\varepsilon e^{\gamma|t-\tau_\nu|/3}. \tag{30}$$

Доведення. На підставі зображення (27) при $h \in (0, \varepsilon\theta)$ одержуємо рівність

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\tau_\nu+h}^t(\psi,\varepsilon)-\varphi_{\tau_\nu}^t(\psi,\varepsilon) = \\
&= \int_{\tau_\nu}^t \Big[\Big(b\big(\overline{x}(l,\varepsilon)+Y\big(\varphi_{\tau_\nu+h}^l,l,\varepsilon\big),\varphi_{\tau_\nu+h}^l,l,\varepsilon\big) - \\
&\quad - b\big(\overline{x}(l,\varepsilon)+Y\big(\varphi_{\tau_\nu}^l,l,\varepsilon\big),\varphi_{\tau_\nu+h}^l,l,\varepsilon\big)\Big) + \\
&+ \Big(b\big(\overline{x}(l,\varepsilon)+Y\big(\varphi_{\tau_\nu}^l,l,\varepsilon\big),\varphi_{\tau_\nu+h}^l,l,\varepsilon\big) - b\big(\overline{x}(l,\varepsilon)+Y\big(\varphi_{\tau_\nu}^l,l,\varepsilon\big),\varphi_{\tau_\nu}^l,l,\varepsilon\big)\Big)\Big]dl - \\
&- \int_{\tau_\nu}^{\tau_\nu+h}\Big[\frac{\omega(l)}{\varepsilon}+b\big(\overline{x}(l,\varepsilon)+Y\big(\varphi_{\tau_\nu+h}^l,l,\varepsilon\big),\varphi_{\tau_\nu+h}^l,l,\varepsilon\big)\Big]dl - \\
&- \varepsilon q\big(\overline{x}(\tau_\nu,\varepsilon)+Y(\psi,\tau_\nu,\varepsilon),\psi,\tau_\nu,\varepsilon\big),
\end{aligned}$$

з якої випливає оцінка

$$\begin{aligned}
u(t) \equiv \left\|\varphi_{\tau_\nu+h}^t(\psi,\varepsilon)-\varphi_{\tau_\nu}^t(\psi,\varepsilon)\right\| &\le \varepsilon\sigma_1 + \left(\frac{\bar\sigma_1}{\varepsilon}+\sigma_1\right)h + \sigma_1 d_2\varepsilon_0^\alpha\int_{\tau_\nu}^t u(l)\,dl + \\
&+ \sum_{k\ne0}\left\|\int_{\tau_\nu}^t b_k\big(\overline{x}(l,\varepsilon)+Y\big(\varphi_{\tau_\nu}^l,l,\varepsilon\big),l,\varepsilon\big)\times\right. \\
&\left.\times\Big(\exp\big\{i\big(k,\overline{\theta}_{\tau_\nu+h}^l\big)\big\}-\exp\big\{i\big(k,\overline{\theta}_{\tau_\nu}^l\big)\big\}\Big)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\tau_\nu}^l(k,\omega(\xi))\,d\xi\right\}dl\right\|,
\end{aligned} \tag{31}$$

де

$$\bar\sigma_1 = \max_{[\tau_\nu,\,\tau_{\nu+h}]}\|\omega(\tau)\|, \qquad \overline{\theta}_\tau^t = \varphi_\tau^t - \frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t\omega(\xi)\,d\xi.$$

Для оцінки останнього з чотирьох доданків у правій частині нерівності (31) у випадку $\tau \ge \tau_\nu + 2$ подамо $[\tau_\nu, t]$ у вигляді об'єднання відрізків одиничної довжини і останнього відрізка, довжина якого не менша за одиницю і менша ніж два, використаємо оцінку (18) осциляційного інтеграла, обмеження (3) на коефіцієнти Фур'є b_k та застосуємо метод одержання нерівності (20). Після виконання таких перетворень останній доданок у правій частині (31) оцінюємо зверху величиною

$$c_{11}\varepsilon^{\alpha}\left(\int_{\tau_\nu}^{t} u(l)\,dl + \varepsilon \sum_{\tau_\nu \le \tau_r < t} u(\tau_r)\right),$$

у зв'язку з чим нерівність (31) при $t \ge \tau_\nu + 2$ набере вигляду

$$u(t) \le \varepsilon\sigma_1 + \left(\frac{\tilde{\sigma}_1}{\varepsilon} + \sigma_1\right)h + (\sigma_1 d_2 + c_{11})\varepsilon_0^{\alpha}\left(\int_{\tau_\nu}^{t} u(l)\,dl + \varepsilon \sum_{\tau_\nu \le \tau_r < t} u(\tau_r)\right). \quad (32)$$

Якщо ж $t \in [\tau_\nu, \tau_\nu + 2)$, то ділити $[\tau_\nu, t]$ на частини немає потреби і з (31) знаходимо

$$u(\tau) \le c_{12}\left(\varepsilon + \left(\frac{\tilde{\sigma}_1}{\varepsilon} + \sigma_1\right)h\right).$$

Тому остання нерівність і нерівність (32) приводять до оцінки

$$u(t) = \left\| \varphi^{t}_{\tau_\nu + h}(\psi, \varepsilon) - \varphi^{t}_{\tau_\nu}(\psi, \varepsilon) \right\| \le c_{10}\left(\varepsilon + \left(\frac{\tilde{\sigma}_1}{\varepsilon} + \sigma_1\right)h\right) e^{c_{13}\varepsilon_0^{\alpha}(t-\tau_\nu)}$$

для всіх $t \ge \tau_\nu$, $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ і $h \in (0, \varepsilon\theta)$, звідки при $h \to +0$ і $c_{13}\varepsilon_0^{\alpha} \le \le \gamma/3$ випливає нерівність (30) для $t \ge \tau_\nu$. Випадок $t < \tau_\nu$ досліджується таким самим способом.

3. Побудова розривного інтегрального многовиду. Для побудови інтегрального многовиду системи (6), а потім і системи (1) дослідимо деякі властивості функцій $y = Y_j(\psi, \tau, \varepsilon)$, що визначаються рівністю (10).

