УДК 519.21

Д. В. Гусак (Ін-т математики НАН України, Київ)

РОЗПОДІЛ ПЕРЕСТРИБКОВИХ ФУНКЦІОНАЛІВ НАПІВНЕПЕРЕРВНОГО ОДНОРІДНОГО ПРОЦЕСУ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ПРИРОСТАМИ

We establish relations for distributions of functionals associated with an overjumping of the process $\xi(t)$ with continuously distributed jumps of arbitrary sign over the fixed level $x > 0$ (including the zero level $x = 0$ and the infinitely distanced level $x \to \infty$). We make more precise these relations for the case where the distributions of maximum and minimum of $\xi(t)$ can possess the atom at zero. The distributions of absolute extrema of semicontinuous processes are defined in terms of these atomic probabilities and cumulants of the corresponding monotone processes.

Встановлюються співвідношення для розподілу функціоналів, пов'язаних з перестрибком процесу $\xi(t)$ з неперервно розподіленими стрибками довільного знака через фіксований рівень $x > 0$ (в тому числі нульовий $x = 0$ і нескінченно віддалений $x \to \infty$ рівень) і уточнюються на випадок, коли розподіли максимуму та мінімуму $\xi(t)$ можуть мати атом у нулі. Розподіли абсолютних екстремумів напівнеперервних процесів визначаються в термінах цих атомарних імовірностей та кумулянт відповідних монотонних процесів.

Одні з перших результатів розподілу моменту та величини перестрибу пуассонівського процесу одержані в [1, 2]. У [3] доведено, що вказані функціонали неперервні в топології Скорохода і встановлено твердження про збіжність розподілу цих функціоналів від апроксимуючої послідовності пуассонівських процесів до розподілу таких функціоналів від довільного апроксимованого процесу. Пізніше в [4] розглядалися такі функціонали, пов'язані з перестрибком через додатний рівень, як перестрибок та недострибок і стрибок, що накриває рівень $x > 0$. Там одержано розподіли всіх цих функціоналів для неперервних знизу процесів у термінах інтегральних перетворень спектральної міри стрибків. У [5, 6] продовжено вивчення розподілу моменту та величини перестрибка, а в [7, 8] застосовано метод потенціалу до знаходження розподілу цих двох функціоналів.

У роботі [9] вивчався розподіл повного набору перестрибкових функціоналів (момент першого перестрибка, величина першого перестрибка та недострибка і величина стрибка, що накриває фіксований рівень $x > 0$) для складних пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова. Одержано матричні співвідношення для розподілу цих функціоналів (для $x > 0$) та граничні розподіли при $x = 0$ та $x \to \infty$. У скалярному випадку для звичайних неперервних знизу пуассонівських процесів в [10 – 13] уточнено граничні розподіли при $x \to 0$ та $x \to \infty$ з використанням при $m_1 < 0$ асимптотики розподілу абсолютного максимуму для $x \to \infty$ і найповніше викладено в першому розділі [11]. У вказаних роботах детально не розглядався випадок, коли обидва екстремуми процесу мають атом у нулі.

У випадку напівнеперервності процесів з незалежними приростами на основі факторизаційного методу [4, 9 – 13] та методу потенціалу [7, 8] встановлено порівняно прозорі співвідношення для розподілу функціоналів, пов'язаних з перестрибком через додатний фіксований рівень. Ці процеси мають стрибки одного знака, можуть містити невироджену дифузійну компоненту з $\sigma^2 > 0$. Зокрема, якщо процес $\xi(t)$ неперервний знизу, то його характеристична функція (х.ф.)

$$\varphi_t(\alpha) = Ee^{i\alpha\xi(t)} = e^{t\psi_1(\alpha)}, \quad t \ge 0,$$

визначається кумулянтою

$$\psi_1(\alpha) = i\alpha a' - \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 + \int_0^\infty \left[e^{i\alpha x} - 1 - i\alpha(x \wedge 1)\right]\Pi(dx), \tag{1}$$

$$\int_0^1 x^2\Pi(dx) < \infty; \quad a = a' - \int_0^1 x\Pi(dx) < 0 \quad \text{при} \quad \sigma = 0.$$

Розглянемо детальніше випадок, коли екстремуми процесу мають атоми в нулі. Зокрема, це можливо, якщо $\xi(t)$ має кумулянту

$$\psi_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\alpha x}-1\right)\Pi(dx), \qquad \int_{-\infty}^{\infty}|x|^k\,\Pi(dx) < \infty, \qquad k = 1, 2. \tag{2}$$

Інколи на $\psi_2(\alpha)$ накладатимемо умову $\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(dx) < \infty$. Якщо умова (2) виконується і при $k = 0$ для всіх x, то

$$\psi_2(\alpha) = \lambda(\varphi(\alpha)-1), \qquad \lambda = \int_{-\infty}^{\infty}\Pi(dx) < \infty, \qquad \varphi(\alpha) = Ee^{i\alpha\xi_k}, \tag{3}$$

$\varphi(\alpha)$ — характеристична функція стрибків процесу.

Позначимо через θ_s показниково розподілену випадкову величину з параметром $s > 0$; тоді для $\psi_t(\alpha) = \exp\{t\psi(\alpha)\}$ інтегральне перетворення Лапласа – Карсона запишеться у вигляді

$$\varphi(s,\alpha) = Ee^{i\alpha\xi(\theta_s)} = s\int_0^{\infty} e^{-st}\varphi_t(\alpha)\,dt = \frac{s}{s-\psi(\alpha)}.$$

Введемо позначення основних функціоналів процесу $\xi(t)$:

$$\xi^{\pm}(t) = \sup_{0\le u\le t}(\inf)\,\xi(u), \qquad \xi^{\pm} = \sup_{0<u<\infty}(\inf)\,\xi(u),$$

$$\tau^{+}(x) = \inf\{t>0: \xi(t) > x\}, \qquad x > 0.$$

Неважко показати, що

$$P\{\xi^{+}(t) > x\} = P\{\tau^{+}(x) < t\}.$$

Для х.ф. $\xi(\theta_s)$ має місце основна факторизаційна тотожність (див. [10], гл. 2, §3)

$$\varphi(s,\alpha) = \varphi_{+}(s,\alpha)\,\varphi_{-}(s,\alpha), \qquad \operatorname{Im}\alpha = 0, \tag{4}$$

$$\ln\varphi_{\pm}(s,\alpha) = \pm\int_0^{\pm\infty}(e^{i\alpha x}-1)\,dN_s^{\pm}(x),$$

$$N_s^{\pm}(\pm x) = \mp\int_0^{\infty} t^{-1}e^{-st}P\{\pm\xi(t) > x\}\,dt, \quad \pm x > 0,$$

$$\varphi_{\pm}(s,\alpha) = Ee^{i\alpha\xi^{\pm}(\theta_s)} = s\int_0^{\infty} e^{-st}Ee^{i\alpha\xi^{\pm}(\theta_s)}dt.$$

Розглянемо функціонали, пов'язані з перетином додатного рівня $x > 0$:

$$\gamma^{+}(x) = \xi(\tau^{+}(x)) - x,$$

$$\gamma_{+}(x) = x - \xi(\tau^{+}(x)-0),$$

$$\gamma_x^{+}(x) = \xi(\tau^{+}(x)) - \xi(\tau^{+}(x)-0);$$

перший з них називається перестрибком, другий — недострибком, третій — стрибком, що накриває рівень $x > 0$.

Для розподілів пар $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$, $\{\tau^+(x), \gamma_+(x)\}$ та $\{\tau^+(x), \gamma_x^+\}$ розглянемо генератриси

$$V_1(s, x, u) = E[e^{-s\tau^+(x)-u\gamma^+(x)}, \tau^+(x) < \infty],$$

$$V_2(s, x, \upsilon) = E[e^{-s\tau^+(x)-\upsilon\gamma_+(x)}, \tau^+(x) < \infty],$$

$$V_3(s, x, \mu) = E[e^{-s\tau^+(x)-\mu\gamma_x^+}, \tau^+(x) < \infty].$$

Із співвідношення зв'язку між розподілами $\xi^+(t)$, $\tau^+(x)$ після позначення $\gamma_1(x) = \gamma^+(x)$, $\gamma_2(x) = \gamma_+(x)$, $\gamma_3(x) = \gamma_x^+$, $u = u_1$, $\upsilon = u_2$, $\mu = u_3$ випливає

$$E[e^{-s\tau^+(x)}, \tau^+(x) < \infty] = P\{\xi^+(\theta_s) > x\},$$

$$V_k(s, x, u_k) = E[e^{-u_k\gamma_k(x)}, \xi^+(\theta_s) > x], \quad k = \overline{1,3}.$$

Позначимо спільну генератрису для всіх перестрибкових функціоналів

$$V(s, x; u, \upsilon, \mu) = E[e^{-u\gamma_1(x)-\upsilon\gamma_2(x)-\mu\gamma_3(x)-s\tau^+(x)}, \tau^+(x) < \infty], \quad x > 0;$$

$$\Pi_+(x) = \int_x^\infty \Pi(dy), \quad d\Pi_+(x) = -\Pi(dx), \quad x > 0;$$

$$\Pi_-(x) = \int_{-\infty}^x \Pi(dy), \quad d\Pi_-(x) = \Pi(dx), \quad x < 0.$$

Якщо $\xi(t)$ має стрибки одного знака, то знаковий індекс для $\Pi_\pm(x)$ можна пропускати.

