УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

We present conditions under which global solutions of linear systems of differential equations with deviating argument are solutions of systems of ordinary differential equations.

Наведено умови, при яких глобальними розв'язками лінійних систем диференціальних рівнянь з аргументом, що відхилюється, є розв'язки систем звичайних диференціальних рівнянь.

Проблема существования глобальных решений (продолжимых на всю ось $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$) дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом постоянно привлекает к себе внимание исследователей. Об этом свидетельствуют начинающиеся с работы Ю. А. Рябова [1] (см. также [2]) многочисленные исследования, изложенные как в монографиях [3, 4], так и в отдельных статьях [5 – 8].

Особый раздел в теории глобальных решений составляют результаты, полученные с помощью метода интегральных многообразий Боголюбова [9 – 13].

Несмотря на это, указанная проблема даже для линейных уравнений с отклоняющимся аргументом далека от своего разрешения. Вопросу существования глобальных решений линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом посвящена и настоящая работа. В ней проблема глобальных решений разрешается в контексте нестандартной задачи построения для уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t+\lambda) + f(t) \tag{1}$$

дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x + g(t), \tag{2}$$

все решения которого являлись бы глобальными решениями уравнения (1). Естественно предполагать, что $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, A, B, C — n-мерные матричные, f, g — векторные функции, определенные для $t \in \mathbb{R}$ и измеримые (по Лебегу) на $\mathbb{R}$, λ — действительная постоянная. Очевидна связь этой задачи с задачей об интегральных многообразиях для (1) в предельно возможном для метода Боголюбова случае, когда все $\mathbb{R}^n$ для (1) является интегральным многообразием.

В данной работе мы вначале найдем для $C = C(t)$ и $g = g(t)$ уравнения вида

$$C(t) = A(t) + B(t)\Omega_t^{t+\lambda}(C), \tag{3}$$

$$g(t) = f(t) + B(t)\int_t^{t+\lambda} \Omega_\tau^{t+\lambda}(C) g(\tau)\, d\tau, \tag{4}$$

где

$$\Omega_\tau^t(C) = I + \int_\tau^t C(s)\,ds + \int_\tau^t C(s)\int_\tau^s C(s_1)\,ds_1\,ds + \ldots$$

$$\ldots + \int_\tau^t C(s)\int_\tau^s C(s_1)\ldots\int_\tau^{s_{n-2}} C(s_{n-1})\,ds_{n-1}\ldots ds_1\,ds + \ldots, \tag{5}$$

I — единичная матрица, $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, а затем докажем основную теорему о разрешимости уравнений (3), (4).

Теорема 1. *Пусть A, B и f определены и измеримы (по Лебегу) на $\mathbb{R}$, удовлетворяют неравенствам*

$$\|A(t)\| \le \alpha, \quad \|B(t)\| \le \beta, \quad \|f(t)\| \le 1, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

и такие, что

$$|\lambda|\beta e^{|\lambda|\alpha+1} < 1. \tag{7}$$

Тогда существуют определенные и измеримые на $\mathbb{R}$ решения C, g уравнений (3), (4), *удовлетворяющие неравенствам*

$$\|C(t)\| \le M, \quad \|g(t)\| \le M_1, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

где M и M_1 — некоторые постоянные, зависящие от $|\lambda|$, α, β.

Здесь норма вектора евклидова, норма матрицы согласована с евклидовой нормой вектора.

Следующая теорема устанавливает свойства решений уравнений (3), (4), аналогичные свойствам функций A, B и f.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и A, B, f являются r раз непрерывно дифференцируемыми, периодическими, квазипериодическими или почти периодическими функциями. Тогда r раз непрерывно дифференцируемыми, периодическими, квазипериодическими или почти периодическими соответственно являются решения C, g уравнений* (3), (4).

Некоторые общие свойства решений уравнений (3), (4), а также вопрос неединственности таких решений обсуждаются в заключительных замечаниях работы.