Нехай

$$\sigma_0 = \overline{\sigma}_0 + \underline{\sigma}_0, \quad (33)$$

де

$$\overline{\sigma}_0 = \frac{2}{\gamma} K \sup_{\varphi, \tau, x} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \tilde{a}(x, \varphi, \tau) \right\|, \qquad \underline{\sigma}_0 = \frac{2K}{\gamma\theta} \sup_{\varphi, \tau, x} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \tilde{p}(x, \varphi, \tau) \right\|.$$

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* (2), (3), (5) *і* (33), *то функції* $Y_j = = Y_j(\psi, \tau, \varepsilon)$, $j = \overline{0, \infty}$, *неперервно диференційовні по* $(\psi, \tau) \in R^m \times \overline{R}$, 2π-*періодичні по* ψ_s, $s = \overline{1, m}$, *і при досить малому* $\varepsilon_0 > 0$ *задовольняють нерівності*

$$\| Y_j(\psi, \tau, \varepsilon) \| \le d_1 \varepsilon^{\alpha}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial \psi} Y_j(\psi, \tau, \varepsilon) \right\| \le d_2 \varepsilon^{\alpha}, \quad (\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1, \quad (34)$$

$$\left\| \frac{\partial Y_j(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + \frac{\partial Y_j(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial \psi} \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} \right\| \le \overline{d}_1, \quad (\psi, \tau, \varepsilon) \in \underline{G}_1, \quad (35)$$

$$\left\| \Delta Y_j(\psi, \tau, \varepsilon)\big|_{\tau = \tau_\nu} \right\| \le \underline{d}_1 \varepsilon, \quad (\psi, \varepsilon) \in R^m \times (0, \varepsilon_0], \quad \nu \in Z, \quad (36)$$

з $\alpha = (1 + l)^{-1}$ *і деякими не залежними від* ε *і* j *сталими* d_1, $\overline{d}_1$, $\underline{d}_1$, d_2.

Доведення. Згідно із зробленими припущеннями

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} Q(\tau, t, \varepsilon)\,dt \right\| \le \frac{2K}{\gamma}, \qquad \varepsilon \left\| \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} Q(\tau, \tau_\nu, \varepsilon) \right\| \le \frac{2K\varepsilon}{1 - e^{-\gamma\theta\varepsilon}} < \frac{2Ke^{\gamma\theta\varepsilon_0}}{\gamma\theta}.$$

Позначимо

$$\overline{\theta}^{t}_{\tau, j} = \varphi^{t}_{\tau, j} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} \omega(\xi)\,d\xi.$$

Тоді із (10), враховуючи отримані вище оцінки і (8), одержуємо

$$\sup_{\psi,\tau}\left\| Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon)\right\| \le \left[\frac{2K}{\gamma}(1+\theta^{-1}e^{\gamma\theta})\delta_1 + \underline{\sigma}_0\left(e^{\gamma\theta\varepsilon_0}-1\right)+\sigma_0\right]\times$$

$$\times \sup_{\psi,\tau}\left\| Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\right\| + \frac{2}{\gamma}K\varepsilon\sigma_1\left(1+\frac{e^{\gamma\theta}}{\theta}\right)+K_1+K_2, \tag{37}$$

де

$$K_1 = \sum_{k\ne 0}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left\|\int_{\tau+s}^{\tau+s+1} Q(\tau,t,\varepsilon)a_k(\overline{x}(t,\varepsilon),t)\exp\left\{i\left(k,\overline{\theta}^{t}_{\tau,j}\right)\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}(k,\omega(\xi))d\xi\right\}dt\right\|,$$

$$K_2 = \sum_{k\ne 0}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left\|\varepsilon\sum_{\tau+s\le\tau_\nu<\tau+s+1} Q(\tau,\tau_\nu,\varepsilon)p_k(\overline{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\tau_\nu)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{i\left(k,\overline{\theta}^{\tau_\nu}_{\tau,j}\right)\right\}\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\tau}^{\tau_\nu}(k,\omega(\xi))d\xi\right\}\right\|,$$

а $a_k(x,\tau)$, $p_k(x,\tau)$ — коефіцієнти Фур'є функцій $\overline{a}(x,\varphi,\tau)$ і $\overline{p}(x,\varphi,\tau)$ відповідно.

Оскільки

$$\frac{dQ(\tau,t,\varepsilon)}{dt} = -Q(\tau,t,\varepsilon)H(\tau,\varepsilon), \quad t\ne\tau, \quad t\ne\tau_\nu,$$

$$\Delta Q(\tau,t,\varepsilon)\big|_{t=\tau_\nu} = -\varepsilon Q(\tau,\tau_\nu,\varepsilon)G(\tau_\nu,\varepsilon), \quad Q(t,t-0,\varepsilon)-Q(t,t+0,\varepsilon)=E, \tag{38}$$

то для всіх $\tau_\nu\in[\tau+s,\tau+s+1]$ виконується нерівність

$$\left\|\Delta\left(Q(\tau,t,\varepsilon)a_k(\overline{x}(t,\varepsilon),t)\right)\big|_{t=\tau_\nu}\right\| \le \left\|\Delta Q(\tau,t,\varepsilon)\big|_{t=\tau_\nu}\right\|\sup_{[\tau+s,\tau+s+1]}\left\|a_k(\overline{x}(t,\varepsilon),t)\right\| +$$

$$+\sup_{[\tau+s,\tau+s+1]}\left\|Q(\tau,t,\varepsilon)\right\|\left\|a_k(\overline{x}(\tau_\nu+0,\varepsilon),\tau_\nu)-a_k(\overline{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\tau_\nu)\right\| \le$$

$$\le \varepsilon\sigma_1\left(\sup_{\overline{G}}\|a_k\|+\sup_{\overline{G}}\left\|\frac{\partial a_k}{\partial x}\right\|\right)\sup_{[\tau+s,\tau+s+1]}\left\|Q(\tau,t,\varepsilon)\right\|, \quad k\ne 0.$$

Далі за допомогою нерівності (23), як і в [4, с. 164], встановлюємо оцінку

$$K_1 \le \tilde{\sigma}_5\varepsilon^{\alpha}\sum_{k\ne 0}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left\{\left[\sup_{\overline{G}}\|a_k\|+\frac{1}{\|k\|}\left(\sup_{\overline{G}}\left\|\frac{\partial a_k}{\partial x}\right\|+\sup_{\overline{G}}\left\|\frac{\partial a_k}{\partial\tau}\right\|\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\max_{[\tau+s,\tau+s+1]}e^{-\gamma|t-\tau|}\right\} \le \overline{\sigma}_5\varepsilon^{\alpha}$$

зі сталою $\overline{\sigma}_5$, яка не залежить від j і ε.