Нехай $\xi(t)$ — процес з кумулянтою (3) і стрибками довільного знака. На основі стохастичних співвідношень, які мають місце для перестрибкових функціоналів, виводиться інтегральне рівняння для

$$V_+(s,x) = V(s, x; u, \upsilon, \mu)\delta(x \geq 0),$$

$$V_+(s,x) - \frac{1}{s+\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} V_+(s, x-y)\Pi(dy) = \frac{1}{s+\lambda}A(x, u, \upsilon, \mu), \tag{5}$$

$$A(x, u, \upsilon, \mu) = \int_x^\infty e^{(u-\upsilon)x-(u+\mu)z}\Pi(dz).$$

У рівняннях для пар $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$ $\left(\gamma_1(x) = \gamma^+(x),\ \gamma_2(x) = \gamma_+(x),\ \gamma_3(x) = \gamma_x^+\right)$ праві частини позначимо

$$A_1(x, u) = A(x, u; 0, 0), \quad A_2(x, \upsilon) = A(x, 0; \upsilon, 0), \quad A_3(x, \mu) = A(x, 0; 0, \mu).$$

Аналогічно для центрованої функції

$$\overline{A}(x, u, \upsilon, \mu) = A(x, u, \upsilon, \mu) - A(x, 0, 0, 0)$$

позначимо $(k = \overline{1,3})$

$$\overline{A}_k(x, u_k) = A_k(x, u_k) - A(x, 0), \quad u_1 = u, \quad u_2 = \upsilon, \quad u_3 = \mu.$$

Інтегральні перетворення відповідно позначимо

$$a(\alpha, u, \upsilon, \mu) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}A(x, u, \upsilon, \mu)\,dx$$

та

$$\bar{a}(\alpha, u, v, \mu), \quad a_k(\alpha, u_k), \quad \bar{a}_k(x, u_k).$$

У [14] досліджено інтегральні рівняння типу згортки на півосі, коли інтегральне перетворення ядра рівняння задовольняє умову канонічної факторизації. Дещо модифікований підхід до розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь для розподілу граничних функціоналів розвинуто в роботах [9–13] з використанням безмежно подільної факторизації (4). Символом інтегро-диференціального оператора в рівняннях для розподілу функціоналів є функція $g(s,\alpha) = s - \psi(\alpha)$, обернена величина якої визначає х.ф. $\xi(\theta_s)$.

Для функцій з класу $\mathcal{L}_1(-\infty, \infty)$

$$G(x): \int_{-\infty}^{\infty} |G(x)| dx < \infty$$

розглянемо клас інтегральних перетворень

$$\bar{G}: \left\{ g(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} G(x) dx \right\}$$

і розширений клас $\bar{G}_c: \{c + g(\alpha)\}$, в якому вводяться операції проектування

$$[g_c(\alpha)]_+^0 = c + \int_0^{\infty} e^{i\alpha x} G(x) dx, \quad [g_c(\alpha)]_+ = \int_0^{\infty} e^{i\alpha x} G(x) dx.$$

Для розподілів $\xi^{\pm}(\theta_s)$ будемо користуватися позначеннями

$$P_{\pm}(s,x) = P\{\xi^{\pm}(\theta_s) < x\}, \quad \pm x \geq 0; \quad \overline{P}_+(s,x) = 1 - P_+(s,x), \quad x > 0,$$

$$p_{\pm}(s) = P\{\xi^{\pm}(\theta_s) = 0\}, \quad \varphi_{\pm}(s,\alpha) = Ee^{i\alpha\xi^{\pm}(\theta_s)}.$$

При $x \neq 0$ для $\xi(\theta_s)$ маємо

$$\frac{\partial}{\partial x} P(s,x) = P'(s,x), \quad P'_{\pm}(s,x) = \frac{\partial}{\partial x} P_{\pm}(s,x), \quad \pm x > 0.$$

Розглянемо процес $\xi(t)$, що має стрибки довільного знака, та кумулянту

$$\psi(\alpha) = i\alpha\gamma - \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{i\alpha x} - 1 - i\alpha\delta(|x| \leq 1) \right] \Pi(dx), \tag{6}$$

$$\int_{|x|\leq 1} x^2 \Pi(dx) < 1,$$

або при $\int_{|x|\leq 1} |x| \Pi(dx) < 1$

$$\psi(\alpha) = i\alpha a - \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{i\alpha x} - 1 \right] \Pi(dx). \tag{7}$$

На підставі рівняння (5), що виводиться для розподілу функціоналів апроксимуючої послідовності процесів $\xi_n(t)$, встановлюється наступне твердження (див. [9–13], зокрема [10, с. 143], теорему 3.6).

Теорема 1. *Якщо* $\xi(t)$ *— процес з кумулянтою* (6), *задовольняє умови*

$$|m_1| < \infty, \quad m_2 < \infty, \quad m_k = E\xi(1)^k, \quad E\xi^+(\theta_s) = \int_0^{\infty} \overline{P}_+(s,x) dx < \infty,$$

то інтегральне перетворення

$$\upsilon_+(s,\alpha) = \upsilon_+(s,\alpha,u,\upsilon,\mu) = \int_0^\infty V_+(s,x,u,\upsilon,\mu)e^{i\alpha x}dx$$

визначається співвідношенням

$$s\upsilon_+(s,\alpha) = s\int_0^\infty e^{i\alpha x}\overline{P}_+(s,x)dx + \varphi_+(s,\alpha)[\varphi_-(s,\alpha)\overline{a}(\alpha,u,\upsilon,\mu)]_+^0. \tag{8}$$

Якщо $\xi(t)$ *має кумулянту* (7), *то*

$$s\upsilon_+(s,\alpha) = \varphi_+(s,\alpha)\left\{\frac{\sigma^2}{2}P_-'(s,0) + [a]^+\delta(\sigma=0)p_-(s) + [\varphi_-(s,\alpha)a(\alpha,u,\upsilon,\mu)]_+^0\right\},$$
$$p_-(s) = P\{\xi^-(\theta_s)=0\}, \quad [a]^+ = a\vee 0. \tag{9}$$

Щоб одержати співвідношення для вивчення спільного розподілу $\{\tau^+(x), \gamma^+(x), \gamma_x^+\}$, згідно з теоремою 1 необхідно обчислити функції-згортки

$$G(s,x,u,\upsilon,\mu) = \int_{-\infty}^0 A(x-y,u,\upsilon,\mu)dP_-(s,y), \quad x>0,$$

$$\overline{G}(s,x,u,\upsilon,\mu) = \int_{-\infty}^0 \overline{A}(x-y,u,\upsilon,\mu)dP_-(s,y), \quad x>0,$$

які відповідають проекційним дужкам $[\,]_+^0$ у (8) та (9), а потім ці функції згорнути з розподілом $P_+(s,x)$.

Для неперервних знизу процесів з кумулянтою (1) $\xi^-(\theta_s)$ має показниковий розподіл і х.ф. для $\xi^\pm(\theta_s)$ визначаються таким чином:

$$\begin{cases}\varphi_-(s,\alpha) = \dfrac{\rho(s)}{\rho(s)+i\alpha}, \quad \psi_1(-i\rho)=s, \quad s\ge 0;\\ \varphi_+(s,\alpha) = [\varphi(s,\alpha)]_+ + \rho^{-1}(s)[i\alpha\varphi(s,\alpha)]_+.\end{cases} \tag{10}$$

У цьому випадку уточнення розподілів перестрибкових функціоналів проводилося в [4, 9–13], причому в [7, 8] використовувався метод потенціалу з $p_-(s)=0$.

Якщо $\sigma=0$, $a<0$, то для процесу з кумулянтою (7) і $\Pi_-(x)\equiv 0$, $x<0$, при $m_1<0$ існує границя для $\varphi_+(s,\alpha)$ при $s\to 0$. Якщо врахувати, що

$$\bar{\varphi}(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}\Pi(x)dx\left[\int_0^\infty \Pi(x)dx\right]^{-1}, \quad \bar{\psi}_+(\alpha) = q_+(\bar{\varphi}(\alpha)-1),$$

то

$$\varphi_+(\alpha) = \lim_{s\to 0}\varphi_+(s,\alpha) = Ee^{i\alpha\xi^+} = \frac{p_+}{1-q_+\bar{\varphi}(\alpha)}, \quad p_+ = P\{\xi^+=0\}, \quad q_+ = 1-p_+,$$

і замість попередньої формули Полячека – Хінчіна для $\varphi_+(\alpha)$ маємо

$$\varphi_+(\alpha) = \frac{p_+}{p_+-\bar{\psi}_+(\alpha)} = p_+\int_0^\infty e^{-p_+t}Ee^{i\alpha\bar{\xi}(t)}dt = E\exp\left\{i\alpha\bar{\xi}(\theta_{p_+})\right\}, \tag{11}$$

де $\bar{\xi}(t)$ — процес з кумулянтою $\bar{\psi}_+(\alpha)$, $P\{\theta_{p_+}>t\} = \exp\{-tp_+\}$, $t>0$.

Якщо $\sigma^2 > 0$, то замість (11) справедлива формула

$$\varphi_+(\alpha) = (1-\psi_*(\alpha))^{-1} = Ee^{i\alpha\xi_*(\theta_1)} = \int_0^\infty e^{-t} Ee^{i\alpha\xi_*(t)}\,dt,$$

де $\xi_*(t)$ має кумулянту $\psi_*(\alpha) = |m_1|^{-1}\left(i\alpha\sigma^2/2 + \int_0^\infty (e^{i\alpha x}-1)\Pi(x)\,dx\right)$, при $\sigma = 0$ $\psi_*(\alpha) = p_+^{-1}\bar{\psi}_+(\alpha)$.