1. Вывод уравнений (3), (4). Рассмотрим уравнение (2) в предположении, что C и g являются измеримыми на $\mathbb{R}$ функциями, удовлетворяющими неравенствам (8). Тогда ряд (5) определяет фундаментальную матрицу решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (2). Этот ряд сходится для всех $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, причем равномерно по (t, τ) на каждом компакте плоскости $\mathbb{R}^2$. Более того, общее решение уравнения (2) определяется формулой Коши

$$x(t) = \Omega_\tau^t(C)x_0 + \int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)\,ds, \tag{9}$$

где $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, постоянная $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Функция (9) будет удовлетворять уравнению (1), когда

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(t)\left[\Omega_\tau^t(C)x_0 + \int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)\,ds\right] + g(t) =$$

$$= A(t)\left[\Omega_\tau^t(C)x_0 + \int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)\,ds\right] +$$

$$+ B(t)\left[\Omega_\tau^{t+\lambda}(C)x_0 + \int_\tau^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)\,ds\right] + f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Полагая в тождестве (10) значение $x_0 = 0$, приходим к выводу, что

$$C(t)\int\limits_{\tau}^{t} \Omega_s^t(C)g(s)ds + g(t) = A(t)\int\limits_{\tau}^{t} \Omega_s^t(C)g(s)ds +$$

$$+ B(t)\int\limits_{\tau}^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds + f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Учитывая (10) и (11), в результате получаем уравнение

$$C(t)\Omega_\tau^t(C) = A(t)\Omega_\tau^t(C) + B(t)\Omega_\tau^{t+\lambda}(C), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Из свойств матрицы $\Omega_\tau^t(C)$ следует, что уравнение (12) справедливо лишь тогда, когда

$$C(t) = A(t) + B(t)\Omega_t^{t+\lambda}(C), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (11), получаем, что тождество (11) выполняется только в том случае, когда для $t \in \mathbb{R}$

$$g(t) = f(t) + B(t)\left[\int\limits_{\tau}^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds - \Omega_t^{t+\lambda}(C)\int\limits_{\tau}^{t} \Omega_s^t(C)g(s)ds\right] =$$

$$= f(t) + B(t)\left[\int\limits_{\tau}^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds - \int\limits_{\tau}^{t} \Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds\right] =$$

$$= f(t) + B(t)\int\limits_{t}^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds.$$

Таким образом, если все решения уравнения (2) являются глобальными решениями уравнения (1), то матрица $C(t)$ удовлетворяет уравнению (13), а функция $g(t)$ — уравнению

$$g(t) = f(t) + B(t)\int\limits_{t}^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Очевидно и обратное. Если измеримые на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющие неравенствам (8) функции C и g удовлетворяют уравнениям (13), (14), то функция (9) является глобальным решением уравнения (1).

Следовательно, разрешимость уравнений (3), (4) в пространстве измеримых на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющих оценкам (8) функций является необходимым и достаточным условием того, чтобы все решения уравнения (2) являлись глобальными решениями уравнения (1).

Приведем два примера уравнений (3), (4), в которых ряды (5) находятся явно.

***Пример* 1.** Пусть $n = 1$. Тогда ряд (5) определяет функцию

$$\Omega_t^{t+\lambda}(C) = e^{\int_t^{t+\lambda} C(s)ds} = e^{\int_0^{\lambda} C(t+s)ds}$$

и уравнения (3), (4) принимают вид

$$C(t) = a(t) + b(t)e^{\int_0^\lambda C(t+s)ds}, \tag{15}$$

$$g(t) = f(t) + b(t)\int_0^\lambda e^{\int_s^\lambda C(t+\tau)d\tau} g(t+s)ds. \tag{16}$$

***Пример* 2.** Пусть в уравнении (1) A и B — постоянные матрицы. Выбирая в качестве C также постоянную матрицу, получаем для ряда (5) выражение $\Omega_t^{t+\lambda}(C) = e^{C\lambda}$, так что уравнения (3), (4) принимают вид

$$C = A + Be^{C\lambda}, \tag{17}$$

$$g(t) = f(t) + B\int_0^\lambda e^{C(\lambda-s)} g(t+s)ds. \tag{18}$$

2. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим уравнение (3) и выполним в нем замену переменных

$$C = A + BY. \tag{19}$$

В результате получим уравнение

$$B(t)[Y(t) - \Omega_t^{t+\lambda}(A+BY)] = O,$$

откуда

$$Y(t) = \Omega_t^{t+\lambda}(A+BY) + B_0(t), \tag{20}$$

где $B_0(t)$ — матрица, определяемая условием

$$B(t)B_0(t) = O.$$

Относительно переменной

$$Z = Y - B_0 \tag{21}$$

уравнение (20) принимает вид

$$Z(t) = \Omega_t^{t+\lambda}(A+BZ). \tag{22}$$

Подставляя (21) в (19), получаем, что замена

$$C = A + BZ \tag{23}$$

преобразует уравнение (3) к виду (22).