Аналогічні міркування дають можливість встановити оцінку

$$K_2 \le \underline{\sigma}_5\varepsilon^{\alpha}.$$

Таким чином, якщо вибрати додатні ε_0 і δ_1 настільки малими, щоб

$$\frac{2K}{\gamma}(1+\theta^{-1}e^{\gamma\theta})\delta_1 \le \frac{1-\sigma_0}{4}, \quad \underline{\sigma}_0(e^{\gamma\theta\varepsilon_0}-1) \le \frac{1-\sigma_0}{4},$$

і покласти

$$\overline{\sigma}_5 + \underline{\sigma}_5 + \frac{2K}{\gamma}\sigma_1(1+\theta^{-1}e^{\gamma\theta}) = \sigma_5,$$

то із (37) одержимо нерівність

$$\sup_{\psi,\tau}\| Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon)\| \le \frac{1+\sigma_0}{2}\sup_{\psi,\tau}\| Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\| + \sigma_5\varepsilon^{\alpha}.$$

Оскільки $Y_0 \equiv 0$ і $\sigma_0 < 1$, то звідси отримуємо

$$\| Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\| \le d_1\varepsilon^{\alpha}$$

для всіх $(\psi,\tau,\varepsilon)\in G_1$, де $d_1 = 2\sigma_5/(1-\sigma_0)$, а малість ε_0 визначається умовою

$$d_1\varepsilon_0^{\alpha} \le \frac{1}{2}\min\{\rho, \delta_2(\delta_1)\}.$$

Отже, першу з нерівностей (34) встановлено.

Для доведення всіх інших нерівностей теореми 1 використаємо метод математичної індукції. Позначимо

$$A_k(x,\tau) = \left(a_k^{(\mu)}(x,\tau)k_\eta\right)_{\mu,\eta=1}^{n,m}, \quad P_k(x,\tau) = \left(p_k^{(\mu)}(x,\tau)k_\eta\right)_{\mu,\eta=1}^{n,m},$$

де $a_k = \left(a_k^{(1)},\ldots,a_k^{(n)}\right)$, $p_k = \left(p_k^{(1)},\ldots,p_k^{(n)}\right)$, $k=(k_1,\ldots,k_m)$ На підставі того, що $Y_0(\psi,\tau,\varepsilon)\equiv 0$, a $\varphi = \varphi_{t,0}^{\tau}(\psi,\varepsilon)$ — розв'язок системи (9) при $j=0$, із (10) для всіх $(\psi,\tau,\varepsilon)\in G_1$ випливає оцінка

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\psi}Y_1(\psi,\tau,\varepsilon)\right\| \le \varepsilon\sigma_1 K\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|t-\tau|}\left(m + \left\|\frac{\partial}{\partial\psi}(\varphi_{\tau,0}^{t}-\psi)\right\|\right)dt + \overline{K}_1 +$$

$$+ \varepsilon^2\sigma_1 K\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|\tau_\nu-\tau|}\left(m + \left\|\frac{\partial}{\partial\psi}(\varphi_{\tau,0}^{\tau_\nu}-\psi)\right\|\right) + \overline{K}_2, \tag{39}$$

де

$$\overline{K}_1 \equiv \sum_{k\ne 0}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left\|\int_{s+\tau}^{s+\tau+1} Q(\tau,t,\varepsilon)A_k(\overline{x}(t,\varepsilon),t)\left(E+\frac{\partial}{\partial\psi}(\varphi_{\tau,0}^{t}-\psi)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{i\left(k,\overline{\theta}_{\tau,0}^{t}\right)\right\}\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}(k,\omega(\xi))d\xi\right\}dt\right\|,$$

$$\overline{K}_2 = \sum_{k\ne 0}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left\|\varepsilon\sum_{\tau+s\le\tau_\nu<\tau+s+1} Q(\tau,\tau_\nu,\varepsilon)P_k(\overline{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\tau_\nu)\left(E+\left\|\frac{\partial}{\partial\psi}(\varphi_{\tau,0}^{\tau_\nu}-\psi)\right\|\right)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{i\left(k,\overline{\theta}_{\tau,0}^{\tau_\nu}\right)\right\}\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\tau}^{\tau_\nu}(k,\omega(\xi))d\xi\right\}\right\|.$$

Для оцінки $\overline{K}_1$ і $\overline{K}_2$ використаємо лему 2. У випадку $\overline{K}_1$ виберемо в якості f вираз $Q(\tau, t, \varepsilon)A_k(\bar{x}(t, \varepsilon), t)$, а в якості g вираз $E + z^l_\tau$, де $z^l_\tau = \partial(\varphi^l_{\tau,0} - \psi)/\partial\psi$. Тоді для всіх $\tau_\nu \in [\tau + s, \tau + s + 1]$ маємо

$$\left\| \Delta f \right|_{t=\tau_\nu} \| \le \varepsilon\sigma_1 \|k\| \left(\sup_{\overline{G}} \|a_k\| + \sup_{\overline{G}} \left\| \frac{\partial a_k}{\partial x} \right\| \right) \sup_{[\tau+s,\, \tau+s+1]} \|Q(\tau, t, \varepsilon)\|,$$

$$\left\| \Delta g \right|_{t=\tau_\nu} \| \le \varepsilon 2\sigma_1 \left(\left\| z^{\tau_j}_\tau \right\| + m \right).$$