Випадок $p_-(s) > 0$ виникає для процесів з кумулянтою (2) або (3), зокрема тоді, коли від'ємна частина стрибків показниково розподілена: $\Pi_-(x) = ke^{cx}$, $x < 0$. При цьому $\xi^-(\theta_s)$ має атом у нулі, а його х.ф. має вигляд

$$\varphi_-(s,\alpha) = \frac{p_-(s)\,(c+i\alpha)}{icp_-(s)+i\alpha}, \qquad \psi_2(-icp_-(s)) = s, \quad c > 0. \tag{12}$$

Сформулюємо наслідок, що має місце не лише для неперервних знизу процесів.

Наслідок 1. *За умов теореми* 1 *генератриса спільного розподілу* $\{\tau^+(x);\ \gamma_1(x);\ \gamma_2(x);\ \gamma_3(x)\}$ *для процесів з кумулянтою* (7) *при* $x > 0$ *визначається таким чином*:

$$V(s,x;u,v,\mu) = C_*(s)P_+'(s,x) + s^{-1}\int_{-0}^{x} G(s,x-y;u,v,\mu)\,dP_+(s,y), \tag{13}$$

$$C_*(s) = \begin{cases} s^{-1}\dfrac{\sigma^2}{2}P_-'(s,0), & \sigma > 0; \\ s^{-1}p_-(s)[a]^+; & \sigma = 0, \quad [a]^+ = \max(0,a). \end{cases}$$

Розподіл $\xi^+(\theta_s)$ *визначається співвідношенням, що випливає з* (13),

$$\varphi_+(s,\alpha) = \left[1 - i\alpha\left(C_*(s) + s^{-1}K(s,\alpha)\right)\right]^{-1}, \tag{14}$$

$$E\xi^+(\theta_s) = C_*(s) + s^{-1}K(s,0), \qquad K(s,0) = \int_0^\infty \Pi(y)P\{\xi^-(\theta_s) \ge -y\}\,dy,$$

$$K(s,\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}\mathcal{K}(s,x)\,dx, \qquad \mathcal{K}(s,x) = \int_{-\infty}^{0}\Pi(x-y)\,dP_-(s,y).$$

Для процесів з кумулянтою (6) *має місце співвідношення*

$$sV(s,x;u,v,\mu) = s\overline{P}_+(s,x) + \int_{-0}^{x}\overline{G}(s,x-y;u,v,\mu)\,dP_+(s,y). \tag{15}$$

Розподіли пар $\{\tau^+(x),\ \gamma_k(x)\}$ *визначаються з* (15) *співвідношеннями*

$$\int_0^\infty e^{-u_k z}P\{\xi^+(\theta_s) > x,\ \gamma_k(x) > z\}\,dz = -\frac{1}{su_k}\int_{-0}^{x}\overline{G}_k(s,x-y,u_k)\,dP_+(s,y), \tag{16}$$

$$\overline{G}_k(x,u_k) = \int_{-\infty}^{0}\overline{A}_k(x-y,u_k)\,dP_-(s,y), \quad k = \overline{1,3}.$$

Доведення базується на оберненні відносно α співвідношення (9), в результаті якого знаходимо генератрису (13). Після підстановки $v = \mu = 0$ в (9) та (13) і відповідних нескладних перетворень одержуємо (14). У всіх співвідношеннях наслідку 1 ніяких припущень про напівнеперервність не використовується.

Деталізувати результати наслідку 1 для напівнеперервних процесів з кумулянтою (1) і суттєво спростити їх можна після підстановки показникового розподілу мінімуму (див. (10))

$$P_-(s,x) = P\{\xi^-(\theta_s) < x\} = e^{\rho(s)x}, \quad x < 0.$$

Для цього випадку згортки $P_-(s,x)$ з нецентрованими $A_k(x,u_k)$ з $\rho = \rho(s) > 0$, $s > 0$, мають вигляд

$$\begin{cases} G_1(s,x,u) = \dfrac{\rho}{\rho-u}\displaystyle\int_0^\infty (\rho e^{-\rho y} - u e^{-yu})\Pi(x+y)\,dy, \\ G_2(s,x,v) = \rho\displaystyle\int_x^\infty e^{-\rho x-(\rho+v)y}\,\Pi(y)\,dy, \\ G_3(s,x,\mu) = \displaystyle\int_0^\infty \left[(\mu+\rho)e^{-\rho y} - \mu\right]e^{-\mu(x+y)}\,\Pi(x+y)\,dy, \end{cases} \tag{17}$$

і відповідно з центрованими $\overline{A}_k(x,u_k)$:

$$\begin{cases} \overline{G}_1(s,x,u) = \dfrac{u\rho}{\rho-u}\left[\displaystyle\int_0^\infty u e^{-uy}\,\Pi(x+y)\,dy - \int_0^\infty e^{-\rho y}\,\Pi(x+y)\,dy\right], \\ \overline{G}_2(s,x,v) = \rho\displaystyle\int_x^\infty e^{\rho(x-y)}(e^{-vy}-1)\Pi(y)\,dy, \\ \overline{G}_3(s,x,\mu) = \rho\displaystyle\int_x^\infty e^{\rho(x-y)}(e^{-\mu y}-1)\Pi(y)\,dy + \dfrac{\mu}{\rho}\int_x^\infty e^{-\mu y}(e^{\rho(x-y)}-1)\Pi(y)\,dy. \end{cases} \tag{18}$$

На основі співвідношень (16) та (18) визначається розподіл перестрибкових функціоналів через нульовий рівень $x = 0$.

Наслідок 2. *Для неперервного знизу процесу з кумулянтою* (7) *при* $a < 0$, $\sigma = 0$ *та* $\Pi_-(x) = 0$ *для* $x < 0$ *справедливі співвідношення*

$$\begin{cases} P\{\xi^+(\theta_s) > 0,\ \gamma^+(0) > z\} = \dfrac{1}{|a|}\displaystyle\int_z^\infty e^{(z-y)\rho(s)}\Pi(y)\,dy, \\ P\{\xi^+(\theta_s) > 0,\ \gamma_+(0) > z\} = \dfrac{1}{|a|}\displaystyle\int_z^\infty e^{-y\rho(s)}\Pi(y)\,dy, \\ P\{\xi^+(\theta_s) > 0,\ \gamma_0^+ > z\} = \dfrac{1}{|a|\rho(s)}\displaystyle\int_z^\infty (1-e^{-\rho(s)y})\Pi(dy), \end{cases} \tag{19}$$

$$q_+(s) = \frac{1}{|a|}\tilde{\Pi}(\rho(s)), \qquad \tilde{\Pi}(\rho) = \int_0^\infty e^{-\rho y}\,\Pi(y)\,dy, \quad p_+(s)\rho(s)|a| = s.$$

Доведення. Інтегральне перетворення для $P\{\xi^+(\theta_s) > 0;\ \gamma_k(0) > z\}$ згідно з (13) при $x \to 0$ визначається стрибком

$$p_+(s) = P\{\xi^+(\theta_s) = 0\} = s(|a|\rho(s))^{-1}$$

і значенням $\overline{G}_k(s,0,u_k)$. Враховуючи, що $p_+(s)\rho(s) = s/|a|$, воно легко обертається відносно u_k і після обернення одержуємо (19).

Для того щоб знайти розподіли перестрибкових характеристик при $x \to \infty$, до (13) або (15) можна застосувати інтегральне перетворення відносно x, породжене показниково розподіленою випадковою величиною θ'_ν $(\nu > 0)$, незалежною від θ_s і процесу $\xi(t)$. Позначимо їх

$$\tilde{V}(s,\nu;u_1,u_2,u_3) = \nu\int_0^\infty e^{-\nu x} V(s,x;u_1,u_2,u_3)\,dx =$$

$$= E\Big[e^{-s\tau^+(\theta'_\nu)-u_1\gamma_1(\theta'_\nu)-u_2\gamma_2(\theta'_\nu)-u_3\gamma_3(\theta'_\nu)},\ \tau^+(\theta'_\nu) < \infty\Big],$$

$$\tilde{V}_k(s,\nu;u_k) = E\Big[e^{-s\tau_+(\theta'_\nu)-u_k\gamma_k(\theta'_\nu)},\ \tau^+(\theta'_\nu < \infty)\Big].$$

Із уточнених співвідношень для $\tilde{V}(s,\nu;u_1,u_2,u_3)$ та $\tilde{V}_k(s,\nu;u_k)$, що виражаються через аналогічні перетворення $\tilde{G}_k(s,\nu,u_k)$, граничним переходом $\nu \to 0$ у випадку $m_1 \geq 0$ знаходяться розподіли $\{\tau^+(\infty), \gamma^+(\infty), \gamma_+(\infty), \gamma^+_\infty\}$. На основі (13) доводиться така лема.