Уравнение (22) выгодно отличается от исходного уравнения (3) тем, что его решения являются непрерывными функциями.

Определим оператор S

$$SZ(t) = \Omega_t^{t+\lambda}(A+BZ) \tag{24}$$

на пространстве $C(m)$ матриц $Z = Z(t)$, заданных и непрерывных на $\mathbb{R}$ и таких, что

$$\|Z\|_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|Z(t)\| \le m.$$

Очевидно, что $SZ(t)$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ матрицей. Более того, для $SZ(t)$ верна оценка

$$\| SZ \|_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \Omega_t^{t+\lambda}(\| A \| + \| B \| m) = e^{\lambda(\alpha+\beta m)}.$$

Следовательно, если выполняется неравенство

$$e^{\lambda(\alpha+\beta m)} \le m, \tag{25}$$

то оператор S переводит пространство $C(m)$ в себя.

Оценим разность $SZ_1(t) - SZ(t)$ для матриц $Z_1 \in C(m)$ и $Z \in C(m)$. Обозначим

$$P_1(t) = A(t) + B(t)Z_1(t), \quad P(t) = A(t) + B(t)Z(t)$$

и рассмотрим разность $\Omega_t^{t+\lambda}(P_1) - \Omega_t^{t+\lambda}(P)$. Имеем

$$\left\| \int_t^{t+\lambda} P_1(s)\,ds - \int_t^{t+\lambda} P(s)\,ds \right\| \le \int_t^{t+\lambda} \| P_1(s) - P(s) \|\,ds \le \lambda\beta \| Z_1 - Z \|_0,$$

$$\left\| \int_t^{t+\lambda} P_1(s) \int_t^s P_1(s_1)\,ds_1\,ds - \int_t^{t+\lambda} P(s) \int_t^s P(s_1)\,ds_1\,ds \right\| \le$$

$$\le \beta \left[\int_t^{t+\lambda} \int_t^s \| P_1(s_1) \|\,ds_1\,ds + \int_t^{t+\lambda} \| P(s) \| \int_t^s ds_1\,ds \right] \| Z_1 - Z \|_0 \le$$

$$\le 2(\alpha+\beta m)\beta \frac{\lambda^2}{2!} \| Z_1 - Z \|_0 = \lambda\beta \frac{(\alpha+\beta m)\lambda}{1!} \| Z_1 - Z \|_0,$$

$$\left\| \int_t^{t+\lambda} P_1(s) \int_t^s P_1(s_1) \ldots \int_t^{s_{n-2}} P_1(s_{n-1})\,ds_{n-1}\,ds_{n-2} \ldots ds_1\,ds - \right.$$

$$\left. - \int_t^{t+\lambda} P(s) \int_t^s P(s_1) \ldots \int_t^{s_{n-2}} P(s_{n-1})\,ds_{n-1}\,ds_{n-2} \ldots ds_1\,ds \right\| \le$$

$$\le \beta n \int_t^{t+\lambda} \int_t^s \ldots \int_t^{s_{n-2}} ds_{n-1}\,ds_{n-2} \ldots ds (\alpha+\beta m)^{n-1} \| Z_1 - Z \|_0 =$$

$$= \beta n \frac{\lambda^n}{n!} (\alpha+\beta m)^{n-1} \| Z_1 - Z \|_0 = \lambda\beta \frac{(\alpha+\beta m)^{n-1}\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \| Z_1 - Z \|_0.$$

Поэтому

$$\left\| \Omega_t^{t+\lambda}(P_1) - \Omega_t^{t+\lambda}(P) \right\| \le \lambda\beta e^{\lambda(\alpha+\beta m)} \| Z_1 - Z \|_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

следовательно,

$$\| SZ_1(t) - SZ(t) \| \le \lambda\beta e^{\lambda(\alpha+\beta m)} \| Z_1 - Z \|_0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{26}$$

и при выполнении неравенства

$$\lambda\beta e^{\lambda(\alpha+\beta m)} < 1 \tag{27}$$

оператор S является сжимающим оператором на $C(m)$.

Потребуем одновременного выполнения неравенств (25), (27). Пусть

$$\lambda\beta e^{\lambda\alpha+1} < 1. \tag{28}$$

Тогда уравнение

$$e^{\lambda(\alpha+\beta m)} = m$$

имеет два решения m_1 и m_2 такие, что

$$\lambda\beta m_1 < 1 < \lambda\beta m_2.$$

Отсюда следует, что для

$$m_1 \le m < \frac{1}{\lambda\beta} \tag{29}$$

будут выполняться одновременно оба неравенства (25) и (27).