Для оцінювання $\overline{K}_2$ покладемо $f = Q(\tau, t, \varepsilon)P_k(\bar{x}(t, \varepsilon), t)$, а $g = E + z^l_\tau$ і отримаємо аналогічну нерівність

$$\left\| \Delta f \right|_{t=\tau_\nu} \| \le \varepsilon\sigma_1 \|k\| \left(\sup_{\overline{G}} \|p_k\| + \sup_{\overline{G}} \left\| \frac{\partial p_k}{\partial x} \right\| \right) \sup_{[\tau+s,\, \tau+s+1]} \|Q(\tau, t, \varepsilon)\|.$$

Отже, на підставі леми 2

$$\overline{K}_1 + \overline{K}_2 \le$$

$$\le \sigma_6 \varepsilon^\alpha \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left(1 + \int_{\tau+s}^{\tau+s+1} \|z^l_\tau\| dl + \varepsilon \sum_{\tau+s \le \tau_\nu < \tau+s+1} \left\| z^{\tau_\nu}_\tau \right\| \right) \max_{[\tau+s,\, \tau+s+1]} e^{-\gamma|t-\tau|} \tag{40}$$

з деякою сталою σ_6.

Оскільки $\|\partial Y_0(\psi, \tau, \varepsilon)/\partial\psi\| \le d_2 \varepsilon^\alpha$ зі сталою $d_2 > 0$, яку буде означено нижче, і

$$\left\| \frac{\partial Y_0(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial\tau} + \frac{\partial Y_0(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial\psi} \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} \right\| \le \bar{d}_1 \equiv 3\sigma_1(1 + \rho), \tag{41}$$

то для оцінки $\|z^l_\tau\|$ застосуємо лему 1, і як в роботі [4, с. 165], врахувавши нерівності (39) – (41), одержимо

$$\left\| \frac{\partial}{\partial\psi} Y_1(\psi, \tau, \varepsilon) \right\| \le d_2 \varepsilon^\alpha, \quad (\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1.$$

Далі, подамо різницю $Y_1(\psi, \tau_r + 0, \varepsilon) - Y_1(\psi, \tau_r, \varepsilon) = \eta$ у вигляді

$$\eta = \varepsilon G(\tau_r, \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} Q(\tau_r, t, \varepsilon) F_1\left(0, \varphi^l_{\tau_r+0,0}, t, \varepsilon\right) dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} Q(\tau_r, t, \varepsilon) \left[F_1\left(0, \varphi^l_{\tau_r+0,0}, t, \varepsilon\right) - F_1\left(0, \varphi^l_{\tau_r,0}, t, \varepsilon\right) \right] dt +$$

$$+ \varepsilon^2 G(\tau_r, \varepsilon) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} Q(\tau_r, \tau_\nu, \varepsilon) \Phi_1\left(0, \varphi^{\tau_\nu}_{\tau_\nu+0}, \tau_\nu, \varepsilon\right) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} Q(\tau_r, \tau_\nu, \varepsilon) \left[\Phi_1\left(0, \varphi^{\tau_\nu}_{\tau_r+0,0}, \tau_\nu, \varepsilon\right) - \Phi_1\left(0, \varphi^{\tau_\nu}_{\tau_r,0}, \tau_\nu, \varepsilon\right) \right].$$

Звідси на підставі леми 4 встановлюємо, що

$$\| Y_1(\psi, \tau_r + 0, \varepsilon) - Y_1(\psi, \tau_r, \varepsilon) \| \le \bar{d}_1 \varepsilon$$

з деякою сталою $\bar{d}_1$ для всіх $(\psi, \varepsilon) \in R^m \times (0, \varepsilon_0]$ і $r \in Z$.

З експоненціальної оцінки (5) норми матриці $Q(\tau, t, \varepsilon)$ випливає рівномірна збіжність інтеграла і ряду з правої частини (10) при $\tau \in [-T, T]$, $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ для $j = 0$, а також інтегралів та рядів, що отримуються з них шляхом диференціювання по ψ і τ під знаками відповідно інтеграла та суми. Тут T — довільне додатне число. Тому функції $Y_1(\psi, \tau, \varepsilon)$, $\partial Y_1(\psi, \tau, \varepsilon)/\partial\psi$ і $\partial Y_1(\psi, \tau, \varepsilon)/\partial\tau$ неперервні по ψ, τ при $\psi \in R^m$, $\tau \in [-T, T]$, $\tau \neq \tau_\nu$. На підставі довільності T одержуємо їх неперервність при $\tau \in \overline{R}$. Це дає можливість міняти місцями операції диференціювання та інтегрування і підсумовування, тому для всіх $(\psi, \tau, \varepsilon) \in \underline{G}_1$ при $j = 0$ з (10) випливає рівність

$$\frac{\partial Y_{j+1}(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial\tau} + \frac{\partial Y_{j+1}(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \tilde{b}(\psi, \tau, \varepsilon)\right) =$$

$$= H(\tau, \varepsilon) Y_{j+1}(\psi, \tau, \varepsilon) + F_1(Y_j(\psi, \tau, \varepsilon), \psi, \tau, \varepsilon) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial B_1}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial\varphi_{\tau, j}^t}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi_{\tau, j}^t}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \tilde{b}(\psi, \tau, \varepsilon)\right)\right] dt +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\partial B_2}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial\varphi_{\tau, j}^{\tau_\nu}}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi_{\tau, j}^{\tau_\nu}}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \tilde{b}(\psi, \tau, \varepsilon)\right)\right], \tag{42}$$

в якій $\tilde{b}(\psi, \tau, \varepsilon) = b\left(\overline{x}(\tau, \varepsilon) + Y_j(\psi, \tau, \varepsilon), \psi, \tau, \varepsilon\right)$, а B_1 і B_2 позначають відповідно функції, що записані під знаками інтеграла та суми в правій частині рівності (10).