Лема. *Інтегральне перетворення генератриси для* $\{\tau^+(x), \gamma^+(x), \gamma_+(x), \gamma^+_x\}$ *визначається співвідношенням*

$$sE\Big[e^{-s\tau^+(\theta'_\nu)-u\gamma^+(\theta'_\nu)-\upsilon\gamma_+(\theta'_\nu)-\mu\gamma^+_{\theta'_\nu}},\ \tau^+(\theta'_\nu)<\infty\Big] = \nu\rho(s)Ee^{-\nu\xi^+(\theta_s)}\bar{\upsilon}_s(\nu,u,\upsilon,\mu), \quad (20)$$

$$\bar{\upsilon}_s(\nu,u,\upsilon,\mu) = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{\rho+\upsilon-u}\Big[(\rho+\upsilon+\mu)\bar{J}_1 - (u+\mu)\bar{J}_2\Big],$$

$$\bar{J}_1 = \frac{1}{\rho-\nu}\Big(\bar{\Pi}(\upsilon+\mu+\nu)-\bar{\Pi}(\upsilon+\mu+\rho)\Big), \qquad \bar{J}_2 = \frac{1}{u-\upsilon-\nu}\Big(\bar{\Pi}(\upsilon+\mu+\nu)-\bar{\Pi}(u+\mu)\Big).$$

При $m_1 \geq 0$ $P\{\tau^+(x)<\infty\} = 1$, *тому з* (20) *випливає*

$$E\Big[e^{-s\tau^+(\theta'_\nu)-u\gamma^+(\theta'_\nu)-\upsilon\gamma_+(\theta'_\nu)-\mu\gamma^+_{\theta'_\nu}}\Big] = s^{-1}\nu\rho(s)Ee^{-\nu\xi^+(\theta_s)}\bar{\upsilon}_s(\nu,u,\upsilon,\mu).$$

При $m_1 < 0$ *з* (20) *визначається умовна генератриса*

$$E\Big[e^{-u\gamma^+(\theta'_\nu)-\upsilon\gamma_+(\theta'_\nu)-\mu\gamma^+_{\theta'_\nu}}\ /\ \xi^+(\theta_s)>\theta'_\nu\Big] = \frac{\nu\rho(s)Ee^{-\nu\xi^+(\theta_s)}}{sP\{\xi^+(\theta_s)>\theta'_\nu\}}\bar{\upsilon}_s(\nu,u,\upsilon,\mu). \quad (21)$$

Зокрема, з (20) *визначаються генератриси*

$$\left\{\begin{aligned}
&\tilde{V}_1(s,\nu;u) = E\Big[e^{-u\gamma_+(\theta'_\nu)},\ \xi^+(\theta_s)>\theta'_\nu\Big] = s^{-1}\nu\rho(s)Ee^{-\nu\xi^+(\theta_s)}\times\\
&\quad\times\left\{\frac{\sigma^2}{2}+\frac{1}{\rho-u}\left[\frac{u}{u-\nu}\Big(\bar{\Pi}(u)-\bar{\Pi}(\nu)\Big)+\frac{\rho}{\rho-\nu}\Big(\bar{\Pi}(\nu)-\bar{\Pi}(\rho)\Big)\right]\right\};\\
&\tilde{V}_2(s,\nu;\upsilon) = E\Big[e^{-\upsilon\gamma_+(\theta'_\nu)},\ \xi^+(\theta_s)>\theta'_\nu\Big] =\\
&\quad = s^{-1}\nu\rho(s)Ee^{-\nu\xi^+(\theta_s)}\left[\frac{\sigma^2}{2}+\frac{1}{\rho-\upsilon}\Big(\bar{\Pi}(\nu+\upsilon)-\bar{\Pi}(\rho+\upsilon)\Big)\right];\\
&\tilde{V}_3(s,\nu;\mu) = E\Big[e^{-u\gamma^+_{\theta'_\nu}},\ \xi^+(\theta_s)>\theta'_\nu\Big] = \nu s^{-1}Ee^{-\nu\xi^+(\theta_s)}\times\\
&\quad\times\left[\frac{\sigma^2}{2}\rho+\frac{\mu}{\nu}\Big(\bar{\Pi}(\mu+\nu)-\bar{\Pi}(\nu)\Big)+\frac{\rho+\mu}{\rho-\nu}\Big(\bar{\Pi}(\mu+\nu)-\bar{\Pi}(\rho+\mu)\Big)\right].
\end{aligned}\right. \quad (22)$$

За допомогою співвідношень леми для відповідних генератрис встановлюється наслідок 3 залежно від знака $m_1 = \mathrm{E}\xi(1)$, $|m_1|<\infty$. Після граничного переходу $(s \to 0,\ \nu \to 0)$ з (22) випливає твердження про розподіл перестрибкових функціоналів через рівень $x \to \infty$. Зауважимо, що при $m_1 < 0$ ніякі припущення про асимптотику розподілу ξ^+ для $x \to \infty$ [9–13] у даному випадку не використовуються.

Наслідок 3. *Якщо для неперервного знизу процесу з кумулянтою* (1) *виконується умова*

$$\int_0^\infty x\Pi(dx) = \int_0^\infty \Pi(x)dx < \infty,$$

то (1) *можна записати в формі* (7) *з* $\Pi_-(x) = 0$ *для* $x < 0$ *і при* $\sigma = 0$ $a < < 0$. *При таких умовах*

$$\lim_{s\to 0} s^{-1}\nu\rho(s)Ee^{-\nu\xi^+(\theta_s)} = \begin{cases} m_+(\nu)\rho, & \rho = \rho(0) > 0, \quad m_1 > 0; \\ m_0(\nu), & \rho(s) \to 0, \quad m_1 = 0; \\ \nu\rho'(0)Ee^{-\nu\xi^+}, & m_1 < 0, \quad \rho'(0) = |m_1|^{-1}. \end{cases}$$

1. *При* $m_1 > 0$ $m_+(0) = \left[\sigma^2\rho/2 + \bar{\Pi}(0) - \bar{\Pi}(\rho)\right]^{-1}$ *і розподіли* $\gamma_k(\infty)$, $k = \overline{1,3}$, *визначаються співвідношеннями*

$$\begin{cases} Ee^{-u\gamma^+(\infty)} = m_+(0)\left[\dfrac{\sigma^2}{2}\rho + \dfrac{\rho}{\rho - u}\left(\bar{\Pi}(u) - \bar{\Pi}(\rho)\right)\right]; \\ Ee^{-\upsilon\gamma_+(\infty)} = m_+(0)\left[\dfrac{\sigma^2}{2}\rho + \bar{\Pi}(\upsilon) - \bar{\Pi}(\rho+\upsilon)\right]; \\ Ee^{-\mu\gamma^+_\infty} = m_+(0)\left[\dfrac{\sigma^2}{2}\rho + \mu\bar{\Pi}'(\mu) + \dfrac{\rho+\mu}{\rho}\left(\bar{\Pi}(u) - \bar{\Pi}(\rho+\mu)\right)\right], \end{cases} \tag{23}$$

з яких після обернення знаходимо

$$\begin{cases} P\{\gamma^+(\infty) > z\} = m_+(0)\displaystyle\int_z^\infty \left(1 - e^{(z-y)\rho}\right)\Pi(y)dy; \\ P\{\gamma_+(\infty) > z\} = m_+(0)\displaystyle\int_z^\infty \left(1 - e^{-\rho y}\right)\Pi(y)dy; \\ P\{\gamma^+_\infty > z\} = m_+(0)\rho^{-1}\displaystyle\int_z^\infty \left(1 - e^{-\rho y} - \rho y\right)d\Pi(y). \end{cases} \tag{24}$$

Якщо $\sigma^2 > 0$, *то*

$$P\{\gamma^+(\infty) = \gamma_+(\infty) = \gamma^+_\infty = 0\} = m_+(0)\frac{\sigma^2}{2}.$$

2. *При* $m_1 = 0$ *та* $m_2 < \infty$ $m_0(0) = \left[\sigma^2/2 - \bar{\Pi}'(0)\right]^{-1}$ *і розподіли* $\gamma_k(\infty)$ *визначаються таким чином:*

$$\begin{cases} P\{\gamma^+(\infty) > z\} = m_0(0)\displaystyle\int_z^\infty (y - z)\Pi(y)dy; \\ P\{\gamma_+(\infty) > z\} = m_0(0)\displaystyle\int_z^\infty y\Pi(y)dy; \\ P\{\gamma^+_\infty > z\} = \dfrac{1}{2}m_0(0)\displaystyle\int_z^\infty y^2\Pi(dy). \end{cases} \tag{25}$$

Якщо $\sigma^2 > 0$, *то*

$$P\{\gamma^+(\infty)=\gamma_+(\infty)=\gamma^+_\infty=0\} \;=\; m_0(0)\,\frac{\sigma^2}{2}. \tag{26}$$

3. *При* $m_1<0$ $\rho'(0)=E\xi^+\left(\sigma^2/2-\tilde\Pi'(0)\right)^{-1}$, *а умовні генератриси визначаються співвідношеннями*:

a) *для* $\{\tau^+(\infty),\gamma_1(\infty)\}$, $\gamma_1(\infty)=\gamma^+(\infty)$,

$$\begin{cases} E\left[e^{-u\tau^+(\infty)}/\tau^+(\infty)<\infty\right] = \dfrac{\rho'(0)}{E\xi^+}\left[\dfrac{\sigma^2}{2}+\dfrac{\tilde\Pi(0)-\tilde\Pi(u)}{u}\right], \\ P\{\gamma^+(\infty)>z/\tau^+(\infty)<\infty\} = \dfrac{\rho'(0)}{E\xi^+}\displaystyle\int_z^\infty (y-z)\Pi(y)\,dy. \end{cases} \tag{27}$$

b) *для* $\{\tau^+(\infty),\gamma_2(\infty)\}$, $\gamma_2(\infty)=\gamma_+(\infty)$,

$$\begin{cases} E\left[e^{-v\gamma_+(\infty)}/\tau^+(\infty)<\infty\right] = \dfrac{\rho'(0)}{E\xi^+}\left[\dfrac{\sigma^2}{2}-\tilde\Pi'(v)\right], \\ P\{\gamma_+(\infty)>z/\tau^+(\infty)<\infty\} = \dfrac{\rho'(0)}{E\xi^+}\displaystyle\int_z^\infty y\,\Pi(y)\,dy. \end{cases} \tag{28}$$

c) *для* $\{\tau^+(\infty),\gamma_3(\infty)\}$, $\gamma_3(\infty)=\gamma^+_\infty$,

$$\begin{cases} E\left[e^{-\mu\gamma^+_\infty}/\tau^+(\infty)<\infty\right] = \dfrac{\rho'(0)}{E\xi^+}\left[\dfrac{\sigma^2}{2}-\tilde\Pi'(\mu)-\dfrac{\mu}{2}\tilde\Pi''(\mu)\right]; \\ P\{\gamma^+_\infty>z/\tau^+(\infty)<\infty\} = \dfrac{\rho'(0)}{2E\xi^+}\displaystyle\int_z^\infty y^2\,\Pi(dy); \\ P\{\gamma_k(\infty)=0/\tau^+(\infty)<\infty\} = \dfrac{\rho'(0)}{E\xi^+}\,\dfrac{\sigma^2}{2}, \quad k=\overline{1,3}. \end{cases} \tag{29}$$