Итак, при выполнении неравенства (28) для значений m, удовлетворяющих оценке (29), оператор S, заданный на $C(m)$ равенством (24), отображает $C(m)$ в себя и является сжимающим.

Пространство $C(m)$ относительно нормы $\|\cdot\|_0 = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|\cdot\|$ является полным нормированным пространством. Этого достаточно, чтобы оператор S, о котором речь идет выше, имел в $C(m)$ единственную неподвижную точку. Она и является единственным в $C(m)$ решением уравнения (22).

Перейдем к рассмотрению уравнения (14). Выполнив в нем замену переменных

$$g = f + Bz,$$

получим относительно z уравнение

$$z(t) = \int\limits_t^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C)f(s)\,ds + \int\limits_t^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C)B(s)z(s)\,ds =$$

$$= \int\limits_0^{\lambda} \Omega_{t+s}^{t+\lambda}(C)f(t+s)\,ds + \int\limits_0^{\lambda} \Omega_{t+s}^{t+\lambda}(C)B(t+s)z(t+s)\,ds. \tag{30}$$

Определим оператор S_1 на пространстве $C(M)$ функций $z = z(t)$, заданных и непрерывных на $\mathbb{R}$ и таких, что

$$\|z\|_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|z(t)\| \le M.$$

Очевидно, что $S_1 z(t)$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией. Более того, для S_1 верны оценки

$$\|S_1 z\|_0 \le \lambda e^{\lambda(\alpha+\beta m)}(1+\beta M),$$

$$\|S_1 z_1 - S_1 z\| \le \lambda\beta e^{\lambda(\alpha+\beta m)}\|z_1 - z\|_0,$$

где z и z_1 — произвольные функции из $C(m_1)$.

Вследствие (27) при

$$M \geq \frac{\lambda e^{\lambda(\alpha+\beta m)}}{1-\lambda\beta e^{\lambda(\alpha+\beta m)}}$$

оператор S_1 отображает $C(M)$ в себя и является сжимающим. Пространство $C(M)$ относительно нормы $\|\cdot\|_0$ является полным нормированным пространством. Этого достаточно, чтобы оператор S_1 имел в $C(M)$ единственную неподвижную точку. Она и является единственным в $C(M)$ решением уравнения (30).

3. Доказательство теоремы 2. Из уравнений (22), (30) следует, что их решения имеют гладкость на единицу выше, чем гладкость функций A, B, f. Поэтому функции C и g, определяемые согласно формулам (23), (30), имеют гладкость функций A, B, f.

Докажем следующее утверждение.

Лемма. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и найдется последовательность* $\tau_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} [\|A_n - A\|_0 + \|B_n - B\|_0 + \|f_n - f\|_0] = 0, \tag{31}$$

где $A_n = A(t+\tau_n)$, $B_n = B(t+\tau_n)$, $f_n = f(t+\tau_n)$.

Тогда решения C *и* g *уравнений* (3) *и* (4) *удовлетворяют условию*

$$\lim_{n\to\infty} [\|C_n - C\|_0 + \|g_n - g\|_0] = 0, \tag{32}$$

где $C_n = C(t+\tau_n)$, $g_n = g(t+\tau_n)$.

Для *доказательства* леммы достаточно установить соотношения вида (32) для решений уравнений (22) и (30). Введем для ряда (5) обозначение

$$\Omega_\tau^t(C) = \Omega_\tau^t(C(s))$$

и рассмотрим разность $Z_n - Z = Z(t+\tau_n) - Z(t)$:

$$Z_n - Z = \Omega_{t+\tau_n}^{t+\tau_n+\lambda}(A(s) + B(s)Z(s)) - \Omega_t^{t+\lambda}(A(s) + B(s)Z(s)).$$

Из (5) следует

$$\begin{aligned} Z_n - Z = {} & \Omega_0^\lambda(A(t+s+\tau_n) + B(t+s+\tau_n)Z(t+s+\tau_n)) - \\ & - \Omega_0^\lambda(A(t+s) + B(t+s)Z(t+s)) = [\Omega_0^\lambda(A(t+s+\tau_n) + \\ & + B(t+s+\tau_n)Z(t+s+\tau_n)) - \Omega_0^\lambda(A(t+s) + B(t+s+\tau_n)Z(t+s+\tau_n))] + \\ & + [\Omega_0^\lambda(A(t+s) + B(t+s+\tau_n)Z(t+s+\tau_n)) - \Omega_0^\lambda(A(t+s) + \\ & + B(t+s)Z(t+s+\tau_n))] + [\Omega_0^\lambda(A(t+s) + B(t+s)Z(t+s+\tau_n)) - \\ & - \Omega_0^\lambda(A(t+s) + B(t+s)Z(t+s))]. \end{aligned} \tag{33}$$