З рівнянь (9) знаходимо

$$\frac{\partial\varphi_{\tau, j}^t}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi_{\tau, j}^t}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \tilde{b}(\psi, \tau, \varepsilon)\right) =$$

$$= \int_{\tau}^{t} \frac{\partial\tilde{b}(\varphi_{\tau, j}^l, l, \varepsilon)}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial\varphi_{\tau, j}^l}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi_{\tau, j}^l}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \tilde{b}(\psi, \tau, \varepsilon)\right)\right] dl +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\tau < \tau_\nu < t} \frac{\partial\tilde{q}\left(\varphi_{\tau, j}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon\right)}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial\varphi_{\tau, j}^{\tau_\nu}}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi_{\tau, j}^{\tau_\nu}}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \tilde{b}(\psi, \tau, \varepsilon)\right)\right],$$

де $\tilde{q}(\psi, \tau, \varepsilon) = q\left(\overline{x}(\tau, \varepsilon) + Y_j(\psi, \tau, \varepsilon), \psi, \tau, \varepsilon\right)$. Покладаючи

$$f(t) = \frac{\partial\varphi_{\tau, j}^t}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi_{\tau, j}^t}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \tilde{b}(\psi, \tau, \varepsilon)\right),$$

з останньої рівності отримуємо нерівність

$$\|f(t)\| \leq \int_{\tau}^{t} \|f(l)\| dl \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial\tilde{b}(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial\psi}\right\| + \varepsilon \sum_{\tau < \tau_\nu < t} \|f(\tau_\nu)\| \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial\tilde{q}(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial\psi}\right\|.$$

Звідси одержуємо [2] $f(t) \equiv 0$, тому рівність (42) при $j = 0$ і $(\psi, \tau, \varepsilon) \in \underline{G}_1$ набирає вигляду

$$\frac{\partial Y_{j+1}(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial\tau} + \frac{\partial Y_{j+1}(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b\left(\overline{x}(\tau, \varepsilon) + Y_j(\psi, \tau, \varepsilon), \psi, \tau, \varepsilon\right)\right) =$$

$$= H(\tau, \varepsilon) Y_{j+1}(\psi, \tau, \varepsilon) + F_1(Y_j(\psi, \tau, \varepsilon), \psi, \tau, \varepsilon). \tag{43}$$

З (43) при $\sigma_2 \varepsilon_0^\alpha \leq 1$ випливає нерівність

$$\left\| \frac{\partial Y_1(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + \frac{\partial Y_1(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial \psi} \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} \right\| \le \overline{d}_1, \quad (\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1.$$

Припустимо, що нерівності (35), (36) і друга з нерівностей (34) справджуються для всіх $j = \overline{1, h-1}$, де $2 < h$ — деяке натуральне число. Доведемо їх для $j = h$.

На підставі (7) із (10) для всіх $(\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1$ отримуємо нерівність

$$\sup_{\psi, \tau} \left\| \frac{\partial}{\partial \psi} Y_h(\psi, \tau, \varepsilon) \right\| \le \left[\frac{2}{\gamma} K(1 + \theta^{-1} e^{\gamma\theta})\delta_1 + \frac{2}{\gamma} K\sigma_1(1 + \theta^{-1} e^{\gamma\theta})\varepsilon + \right.$$

$$\left. + \underline{\sigma}_0(e^{\gamma\theta\varepsilon_0} - 1) + \sigma_0 \right] \sup_{\psi, \tau} \left\| \frac{\partial}{\partial \psi} Y_{h-1}(\psi, \tau, \varepsilon) \right\| + (\delta_1 + 2\sigma_1)c_1(1 + d_2) \times$$

$$\times \frac{3}{\gamma} K(1 + \theta^{-1} e^{2\gamma\theta/3}) d_2 \varepsilon^{2\alpha} + \sigma_1 c_1 (1 + d_2) \frac{3}{\gamma} K(1 + \theta^{-1} e^{2\gamma\theta/3}) \varepsilon^{1+\alpha} + \underline{K}_1 + \underline{K}_2, \quad (44)$$

де

$$\underline{K}_1 = \sum_{k \ne 0} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left\| \int_{\tau+s}^{\tau+s+1} Q(\tau, t, \varepsilon) A_k\left(\overline{x}(t, \varepsilon) + Y_{h-1}\left(\varphi^t_{\tau, h-1}, t, \varepsilon\right), t\right) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left\{ i\left(k, \overline{\theta}^t_{\tau, h-1}\right) \right\} \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\tau}^{t} (k, \omega(\xi)) d\xi \right\} dt \right\|,$$

$$\underline{K}_2 = \sum_{k \ne 0} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left\| \varepsilon \sum_{\tau+s \le \tau_\nu < \tau+s+1} Q(\tau, \tau_\nu, \varepsilon) P_k\left(\overline{x}(\tau_\nu, \varepsilon) + Y_{h-1}\left(\varphi^{\tau_\nu}_{\tau, h-1}, \tau_\nu, \varepsilon\right), \tau_\nu\right) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left\{ i\left(k, \overline{\theta}^{\tau_\nu}_{\tau, h-1}\right) \right\} \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\tau}^{\tau_\nu} (k, \omega(\xi)) d\xi \right\} \right\|.$$