Доведення співвідношень (25)–(28) при $m_1\ge 0$ випливає із співвідношень для $\tilde V_k(s,\nu,u_k)$ (22)–(24) після граничного переходу $(\nu\to 0,\ s\to 0)$ і обернення відносно u_k. Обернення для $\mu\,\Pi'(\mu)$ та $\mu\,\Pi''(\mu)$ легко перевірити інтегруванням частинами. Зокрема, легко довести, що

$$\mu\,\tilde\Pi'(\mu)+\tilde\Pi(\mu) \;=\; \int_0^\infty e^{-\mu y}y\,\Pi(dy) \;=\; -\int_0^\infty y e^{-\mu y}\,d\Pi(y),$$

$$\mu\,\tilde\Pi''(\mu) \;=\; -\int_0^\infty y^2\Pi(y)\,de^{-\mu y} \;=\; -\,2\Pi'(\mu)-\int_0^\infty y^2e^{-\mu y}\,\Pi(dy).$$

Для випадку $m_1<0$ слід використати умовні генератриси

$$E\left[e^{-u_k\gamma_k(\theta'_\nu)}/\xi^+(\theta_s)>\theta'_\nu\right] \;=\; \frac{\tilde V_k(s,\nu,u_k)}{sP\{\xi^+(\theta_s)>\theta'_\nu\}}$$

і врахувати, що $P\{\xi^+(\theta_s)>\theta'_\nu\}=1-Ee^{-\nu\xi^+(\theta_s)}$. Тоді при переході до границі при $\nu\to 0$ одержимо перші співвідношення в (27)–(29) і

$$\lim_{\nu\to 0}\frac{\tilde V_k(s,\nu,u_k)\nu}{s\nu\left(1-Ee^{-\nu\xi^+(\theta_s)}\right)} \;=\; \frac{1}{sE\xi^+(\theta_s)}\,\lim_{\nu\to 0}\frac{\tilde V_k(s,\nu,u_k)}{\nu}.$$

Основне співвідношення (8), з якого виводяться формули (13) та (20), дає можливість уточнити не тільки розподіл перестрибкових функціоналів для $x\to 0$

та $x \to \infty$, а й виявити, коли має місце вихід процесу на додатний рівень. Зокрема, справедливе наступне твердження.

Наслідок 4. *Якщо для процесу* $\xi(t)$ *з кумулянтою* (7) *виконується умова*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,\Pi(dx) < \infty; \quad \textit{при} \quad \sigma = 0 \quad a > 0,$$

a — довільного знака при $\sigma > 0$, *то*

$$\int_0^{\infty} e^{i\alpha x} E\left[e^{-s\tau^+(x)}, \gamma_k(x) = 0\right] dx = \varphi_+(s,\alpha)\, C_*(s), \tag{30}$$

де $C_*(s)$ *визначається в* (13).

Тепер проаналізуємо випадок, коли розподіли $\xi^{\pm}(\theta_s)$ мають атом у 0. Зауважимо, що при $\pm x > 0$ для процесів з кумулянтами (2) та (3) розподіл $P(s,x) = P\{\xi(\theta_s) < x\}$ та розподіли

$$P_{\pm}(s,x) = P\{\xi^{\pm}(\theta_s) < x\}$$

мають похідні $P'(s,x)$, $P'_{\pm}(s,x)$, $x \neq 0$, навіть тоді, коли

$$p_{\pm}(s) = P\{\xi^{\pm}(\theta_s) = 0\} > 0.$$

Уточнимо співвідношення наслідків 2 та 3 на випадок, близький до неперервності знизу, коли х.ф. $\xi^-(\theta_s)$ визначається за формулою (12). Для цього випадку позначатимемо

$$\begin{cases} G(s,x,u,\upsilon,\mu) = p_-(s) A(x,u,\upsilon,\mu) + G^0(s,x,u,\upsilon,\mu), \\ G^0(s,x,u,\upsilon,\mu) = \int_{-\infty}^{-0} A(s,x-y,u,\upsilon,\mu) P'_-(s,y)\,dy, \\ \overline{G}(s,x,u,\upsilon,\mu) = p_-(s) \overline{A}(x,u,\upsilon,\mu) + \overline{G}^0(s,x,u,\upsilon,\mu), \\ \overline{G}^0(s,x,u,\upsilon,\mu) = \int_{-\infty}^{-0} \overline{A}(x-y,u,\upsilon,\mu) P'_-(s,y)\,dy. \end{cases} \tag{31}$$

Зауважимо, що згідно з (12) $P'_-(s,y) = q_-(s)\, p_-(s)\, e^{p_-(s)y}$, $y < 0$, і аналогічно до (31) виділяємо у згортці стрибковий член для $\mathcal{K}(s,x)$:

$$\mathcal{K}(s,x) = p_-(s)\left[\Pi(x) + q_-(s) \int_x^{\infty} \Pi(y) e^{p_-(s)(x-y)}\,dy\right], \quad x > 0. \tag{32}$$

Теорема 2. *Нехай* $\xi(t)$ *— процес з кумулянтою* (2), *для якого* $\varphi_-(s,\alpha)$ *визначається співвідношенням* (12) *з* $c = 1$ *і* $p_-(s) > 0$. *Тоді*

$$V(s,x,u,\upsilon,\mu) = \int_{-0}^{x} \left[p_-(s) A(x-y,\ldots) + G^0(s,x-y,u,\upsilon,\mu)\right] dP_+(s,y), \tag{33}$$

де $G^0(s,x;u,\upsilon,\mu)$ *— згортка функції* $A(s,x,u,\upsilon,\mu)$ (*див.* (5)) *з експоненціальною густиною* $P'_-(s,x)$ *і подібна до згортки* $\Pi(x)$ *з* $P'_-(s,x)$ *в* (32). *Розподіли пар* $\{\xi^+(\theta_s), \gamma_k(x)\}$ *визначаються співвідношеннями*

$$\int\limits_0^\infty e^{-u_k z} P\{\xi^+(\theta_s) > x,\ \gamma_k(x) > z\} dz =$$

$$= -\frac{1}{su_k}\int\limits_{-0}^{x}\left[p_-(s)\bar{A}(x-y,u_k) + \bar{G}_k^0(s,x-y,u_k)\right] dP_+(s,y), \tag{34}$$

де $\bar{G}_k^0(s,x,u_k)$ — *урізані згортки* $A_k(s,x,u_k)$ *з* $P'_-(s,x)$, $k=\overline{1,3}$. *Розподіл* $\xi^+(\theta_s)$ *визначається співвідношенням, що випливає з* (32) *та* (34)

$$Ee^{-\nu\xi^+(\theta_s)} = \left[1 + \nu s^{-1}\tilde{K}(s,\nu)\right]^{-1}, \tag{35}$$

$$\tilde{K}(s,\nu) = \frac{p_-(s)}{p_-(s)-\nu}\left[(1-\nu)\tilde{\Pi}_+(\nu) - q_-(s)\tilde{\Pi}_+(p_-(s))\right]$$

$$\left(\tilde{K}(s,\nu) = \frac{p_-(s)}{cp_-(s)-\nu}\left[(c-\nu)\tilde{\Pi}_+(\nu) - cq_-(s)\tilde{\Pi}_+(cp_-(s))\right] \quad \textit{при}\ c\neq 1\right);$$

$$\tilde{\Pi}_+(w) = \int\limits_0^\infty e^{-wx}\Pi_+(x)dx, \quad \Pi_+(x) = \int\limits_x^\infty \Pi(dy), \quad x>0;$$

$$E\xi^+(\theta_s) = s^{-1}\tilde{K}(s,0) = \left[\tilde{\Pi}_+(0) - q_-(s)\tilde{\Pi}_+(p_-(s))\right]s^{-1}. \tag{36}$$

Доведення базується на основних співвідношеннях теореми 1. При доведенні цієї теореми слід уточнити всі згортки, що відповідають проекційним дужкам у співвідношеннях (8) та (9) як для сукупності всіх 4-х функціоналів, так і для пар $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$, $k=\overline{1,3}$, з урахуванням розривів для $P_\pm(s,x)$ при $x=0$.