Но для пары измеримых на $\mathbb{R}$ матриц $P(t)$ и $Q(t)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\| P \|_0 \le M, \quad \| Q \|_0 \le M,$$

согласно (26) справедлива оценка

$$\left\| \Omega_0^\lambda(P(t+s)) - \Omega_0^\lambda(Q(t+s)) \right\| \le \lambda \left(1 + M\lambda + \frac{M^2\lambda^2}{2!} + \ldots \right) \| P - Q \|_0 =$$

$$= \lambda e^{M\lambda} \| P - Q \|_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

С учетом этой оценки из (33) следует

$$\| Z_n - Z \|_0 \le \lambda e^{\lambda(\alpha+\beta m)} [\| A_n - A \|_0 + m \| B_n - B \|_0] +$$

$$+ \lambda \beta e^{\lambda(\alpha+\beta m)} \| Z_n - Z \|_0.$$

В силу неравенства (27) имеем

$$\| Z_n - Z \|_0 \le \frac{\lambda e^{\lambda(\alpha+\beta m)}}{1 - \lambda\beta e^{\lambda(\alpha+\beta m)}} [\| A_n - A \|_0 + m \| B_n - B \|_0],$$

или

$$\lim_{n\to\infty} \| Z_n - Z \|_0 = 0. \tag{34}$$

Равенство (34) доказывает, что

$$\lim_{n\to\infty} \| C_n - C \|_0 = 0. \tag{35}$$

Рассмотрим разность $z_n - z = z(t+\tau_n) - z(t)$ для решения уравнения (30). Из предположений леммы следует

$$\| z_n - z \| \le \int_0^\lambda \left\| \Omega_{t+\tau_n+s}^{t+\tau_n+\lambda}(C) - \Omega_{t+s}^{t+\lambda}(C) \right\| ds +$$

$$+ \lambda e^{\lambda(\alpha+\beta m)} \| f_n - f \|_0 + \int_0^\lambda \left\| \Omega_{t+\tau_n+s}^{t+\tau_n+\lambda}(C) B(t+\tau_n+s) -\right.$$

$$\left. - \Omega_{t+s}^{t+\lambda}(C) B(t+s) \right\| ds M + \int_0^\lambda \left\| \Omega_{t+s}^{t+\lambda}(C) B(t+s) \right\| ds,$$

$$\| z_n - z \|_0 \le \int_0^\lambda \left\| \Omega_\tau^\lambda(C(t+\tau_n+s)) - \Omega_\tau^\lambda(C(t+s)) \right\| d\tau +$$

$$+ \lambda e^{\lambda(\alpha+\beta m)} \| f_n - f \|_0 + M \left[\int_0^\lambda \left\| \Omega_\tau^\lambda(C(t+\tau_n+s)) B(t+\tau_n+\tau) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \Omega_\tau^\lambda(C(t+s)) B(t+\tau) \right\| d\tau \right] + \lambda\beta e^{\lambda(\alpha+\beta m)} \| z_n - z \|_0 \le$$

$$\le \lambda e^{\lambda(\alpha+\beta m)} (\| C_n - C \|_0 + \| f_n - f \|_0) +$$

$$+ M(\lambda\beta e^{\lambda(\alpha+\beta m)}\| C_n - C\|_0 + \lambda e^{\lambda(\alpha+\beta m)}\| B_n - B\|_0) +$$
$$+ \lambda\beta e^{\lambda(\alpha+\beta m)}\| z_n - z\|_0. \tag{36}$$

Из (36) с учетом неравенства (28) и соотношений (31), (35) получаем равенство

$$\lim_{n\to\infty} \| z_n - z\|_0 = 0,$$

которое доказывает, что

$$\lim_{n\to\infty} \| g_n - g\|_0 = 0.$$

Из доказанной леммы и определения почти периодической функции следует справедливость теоремы 2 для почти периодических функций A, B, f, причем с тем дополнением, что частотные базисы функций A, B, f и решений C, g совпадают. Этого достаточно для справедливости теоремы 2 и в случае, когда A, B, f являются периодическими или квазипериодическими функциями.