За допомогою оцінок (18) і (19) встановлюємо, що при $d_2 \varepsilon_0^\alpha \le 1$

$$\underline{K}_1 + \underline{K}_2 \le \sigma_7 \varepsilon^\alpha$$

зі сталою σ_7, яка залежить від $\underline{d}_1$ і $\overline{d}_1$, але не залежить від d_2. Виберемо $\delta_1 > 0$ і $\varepsilon_0 > 0$ так, щоб

$$\frac{2}{\gamma} K(1 + \theta^{-1} e^{\gamma\theta})\delta_1 < \frac{1 - \sigma_0}{6}, \quad \frac{2}{\gamma} \sigma_1 K(1 + \theta^{-1} e^{\gamma\theta})\varepsilon_0 < \frac{1 - \sigma_0}{6},$$

$$\underline{\sigma}_0\left(e^{\gamma\theta\varepsilon_0} - 1\right) < \frac{1 - \sigma_0}{6}, \quad (\delta_1 + 2\sigma_1)c_1(1 + d_2)\frac{3}{\gamma} K(1 + \theta^{-1} e^{2\gamma\theta/3}) d_2 \varepsilon_0^\alpha < 1,$$

$$\sigma_1 c_1 (1 + d_2) \frac{3}{\gamma} K\left(1 + \theta^{-1} e^{\frac{2}{3}\gamma\theta}\right)\varepsilon_0 < 1.$$

Тоді з нерівності (44) дістанемо оцінку

$$\sup_{\psi, \tau} \left\| \frac{\partial}{\partial \psi} Y_h(\psi, \tau, \varepsilon) \right\| < \frac{1 + \sigma_0}{2} \sup_{\psi, \tau} \left\| \frac{\partial}{\partial \psi} Y_{h-1}(\psi, \tau, \varepsilon) \right\| + (2 + \sigma_7)\varepsilon^\alpha,$$

з якої з урахуванням того, що $\sigma_0 < 1$ і

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \psi} Y_{h-1}(\psi, \tau, \varepsilon) \right\| \le d_2 \varepsilon^\alpha,$$

отримаємо нерівність

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \psi} Y_h(\psi, \tau, \varepsilon) \right\| \le d_2 \varepsilon^{\alpha}, \qquad (\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1,$$

зі сталою $d_2 = 2(2+\sigma_7)(1-\sigma_0)^{-1}$.

Як і у випадку $j = 0$, показуємо, що рівність (43) справедлива для $j = h-1$, і з неї знаходимо

$$\left\| \frac{\partial Y_h(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + \frac{\partial Y_h(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial \psi} \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} \right\| \le \overline{d}_1, \qquad (\psi, \tau, \varepsilon) \in \underline{G}_1.$$

Дослідимо далі оцінку для

$$\Delta Y_h(\psi, \tau, \varepsilon)|_{\tau=\tau_r} = Y_h(\psi, \tau_r + 0, \varepsilon) - Y_h(\psi, \tau_r, \varepsilon).$$

Із (10) доводимо нерівність

$$\left\| \Delta Y_h(\psi, \tau, \varepsilon)|_{\tau=\tau_r} \right\| \le \frac{4}{\gamma} K \sigma_1^2 (1+\rho)(1+\theta^{-1} e^{\gamma\theta})\varepsilon + (\delta_1 d_2 + 2\sigma_1 d_2 + \sigma_1) \times$$

$$\times \frac{3}{\gamma} K \left(1 + \theta^{-1} e^{\frac{2}{3}\gamma\theta} \right) c_{10} \varepsilon^{1+\alpha} + \tilde{K}_1 + \tilde{K}_2, \tag{45}$$

де

$$\tilde{K}_1 = \sum_{k \ne 0} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left\| \int_{\tau_r+s}^{\tau_r+s+1} Q(\tau_r, t, \varepsilon) a_k \left(\overline{x}(t, \varepsilon) + Y_{h-1}\left(\psi^t_{\tau_r, h-1}, t, \varepsilon \right), t \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\exp\left\{ i\left(k, \overline{\theta}^t_{\tau_r+0, h-1}\right) \right\} - \exp\left\{ i\left(k, \overline{\theta}^t_{\tau_r, h-1}\right) \right\} \right) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\tau_r}^{t} (k, \omega(\xi)) d\xi \right\} dt \right\|,$$

$$\tilde{K}_2 = \sum_{k \ne 0} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left\| \varepsilon \sum_{\tau_r+s \le \tau_\nu < \tau_r+s+1} Q(\tau_r, \tau_\nu, \varepsilon) p_k \left(\overline{x}(\tau_\nu, \varepsilon) + Y_{h-1}\left(\psi^{\tau_\nu}_{\tau_r, h-1}, \tau_\nu, \varepsilon \right), \tau_\nu \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\exp\left\{ i\left(k, \theta^{\tau_\nu}_{\tau_r+0, h-1}\right) \right\} - \exp\left\{ i\left(k, \theta^{\tau_\nu}_{\tau_r, h-1}\right) \right\} \right) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\tau_r}^{\tau_\nu} (k, \omega(\xi)) d\xi \right\} \right\|.$$

Оскільки

$$|\eta_{h-1}(t, r, k)| \le \varepsilon c_{10} \|k\| e^{\frac{\gamma}{3}|t-\tau_r|}, \qquad \left| \frac{d}{dt} \eta_{h-1}(t, r, k) \right| \le \varepsilon 3 c_{10} \|k\| e^{\frac{\gamma}{3}|t-\tau_r|},$$

$$\left| \Delta\eta_{h-1}(t, r, k)|_{t=\tau_\nu} \right| \le \varepsilon^2 3 \sigma_1 c_{10} \|k\|^2 e^{\frac{\gamma}{3}|\tau_\nu - \tau_r|},$$

де

$$\eta_s(t, r, k) = \exp\left\{ i\left(k, \overline{\theta}^t_{\tau_r+0, s}\right) \right\} - \exp\left\{ i\left(k, \overline{\theta}^t_{\tau_r, s}\right) \right\},$$

то

$$\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 \le \sigma_8 \varepsilon^{1+\alpha}.$$

Тут σ_8 — стала, яка залежить від $\underline{d}_1$. Нехай

$$\underline{d}_1 = \frac{4}{\gamma} K \sigma_1^2 (1+\rho)(1+\theta^{-1}) e^{\gamma\theta} + 1,$$

а ε_0 настільки мале, що

$$\left[(\delta_1 d_2 + 2\sigma_1 d_2 + \sigma_1)\frac{3}{\gamma}K\left(1+\theta^{-1}e^{\frac{2}{3}\gamma\theta}\right)c_{10} + \sigma_8\right]\varepsilon_0^{\alpha} \le 1.$$

Тоді з нерівності (45) випливає

$$\left\| \Delta Y_h(\psi, \tau, \varepsilon)|_{\tau=\tau_r} \right\| \le \varepsilon \underline{d}_1 \quad \forall\, (\psi, \varepsilon) \in R^m \times (0, \varepsilon_0], \quad r \in Z.$$

Таким чином, згідно з методом математичної індукції доведено нерівності (34) – (36) для всіх $j \ge 0$.