За умов теореми 2 для процесу з $p_\pm(s)>0$ при $x>0$ замість (17) одержимо співвідношення для згорток з центрованими $\bar{A}_k(x,u_k)$:

$$\bar{G}_1(s,x,u) = -p_-(s)u\int\limits_x^\infty \Pi(y)e^{-u(x-y)}dy + \bar{G}_1^0(s,x,u),$$

$$\bar{G}^0(s,x,u) = q_-(s)\frac{u_{p_-(s)}}{p_-(s)-u}\left[\int\limits_0^\infty e^{-uy}\Pi(x+y)dy - \int\limits_0^\infty e^{-p_-(s)y}\Pi(x+y)dy\right],$$

$$\bar{G}_2(s,x,\upsilon) = -p_-(s)\Pi(x)\left(1-e^{-\upsilon x}\right) + \bar{G}_2^0(s,x,\upsilon),$$

$$\bar{G}_2^0(s,x,\upsilon) = q_-(s)p_-(s)\int\limits_x^\infty e^{p_-(s)(x-y)}\left(e^{-\upsilon y}-1\right)\Pi(y)dy,$$

$$\bar{G}_3(s,x,\mu) = p_-(s)\left[\left(e^{-\mu x}-1\right)\Pi(x) - \mu\int\limits_x^\infty \Pi(y)e^{-\mu y}dy\right] + \bar{G}_3^0(s,x,\mu), \tag{37}$$

$$\bar{G}_3^0(s,x,\mu) = q_-(s)\left[p_-(s)\int\limits_x^\infty e^{p_-(s)(x-y)}\left(e^{-\mu y}-1\right)\Pi(y)dy + \right.$$

$$\left. + \mu\left(p_-(s)\right)^{-1}\int\limits_x^\infty e^{-\mu y}\left(e^{p_-(s)(x-y)}-1\right)\Pi(y)dy\right].$$

Неважко зауважити, що ці формули в порівнянні з (18) відрізняються першими членами $p_-(s)\bar{A}_k(x,u_k)$. Подібними до (18) залишаються $\bar{G}_k^0(s,x,u_k)$, якщо покласти $q_-(s) = 1$, а замість $p_-(s)$ підставити $\rho(s)$ ($\rho(s) = cp_-(s)$, якщо $c \neq 1$).

Перший наслідок, що випливає з теореми 2, для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (3) формулюється так:

Наслідок 5. *Якщо від'ємна частина стрибків процесу* $\xi(t)$ *з кумулянтою* (3) *має показниковий розподіл з параметром* $c = 1$

$$\Pi_-(x) = ke^{cx}, \quad x < 0; \quad \text{при} \quad k = \lambda P\{\xi_1 < 0\}, \tag{38}$$

то х.ф. $\xi^-(\theta_s)$ *визначається за формулою* (12), *а для інтегральних перетворень розподілів* $\{\tau^+(x), \gamma_k(k)\}$, $k = \overline{1,3}$, *справедливі співвідношення*

$$\int_0^\infty e^{-u_k z} P\{\xi^+(\theta_s) > 0,\ \gamma_k(x) > z\} dz = -\frac{1}{su_k}\int_0^x \overline{G}_k(s, x-y, u_k)\, dP_+(s,y), \tag{39}$$

де $\overline{G}_k(s,x,\mu_k)$ *визначається в* (39) – (41).

Для перестрибкових функціоналів $\{\tau^+(0), \gamma_k(0)\}$, $k = \overline{1,3}$, суттєво відрізняються розподіли для $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ та $\{\tau^+(0), \gamma_0^+(0)\}$ від розподілів цих же функціоналів для неперервного знизу процесу, а для $\gamma_2(0) = \gamma_+(0)$ розподіли залишаються подібними. При доведенні наступного наслідку для розподілів вказаних функціоналів замість добутку $p_+(s)\rho(s) = s|a|^{-1}$ (у випадку неперервності знизу), при умові (38) слід скористатися співвідношеннями

$$p_-(s)\,p_+(s) = \frac{s}{s+\lambda}, \qquad P\{\xi(\theta_s) = 0\} = \frac{s}{s+\lambda}. \tag{40}$$

Наслідок 6. *Якщо для процесу* $\xi(t)$ *виконуються умови наслідку* 5, *то розподіли* $\{\tau^+(0), \gamma_k(0)\}$ *визначаються так*:

$$\begin{cases} P\{\xi^+(\theta_s) > 0,\ \gamma^+(0) > z\} = \dfrac{1}{s+\lambda}\left\{\Pi_+(z) + q_-(s)\displaystyle\int_z^\infty e^{(z-y)p_-(s)}\Pi_+(y)\,dy\right\}, \\ P\{\xi^+(\theta_s) > 0,\ \gamma_+(0) > z\} = \dfrac{1}{s+\lambda}q_-(s)\displaystyle\int_z^\infty e^{-yp_-(s)}\Pi_+(y)\,dy, \\ P\{\xi^+(\theta_s) > 0,\ \gamma_0^+(0) > z\} = \dfrac{1}{s+\lambda}\left\{\Pi_+(z) + \dfrac{1}{p_-(s)}\displaystyle\int_z^\infty (1 - e^{-p_-(s)y})\Pi_+(y)\,dy\right\}, \\ q_+(s) = P\{\xi^+(\theta_s) > 0\} = \dfrac{1}{s+\lambda}\left[\Pi_+(0) + q_-(s)\tilde{\Pi}(p_-(s))\right], \end{cases} \tag{41}$$

а для розподілу $\gamma_+(0)$ *існує атом у нулі* (*чого немає для* $\gamma^+(0)$ *та* γ_0^+) *і виконується співвідношення*

$$P\{\xi^+(\theta_s) > 0,\ \gamma_+(0) = 0\} = \frac{1}{s+\lambda}\Pi_+(0) = \frac{1}{s+\lambda}P\{\xi_1 > 0\}. \tag{42}$$

Для того щоб переконатися у відмінності розподілу функціоналів, пов'язаних з перестрибком процесу (з $p_\pm(s) > 0$) через нескінченно віддалений рівень $x \to \infty$, від результатів наслідку 3, детальніше вияснимо різницю між функціями $G_k(s,x,u_k)$. Розглянемо функції (31) і підрахуємо їхні інтегральні перетворення.

Тоді замість (17) одержимо

$$\begin{cases} G_1(s,x,u) = p_-(s)\int\limits_x^\infty e^{-uy}\Pi(dy) + G_1^0(s,x,u), \\ \tilde{G}_1(s,\nu,u) = p_-(s)\dfrac{1}{u-\nu}\Big(u\tilde{\Pi}(u) - \nu\tilde{\Pi}(\nu)\Big) + \tilde{G}_1^0(s,\nu,u), \\ \tilde{G}_1^0(s,\nu,u) = \dfrac{q_-p_-}{p_- - u}\left[\dfrac{p_-}{p_-\nu}\Big(\tilde{\Pi}_+(\nu) - \tilde{\Pi}_+(p_-)\Big) - \dfrac{u}{u-\nu}\Big(\tilde{\Pi}_+(\nu) - \tilde{\Pi}_+(u)\Big)\right]; \end{cases} \tag{43}$$

$G_k^0(s,x,u_k)$, $k=\overline{1,3}$, та $\tilde{G}_k^0(s,\nu,u_k) = \int_0^\infty e^{-\nu x}G_k^0(s,x,u_k)dx$ подібні до $G_k(s,x,u_k)$ в (17) і відрізняються від них множником $q_- = q_-(s)$ та заміною $\rho(s)$ на $p_- = p_-(s)$ (якщо $c \neq 1$ — заміною $\rho(s)$ на $cp_-(s)$).

Аналогічно знаходимо

$$\begin{cases} G_2(s,x,\upsilon) = p_-(s)\, e^{-\upsilon x}\Pi(x) + G_2^0(s,x,\upsilon), \\ \tilde{G}_2(s,x,\upsilon) = p_-(s)\,\tilde{\Pi}_+(\upsilon+\nu) + \tilde{G}_2^0(s,\nu,\upsilon), \\ \tilde{G}_2^0(s,\nu,\upsilon) = \dfrac{q_-p_-}{p_- - \upsilon}\Big(\tilde{\Pi}_+(\nu+\upsilon) - \tilde{\Pi}_+(p_- + \upsilon)\Big); \end{cases} \tag{44}$$

$$\begin{cases} G_3(s,x,\mu) = p_-(s)\int\limits_x^\infty e^{-\mu y}\Pi(dy) + G_3^0(s,x,\mu), \\ \tilde{G}_3(s,x,\mu) = p_-(s)\left[\tilde{\Pi}_+(\mu+\nu) + \dfrac{\mu}{\nu}\Big(\tilde{\Pi}_+(\mu+\nu) - \tilde{\Pi}_+(\mu)\Big)\right] + \tilde{G}_3^0(s,\nu,\mu), \\ \tilde{G}_3^0(s,\nu,\mu) = q_-(s)\left[\dfrac{\mu}{\nu}\Big(\tilde{\Pi}_+(\mu+\nu) - \tilde{\Pi}_+(\mu)\Big) + \dfrac{p_- + \mu}{p_- - \nu}\Big(\tilde{\Pi}_+(\mu+\nu) - \tilde{\Pi}_+(p_- + \mu)\Big)\right]. \end{cases} \tag{45}$$

Зауважимо, що спектральна міра стрибків $\Pi(A)$ зосереджена на всій прямій (крім $x=0$). Інтегральні перетворення беруться лише відносно $x>0$,

$$\tilde{\Pi}_+(\nu) = \int\limits_0^\infty e^{-\nu x}\Pi(x)dx.$$

Якщо $\int_{-\infty}^\infty \Pi(dx) = \lambda < \infty$, то $\Pi(x) = \lambda\overline{F}(x)$, $x>0$, $\overline{F}(x) = P\{\xi_k > x\}$.

Якщо до співвідношення (33) застосувати перетворення Лапласа відносно x, то через функції $\tilde{G}_k(s,\nu,u_k)$ в (43) – (45) визначатимуться генератриси для $\{\tau^+(\theta'_\nu),\ \gamma_k(\theta'_\nu)\}$:

$$\tilde{V}_k(s,\nu,u_k) = E\left[e^{-s\tau^+(\theta'_\nu) - \gamma_k(\theta'_\nu)} / \tau^+(\theta'_\nu) < \infty\right] = s^{-1}\nu E\, e^{-\nu\xi^+(\theta_s)}\tilde{G}_k(s,\nu,u_k).$$

На підставі цього співвідношення при $\nu \to 0$ виводиться наслідок для розподілу $\{\tau^+(\infty), \gamma_k(\infty)\}$. Цей наслідок є аналогом наслідку 3 для неперервних знизу процесів.