4. Общие замечания. Прежде всего отметим, что результаты работы очевидным образом переносятся на случай, когда вместо неравенств (6) выполняются неравенства

$$\int_t^{t+\lambda} \|A(s)\| ds \le \alpha, \qquad \int_t^{t+\lambda} \|B(s)\| ds \le \beta, \qquad \int_t^{t+\lambda} \|f(s)\| ds \le 1, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, при выполнении условий теоремы 1 решения C и g уравнений (3) и (4) являются непрерывными функциями параметра λ в интервале, определяемом условием (7), причем непрерывными по λ равномерно относительно $t \in \in \mathbb{R}$.

Наконец, если A, B, f зависят от параметра μ равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$ и выполняются условия теоремы 1 для значений μ из некоторого интервала (μ_0, μ_1), то решения C и g уравнений (3) и (4) также являются непрерывными функциями параметра μ из этого интервала, причем непрерывными по μ равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$.

Доказательства всех этих утверждений проводятся аналогично доказательству теоремы 2.

Обсудим теперь вопрос неединственности решений уравнения (3). Из (22) видно, что (3) может иметь неединственное решение лишь при $Z \in C(m_0)$, где

$$1 \le \lambda\beta e^{\lambda(\alpha+\beta m_0)}.$$

Пример уравнения (17) показывает, что неединственность в общем случае обеспечивается расширением области поиска решений (3) до пространства комплекснозначных матриц: действительно, лишь в таком пространстве матриц уравнение (17) имеет счетное число решений (последнее очевидно при $n = 1$, так как тогда (17) является характеристическим уравнением соответствующего уравнения (1), а несложные рассуждения подтверждают правильность изложенного выше и в общем случае, когда $n \ge 2$).

То же самое подтверждает и пример уравнения (15), когда a и b являются периодическими функциями периода $T = \lambda$. Уравнение (22) принимает в этом случае вид

$$z(t) = e^{\int_t^{t+\tau} a(s)ds} + \int_t^{t+\tau} b(s)z(s)ds$$

и имеет постоянные решения

$$z(t) = z,$$

определяемые алгебраическим уравнением

$$z = e^{(a+bz)T}, \tag{37}$$

в котором

$$a = \frac{1}{T}\int_0^T a(s)\,ds, \quad b = \frac{1}{T}\int_0^T b(s)\,ds.$$

Уравнение (37), как известно, имеет при $b \neq 0$ счетное число решений в комплексной плоскости.

1. *Рябов Ю. А.* Применение метода малого параметра Ляпунова – Пуанкаре в теории систем с запаздыванием // Инж. журн. – 1961. – **1**, вып. 2. – С. 3 – 15.
2. *Driver R.* On Ryabov's asymptotic characterization of the solutions of quasi-linear differential equations with small delays // SIAM Rev. – 1968. – **10**, № 3. – P. 329 – 341.
3. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 349 с.
4. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
5. *Winston E.* The global existence of solutions of delay differential equations // J. Different. Equat. – 1971. – **10**. – P. 392 – 402.
6. *Li Y., Li Y. Q.* Basic theory, exponential estimates and global existence: uniqueness of solutions for a class of singular linear functional-differential equations with delay // Kyungpook Math. J. – 1997. – **37**, № 1. – P. 27 – 36.
7. *Ntouyas S. K., Tsamatos P. Ch.* Global existence for semilinear evolution inteqrodifferential equations with delay and nonlocal conditions // App. Anal. – 1997. – **64**, № 1, 2. – P. 99 – 105.
8. *Ladde G. S., Pachpatte B. G.* Existence theorems for class of functional-differential systems // J. Math. Anal. and Appl. – 1982. – **90**, № 2. – P. 381 – 392.
9. *Фодчук В. И.* Интегральные многообразия для нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Укр. мат. журн. – 1969. – **21**, № 5. – С. 627 – 639.
10. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. – Киев: Выща шк., 1979. – 246 с.
11. *Mitropolsky Yu. A., Samoilenko A. M., Martinyuk D. I.* Systems of evolution equations with periodic and quasiperiodic coefficients. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 280 p.
12. *Черевко І. М.* Про асимптотику інтегральних многовидів сингулярно збурених систем із запізненням // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 8. – С. 1105 – 1111.
13. *Клевчук І. І.* Гомоклінічні точки для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням // Там же. – 2002. – **54**, № 4. – С. 563 – 567.

Получено 20.03.2003