Періодичність функцій $Y_j(\psi, \tau, \varepsilon)$, $j \ge 0$, по ψ_s, $s = \overline{1, m}$, встановлюється, як і в монографії [4, с. 171]. Теорему доведено.

Вивчені властивості функцій $Y_j(\psi, \tau, \varepsilon)$ дають можливість будувати інтегральний многовид $x = X(\psi, \tau, \varepsilon)$ системи (1).

Теорема 2. *При виконанні умов теореми* 1 *справедливі наступні твердження*:

1) *існує інтегральний многовид* $x = X(\psi, \tau, \varepsilon)$ *системи* (1), *який належить* $d_1\varepsilon^{\alpha}$-*околу кривої* $x = \overline{x}(\tau, \varepsilon)$ *для всіх* $(\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1$;

2) *функція* $X(\psi, \tau, \varepsilon)$ 2π-*періодична по* ψ_s, $s = \overline{1, m}$, *задовольняє умову Ліпшиця по* ψ *зі сталою, пропорційною* ε^{α}, *кусково-неперервна по* τ *з розривами першого роду при* $\tau = \tau_\nu$;

3) *на інтегральному многовиді система* (1) *набирає вигляду*

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(t)}{\varepsilon} + b(X(\varphi, \tau, \varepsilon), \varphi, \tau, \varepsilon), \quad \tau \ne \tau_\nu,$$

$$\Delta\varphi|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon q(X(\varphi, \tau_\nu, \varepsilon), \varphi, \tau_\nu, \varepsilon).$$

Доведення. Із (10) та леми 3 встановлюємо нерівність

$$\begin{aligned}\left\| Y_{j+1}(\psi, \tau, \varepsilon) - Y_j(\psi, \tau, \varepsilon) \right\| \le \Bigg[\sigma_0 + \frac{2}{\gamma}K\left(1+\theta^{-1}e^{\theta\gamma}\right)\delta_1 + \underline{\sigma}_0\left(e^{\gamma\theta\varepsilon_0} - 1\right) + \\ + \frac{2}{\gamma}K\left(1+\theta^{-1}e^{\gamma\theta}\right)\varepsilon\sigma_1 + c_6 d_2(\delta_1 + 2\sigma_1)\frac{3K}{\gamma}\left(1+\theta^{-1}e^{\frac{2}{3}\gamma\theta}\right)\varepsilon^{\alpha}\Bigg] \times \\ \times \sup_{G_1}\left\| Y_j(\psi, \tau, \varepsilon) - Y_{j-1}(\psi, \tau, \varepsilon) \right\| + \underline{K}_1 + \underline{K}_2,\end{aligned} \tag{46}$$

в якій

$$\underline{K}_1 = \sum_{k \ne 0} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \Bigg\| \int_{\tau+s}^{\tau+s+1} Q(\tau, t, \varepsilon)\, a_k\left(\overline{x}(t, \varepsilon) + Y_j\left(\varphi^t_{\tau, j}, t, \varepsilon\right), t\right) \times$$
$$\times \left[\exp\left\{i\left(k, \overline{\theta}^t_{\tau, j}\right)\right\} - \exp\left\{i\left(k, \overline{\theta}^t_{\tau, j-1}\right)\right\}\right] \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}(k, \omega(\xi))\,d\xi\right\} dt \Bigg\|,$$

$$\underline{K}_2 = \sum_{k \ne 0} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \Bigg\| \varepsilon \sum_{\tau+s \le \tau_\nu < \tau+s+1} Q(\tau, \tau_\nu, \varepsilon)\, p_k\left(\overline{x}(\tau_\nu, \varepsilon) + Y_j\left(\varphi^{\tau_\nu}_{\tau, j}, \tau_\nu, \varepsilon\right), \tau_\nu\right) \times$$
$$\times \left[\exp\left\{i\left(k, \overline{\theta}^{\tau_\nu}_{\tau, j}\right)\right\} - \exp\left\{i\left(k, \overline{\theta}^{\tau_\nu}_{\tau, j-1}\right)\right\}\right] \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\tau}^{\tau_\nu}(k, \omega(\xi))\,d\xi\right\} \Bigg\|.$$

На підставі леми 3 і нерівності (5) одержуємо оцінку вигляду

$$\underline{K}_1 + \underline{K}_2 \leq \sigma_9 \varepsilon^\alpha \sup_{G_1} \left\| Y_j(\psi, \tau, \varepsilon) - Y_{j-1}(\psi, \tau, \varepsilon) \right\|,$$

завдяки якій із (46) при досить малих додатних δ_1 і ε_0 дістаємо

$$\sup_{G_1} \left\| Y_{j+1}(\psi, \tau, \varepsilon) - Y_j(\psi, \tau, \varepsilon) \right\| \leq \frac{1+\sigma_0}{2} \sup_{G_1} \left\| Y_j(\psi, \tau, \varepsilon) - Y_{j-1}(\psi, \tau, \varepsilon) \right\|.$$

Оскільки $\sigma_0 < 1$, то звідси випливає рівномірна збіжність послідовності $\left\{ Y_j(\psi, \tau, \varepsilon) \right\}$ на множині G_1, і гранична функція

$$Y(\psi, \tau, \varepsilon) = \lim_{j \to \infty} Y_j(\psi, \tau, \varepsilon) \tag{47}$$

на основі теореми 1 неперервна по $(\psi, \tau) \in R^m \times \overline{R}$, 2π-періодична по ψ_s, $s = \overline{1, m}$, та задовольняє нерівності

$$\| Y(\psi, \tau, \varepsilon) \| \leq d_1 \varepsilon^\alpha, \qquad \| Y(\psi, \tau, \varepsilon) - Y(\overline{\psi}, \tau, \varepsilon) \| \leq d_2 \varepsilon^\alpha \| \psi - \overline{\psi} \|$$

для всіх $(\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1$, $\overline{\psi} \in R^m$.