Наслідок 7. *Якщо для процесу* $\xi(t)$ *з кумулянтою* (3) *виконуються умови наслідку* 5, *то при* $m_1 \geq 0$ $P\{\tau^+(\infty) < \infty\} = 1$, *а при* $m_1 < 0$ $P\{\tau^+(\infty) < x\} = P\{\xi^+ > x\} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ *і розподіли* $\gamma_k(\infty)$, $k = \overline{1,3}$, *визначаються залежно від знака* m_1.

1. *Якщо* $m_1 > 0$, *то* $p_-(s) \xrightarrow[s\to 0]{} p_- > 0$, $m_+(0) = \left[\tilde{\Pi}_+(0) - q_-\tilde{\Pi}_+(p_-)\right]^{-1}$, *для* $\gamma^+(\infty)_+$ *мають місце співвідношення*

$$Ee^{-u\gamma^+(\infty)} = m_+(0)\left[p_-\bar{\Pi}_+(u) + \frac{q_-p_-}{p_- - u}\left(\bar{\Pi}_+(u) - \bar{\Pi}_+(p_-)\right)\right], \qquad (46)$$

$$P\{\gamma^+(\infty) > z\} = m_+(0)\left[p_-\int_z^\infty \Pi(y)dy + q_-\int_z^\infty\left(1 - e^{(z-y)p_-}\right)\Pi(y)dy\right].$$

Для $\gamma_+(\infty)$ *справедливі співвідношення*

$$Ee^{-v\gamma_+(\infty)} = m_+(0)\left[p_-\bar{\Pi}_+(v) + q_-\left(\bar{\Pi}_+(v) - \bar{\Pi}_+(v + p_-)\right)\right], \qquad (47)$$

$$P\{\gamma_+(\infty) > z\} = m_+(0)\left[p_-\int_z^\infty \Pi(y)dy + q_-\int_z^\infty\left(1 - e^{-p_-z}\right)\Pi(y)dy\right], \quad z > 0.$$

Генератриса та розподіл для γ_∞^+ *мають вигляд*

$$Ee^{-\mu\gamma_\infty^+} = m_+(0)\Big\{p_-\left(\bar{\Pi}_+(\mu) + \mu\bar{\Pi}'_+(u)\right) +$$

$$+ q_-\left[\mu\bar{\Pi}'_+(\mu) + \frac{p_- + \mu}{p_-}\left(\bar{\Pi}_+(u) - \bar{\Pi}_+(\mu + p_-)\right)\right]\Big\}, \qquad (48)$$

$$P\{\gamma_\infty^+ > z\} = m_+(0)\left[p_-\int_z^\infty y\Pi(dy) + \frac{1}{2}q_-p_-^{-1}\int_z^\infty\left(1 - e^{-p_-y} - p_-y\right)\Pi(y)dy\right].$$

2. *Якщо* $m_1 = 0$ *і* $m_2 < \infty$, *то* $p_-(s)\xrightarrow[s\to 0]{} 0$, $m_0(0) = \left[\bar{\Pi}_+(0) - \bar{\Pi}'_+(0)\right]^{-1}$. *Генератриса та розподіли* $\gamma_k(\infty)$, $k = \overline{1,3}$, *визначаються таким чином:*

$$\begin{aligned}
&Ee^{-u\gamma^+(\infty)} = m_0(0)\left[\bar{\Pi}_+(u) + \frac{\bar{\Pi}_+(0) - \bar{\Pi}_+(u)}{u}\right],\\
&P\{\gamma^+(\infty) > z\} = m_0(0)\left[\int_z^\infty \Pi(y)dy + \int_z^\infty (y - z)\Pi(y)dz\right], \quad z > 0;\\
&Ee^{-v\gamma^+(\infty)} = m_0(0)\left[\bar{\Pi}_+(v) - \bar{\Pi}'_+(v)\right],\\
&P\{\gamma_+(\infty) > z\} = m_0(0)\left[\int_z^\infty \Pi(y)dy + \int_z^\infty y\,\Pi(y)dz\right], \quad z > 0;\\
&Ee^{-\mu\gamma_\infty^+} = m_0(0)\left[\mu\bar{\Pi}'_+(\mu) + \bar{\Pi}'_+(\mu) - \mu\bar{\Pi}'_+(\mu) - \frac{\mu}{2}\bar{\Pi}''_+(\mu)\right],\\
&P\{\gamma_\infty^+ > z\} = m_0(0)\left[\int_z^\infty \Pi(dy) + \frac{1}{2}\int_z^\infty y^2\Pi(y)dy\right], \quad z > 0.
\end{aligned} \qquad (49)$$

3. *Якщо* $m_1 < 0$, *то* $p_-(s)\xrightarrow[s\to 0]{} 0$,

$$p'_-(0) = [\lambda p_+(0)]^{-1} > 0; \qquad p_+(0) = \left(\bar{\Pi}_+(0) - \bar{\Pi}'_+(0)\right)\left(\lambda E\xi^+\right)^{-1}.$$

a) *Умовна генератриса для* $\{\tau^+(\infty), \gamma^+(\infty)\}$ *визначається так:*

$$E\left[e^{-u\gamma^+(\infty)} / \tau^+(\infty) < \infty\right] = \frac{p_+^{-1}(0)}{\lambda E\xi^+}\left[\bar{\Pi}_+(u) + \frac{\bar{\Pi}_+(0) - \bar{\Pi}_+(u)}{u}\right], \qquad (50)$$

$$P\{\gamma^+(\infty) > z / \tau^+(\infty) < \infty\} = \frac{p_+^{-1}(0)}{\lambda E\xi^+}\left[\int_z^\infty \Pi(y)dy + \int_z^\infty (y-z)\Pi(y)dz\right].$$

b) *Простіше визначається умовна генератриса для* $\{\tau^+(\infty), \gamma_+(\infty)\}$:

$$E\left[e^{-\upsilon\gamma_+(\infty)} / \tau^+(\infty) < \infty\right] = \frac{p_+^{-1}(0)}{\lambda E\xi^+}\left[\bar{\Pi}_+(\upsilon) - \bar{\Pi}'_+(\upsilon)\right], \tag{51}$$

$$P\{\gamma_+(\infty) > z / \tau^+(\infty) < \infty\} = \frac{p_+^{-1}(0)}{\lambda E\xi^+}\left[\int_z^\infty \Pi(y)dy + \int_z^\infty y\Pi(y)dy\right].$$

c) *Умовна генератриса для* $\{\tau^+(\infty), \gamma_\infty^+\}$ *визначається співвідношеннями*

$$E\left[e^{-\mu\gamma_\infty^+} / \tau^+(\infty) < \infty\right] = \frac{p_+^{-1}(0)}{\lambda E\xi^+}\left[\bar{\Pi}_+(\mu) + \mu\bar{\Pi}_+(\mu) - \bar{\Pi}'_+(\mu) - \frac{\mu}{2}\bar{\Pi}''_+(\mu)\right], \tag{52}$$

$$P\{\gamma_\infty^+ > z / \tau^+(\infty) < \infty\} = \frac{p_+^{-1}(0)}{\lambda E\xi^+}\left[\int_z^\infty y\Pi(dy) + \frac{1}{2}\int_z^\infty y^2\Pi(y)dy\right].$$

Доведення наслідку 7 при $m_1 \ge 0$ (див. (46) – (49)) випливає із співвідношення

$$\bar{V}_k(s,\upsilon,u_k) = s^{-1}\nu E e^{-\nu\xi^+(\theta_s)}\bar{G}_k(s,\nu,u_k)$$

при $s \to 0$, $\nu \to 0$. При $m_1 < 0$ (див. (50) – (52)), як і при доведенні п. 3 наслідку 3, використовуються умовні генератриси

$$E\left[e^{-u_k\gamma_k(\theta'_\nu)} / \xi^+(\theta_s) > \theta'_\nu\right] = \frac{\bar{V}_k(s,\nu,u_k)}{1 - Ee^{-\nu\xi^+(\theta_s)}}.$$

Звідси при $\nu \to 0$ знаходяться

$$E\left[e^{-u_k\gamma_k(\infty) - s\tau^+(\infty)} / \tau^+(\infty) < \infty\right] = \frac{1}{sE\xi^+(\theta_s)}\lim_{\nu\to 0}\frac{\bar{V}_k(s,\nu,u_k)}{\nu} = \frac{\bar{G}_k(s,0,u_k)}{sE\xi^+(\theta_s)}.$$

Аналогічні результати мають місце для процесів $\xi(t)$, близьких до неперервних зверху пуассонівських процесів. Зокрема, якщо процес $\xi(t)$ має кумулянту (3) і $\Pi_+(x)$ має вигляд

$$\Pi_+(x) = ke^{-cx}, \quad c > 0, \quad k > 0, \quad x > 0,$$

то х.ф. $\varphi_+(s,\alpha)$ визначається співвідношенням

$$\varphi_+(s,\alpha) = \frac{p_+(s)(c - i\alpha)}{cp_+(s) - i\alpha}, \qquad \psi_2(-icp_+) = s, \tag{53}$$

на основі якого для розподілу перестрибкових функціоналів, пов'язаних з перетином рівня $x < 0$,

$$\{\tau^-(x), \gamma^-(x), \gamma_-(x), \gamma_x^-\}, \quad x < 0,$$

встановлюються твердження, аналогічні теоремі 2 та її наслідкам. Їх ми наводити не будемо, але сформулюємо твердження про розподіл екстремумів цього процесу.