З нерівності (26) випливає, що при $t \in [-T, T]$, $(\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1$, де T — довільне додатне число, послідовність $\left\{ \varphi^l_{\tau, j}(\psi, \varepsilon) \right\}$ також рівномірно збіжна до $\varphi^l_\tau(\psi, \varepsilon)$:

$$\lim_{j \to \infty} \varphi^l_{\tau, j}(\psi, \varepsilon) = \varphi^l_\tau(\psi, \varepsilon), \qquad (\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1, \qquad t \in R. \tag{48}$$

Покажемо, що $y = Y(\psi, \tau, \varepsilon)$ визначає інтегральний многовид системи (6). Оскільки $y = Y_{j+1}(\psi, \tau, \varepsilon)$ — інтегральний многовид системи (8), (9), то для її розв'язків $\varphi = \varphi^\tau_{l, j}(\psi, \varepsilon)$, $y = Y_{j+1}\left(\varphi^\tau_{l, j}(\psi, \varepsilon), \tau, \varepsilon\right)$ маємо

$$\begin{gathered}\varphi^\tau_{l, j} = \psi + \int_l^\tau \left[\frac{\omega(l)}{\varepsilon} + b\left(\overline{x}(l, \varepsilon) + Y_j\left(\varphi^l_{l, j}(\psi, \varepsilon), l, \varepsilon\right), \varphi^l_{l, j}(\psi, \varepsilon), l, \varepsilon \right) \right] dl + \\ + \varepsilon \sum_{l \leq \tau_\nu < \tau} q\left(\overline{x}(\tau_\nu, \varepsilon) + Y_j\left(\varphi^{\tau_\nu}_{l, j}(\psi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon\right), \varphi^{\tau_\nu}_{l, j}(\psi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon \right), \\ \hfill (49) \\ Y_{j+1}\left(\varphi^\tau_{l, j}(\psi, \varepsilon), \tau, \varepsilon\right) = Y_{j+1}(\psi, \tau, \varepsilon) + \int_l^\tau \Big[H(l, \varepsilon) Y_{j+1}\left(\varphi^l_{l, j}(\psi, \varepsilon), l, \varepsilon\right) + \\ + F_1\left(Y_j\left(\varphi^l_{l, j}(\psi, \varepsilon), l, \varepsilon\right), \varphi^l_{l, j}(\psi, \varepsilon), l, \varepsilon \right) \Big] dl + \\ + \varepsilon \sum_{l \leq \tau_\nu < \tau} \left[G(\tau_\nu, \varepsilon) Y_{j+1}\left(\varphi^{\tau_\nu}_{l, j}(\psi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon\right) + \Phi_1\left(Y_j\left(\varphi^{\tau_\nu}_{l, j}(\psi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon\right), \varphi^{\tau_\nu}_{l, j}(\psi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon \right) \right].\end{gathered}$$

Якщо перейти до границі в (49) при $j \to \infty$ і скористатися рівностями (47) і (48), то дістанемо тотожності

$$\begin{gathered}\varphi^\tau_l(\psi, \varepsilon) = \psi + \int_l^\tau \left[\frac{\omega(l)}{\varepsilon} + b\left(\overline{x}(l, \varepsilon) + Y\left(\varphi^l_l(\psi, \varepsilon), l, \varepsilon\right), \varphi^l_l(\psi, \varepsilon), l, \varepsilon \right) \right] dl + \\ + \varepsilon \sum_{l \leq \tau_\nu < \tau} q\left(\overline{x}(\tau_\nu, \varepsilon) + Y\left(\varphi^{\tau_\nu}_l(\psi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon\right), \varphi^{\tau_\nu}_l(\psi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon \right),\end{gathered}$$

$$Y\left(\varphi_t^{\tau}(\psi, \varepsilon), \tau, \varepsilon\right) = Y(\psi, \tau, \varepsilon) + \int_t^{\tau} \left[H(l, \varepsilon) Y\left(\varphi_t^{l}(\psi, \varepsilon), l, \varepsilon\right) + \right.$$

$$\left. + F_1\left(Y\left(\varphi_t^{l}(\psi, \varepsilon), l, \varepsilon\right), \varphi_t^{l}(\psi, \varepsilon), l, \varepsilon\right) \right] dl +$$

$$+ \varepsilon \sum_{t \le \tau_\nu < \tau} \left[G(\tau_\nu, \varepsilon) Y\left(\varphi_t^{\tau_\nu}(\psi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon\right) + \Phi_1\left(Y\left(\varphi_t^{\tau_\nu}(\psi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon\right), \varphi_t^{\tau_\nu}(\psi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon\right) \right]$$

для всіх $\psi \in R^m$, $\tau \in R$, $t \in R$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, з яких випливає, що $y = Y(\psi, \tau, \varepsilon)$ — інтегральний многовид системи (6). Для завершення доведення теореми залишилось покласти $X(\psi, \tau, \varepsilon) = \bar{x}(\tau, \varepsilon) + Y(\psi, \tau, \varepsilon)$.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Метод усреднения в системах с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 1. – С. 56 – 64.
4. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 340 с.
5. *Астафьева М. Н.* Усреднение многочастотных колебательных систем с импульсным воздействием: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1989. – 103 с.
6. *Петришин Я. Р.* Усереднення багатоточкових задач для нелінійних коливних систем з повільно змінними частотами: Дис.… канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2001. – 131 с.
7. *Петришин Р. І., Сопронюк Т. М.* Експоненціальна оцінка фундаментальної матриці лінійної імпульсної системи // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 8. – С. 1101 – 1109.

Одержано 12.02.2003