Теорема 3. *Якщо* $\xi(t)$ *має кумулянту* (3) *з* $\Pi_+(x) = ke^{-cx}$, $x > 0$, $c > 0$, *то компоненти факторизаційного розкладу*

$$\varphi(s,\alpha) = \varphi_+(s,\alpha)\varphi_-(s,\alpha), \qquad \operatorname{Im}\alpha = 0,$$

визначаються так: для $\varphi_+(s,\alpha)$ *має місце співвідношення* (53), *а для розподілу* $\xi^-(\theta_s)$ *справедливі співвідношення*

$$p_-(s) = P\{\xi^-(\theta_s) = 0\} = \frac{s}{s+\lambda}p_+^{-1}(s), \qquad q_\pm(s) = 1 - p_\pm(s);$$

$$E[e^{i\alpha\xi^-(\theta_s)}, \xi^-(\theta_s) < 0] = \frac{p_-(s)(s+\lambda)}{s}\left\{[\varphi(s,\alpha)]_- - cq_+(s)\left[\frac{\varphi(s,\alpha)}{c-i\alpha}\right]_-\right\}, \quad (54)$$

$$q_-(s) = \frac{1}{p_+(s)}\left[P(s,0) - cq_+(s)\int_0^\infty P(s,-y)e^{-cy}\,dy\right],$$

$$P\{\xi^-(\theta_s) < x\} = P(s,x) + p_+^{-1}(s)q_+(s)E[e^{c(\xi(\theta_s)-x)}, \xi(\theta_s) < x], \quad x < 0. \quad (55)$$

Якщо $m_1 > 0$, *то*

$$p_-(s) \xrightarrow[s\to 0]{} p_- > 0, \quad p_+(s) \xrightarrow[s\to 0]{} 0, \quad q_+(s) \xrightarrow[s\to 0]{} 1, \quad P(s,x) \xrightarrow[s\to 0]{} 0 \ \text{при} \ x < 0$$

і існує невироджений розподіл абсолютного мінімуму

$$P\{\xi^- < x\} = \lambda p_-\int_0^\infty E[e^{c(\xi(t)-x)}, \xi(t) < x]\,dt, \quad x < 0; \quad (56)$$

$$p_- = P\{\xi^- = 0\} = [\lambda p_+'(0)]^{-1} = \left[1 + \lambda\int_0^\infty E[e^{c\xi(t)}, \xi(t) < 0]\,dt\right]^{-1}.$$

Доведення випливає із співвідношення

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{p_+(s)(c-i\alpha)}{cp_+(s) - i\alpha}\varphi_-(s,\alpha),$$

з якого після проектування знаходимо

$$\varphi_-(s,\alpha) = p_+^{-1}(s)\left[\varphi(s,\alpha)\left(1 - \frac{cq_+(s)}{c-i\alpha}\right)\right]_-.$$

Звідси почленним проектуванням одержуємо (54). Обернувши (54) і виконавши інтегрування частинами, знаходимо (55). При $s \to 0$ з (55) випливає (56).

У наступному наслідку порівнюються результати відносно розподілу одного з абсолютних екстремумів для майже напівнеперервних процесів з х.ф. $\varphi_-(s,\alpha)$ (див. (12)) та $\varphi_+(s,\alpha)$ (див. (53)) і для просто напівнеперервних процесів.

Наслідок 8. *Для неперервного зверху процесу з кумулянтою*

$$\psi(\alpha) = i\alpha\gamma - \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 + \int_{-\infty}^0 E[e^{i\alpha x} - 1 - i\alpha x\delta(x \geq -1)]\Pi(dx)$$

при $m_1 > 0$ *х.ф. абсолютного мінімуму* ξ^- *визначається формулою Полячека – Хінчіна для* $\sigma = 0$ *або аналогічною до* (11) *формулою для* $\sigma \geq 0$

$$\varphi_-(\alpha) = (1 - \psi^*(\alpha))^{-1} = Ee^{i\alpha\xi^*(\theta_1)} = \int_0^\infty e^{-t}Ee^{i\alpha\xi^*(t)}\,dt, \quad (57)$$

де $\xi^*(t)$ *має спектральну міру* $\Pi^*(dx) = m_1^{-1}\Pi(x)dx$, $x < 0$, *знесення* $a^* = -\sigma^2(2m_1)^{-1}$ *і кумулянту* $\psi^*(\alpha) = i\alpha a_+^*\int_{-\infty}^0 (e^{i\alpha x} - 1)\Pi^*(dx)$.

Для неперервного знизу процесу з кумулянтою (1) *при* $m_1 < 0$ *розподіл* ξ^+ *визначається формулою Полячека – Хінчіна для* $\sigma = 0$, *а при* $\sigma \geq 0$ *справедлива формула*

$$\varphi_+(\alpha) = (1-\psi_+(\alpha))^{-1} = Ee^{i\alpha\eta_*(\theta_1)} = \int_0^\infty e^{-t} Ee^{i\alpha\eta_*(t)} dt, \tag{58}$$

де $\eta_*(t)$ — *монотонний процес з кумулянтою*

$$\psi_+^*(\alpha) = \frac{1}{|m_1|}\left[\frac{\sigma^2}{2} i\alpha + \int_0^\infty (e^{i\alpha x}-1)\Pi(x)dx\right]. \tag{59}$$

Для майже неперервного зверху процесу (див. теорему 3) *х.ф.* $\varphi_+(s,\alpha)$ *має вигляд* (53), *а при* $m_1 > 0$ *розподіл абсолютного мінімуму визначається співвідношеннями* (56). *Для майже неперервного знизу процесу (див. теорему* 2 *та* (12) *з* $c \neq 1$) *при* $m_1 < 0$ *розподіл* ξ^+ *визначається генератрисою*

$$Ee^{-\nu\xi^+} = (1-k_*(\nu))^{-1} = [1-\lambda_*(\varphi_*(\nu)-1)]^{-1} = Ee^{-\nu\xi_*(\theta_1)}, \tag{60}$$

де $\xi_*(t)$ — *монотонний процес з моментною кумулянтою*

$$k_*(\nu) = \int_0^\infty (e^{-\nu x}-1)\Pi_*(dx) = \lambda_*\int_0^\infty (e^{-\nu x}-1)dF_*(x),$$

$$\Pi_*(dx) = p'_-(0)\left[c\Pi_+(x)dx + \Pi_+(dx)\right], \quad x > 0, \tag{61}$$

$$\lambda_* = \int_0^\infty \Pi_*(dx) = (\lambda p_+)^{-1}\left(c\bar{\Pi}_+(0) + \Pi_+(0)\right), \quad p_+ = (1+\lambda_*)^{-1}.$$

Якщо $a \geq 0$, *то*

$$k_*(\nu) = a\nu\rho'_-(0) + \int_0^\infty (e^{-\nu x}-1)\Pi_*(dx).$$

Формула Полячека – Хінчіна для ξ^+ *випливає з* (60):

$$Ee^{-\nu\xi^+} = p_+(1-q_+\varphi_*(\nu))^{-1}, \quad \varphi_*(\nu) = \lambda_*^{-1}\int_0^\infty e^{-\nu x}\Pi_*(dx). \tag{62}$$

Доведення (57) випливає з того, що для неперервного зверху процесу [2, с. 72] при $m_1 > 0$

$$\varphi_-(\alpha) = i\alpha m_1\psi^{-1}(\alpha) = m_1\left[m_1 - \int_{-\infty}^0 (e^{i\alpha x}-1)\Pi(x)dx + i\alpha\frac{\sigma^2}{2}\right]^{-1}.$$

Для неперервного знизу процесу при $m_1 < 0$ (58) випливає з (14) при $s \to 0$, оскільки в цьому випадку

$$C_*(0) = \lim_{s\to 0} C_*(s) = \frac{\sigma^2}{2}\rho'(0)\delta \quad (\sigma > 0), \qquad \rho'(0) = |m_1|^{-1},$$

$$K(s,\alpha) = \rho(s)(\rho(s)+i\alpha)^{-1}\int_0^\infty \Pi(y)(e^{i\alpha y}-1)dy,$$

$$i\alpha s^{-1}K(s,\alpha) \xrightarrow[s\to 0]{} \rho'(0)\int_0^\infty \Pi(y)(e^{i\alpha y}-1)dy.$$

Доведення для майже неперервного знизу процесу (див. теорему 2) при $m_1 = \lambda\ (m_1^+ - c^{-1}q) < 0$ з $c \neq 1$ виводиться з (35) при $s \to 0$. При цьому слід врахувати, що розподіл стрибків має вигляд

$$F(x) = qe^{cx}\delta(x>0) + pF_+(x)\delta(x>0), \quad p + q = 1,$$

$$m_1^+ = p\int_0^\infty x dF_+(x), \qquad \Pi_+(dx) = \lambda dF(x) = \lambda p dF_+(x), \quad x > 0,$$

$$\lambda_* = \int_0^\infty \Pi_*(dx) = p_+^{-1}(cm_1^+ + p), \qquad cm_1^+ < q, \qquad q_+ = cm_1^+ + p.$$

Границю для $\tilde{K}(s,\nu)$ (див. (35)) позначимо

$$-k_*(\nu) = \lim_{s\to 0} \nu\tilde{K}(s,\nu)s^{-1} = p_-'(0)\left[(\nu - c)\bar{\Pi}_+(\nu) + c\bar{\Pi}_+(0)\right] =$$

$$= (\lambda p_+)^{-1}\left[c\int_0^\infty (1 - e^{-\nu x})\Pi_+(x)dx - \int_0^\infty \Pi_+(x)de^{-\nu x}\right].$$

Після інтегрування частинами для $k_*(\nu)$ одержимо (61), і тоді з (35) при $s \to 0$ випливає (60), звідки нескладними перетвореннями виводиться (62).

Для спільної генератриси $\{\gamma^+(\theta_\nu'), \gamma^+_{\theta_\nu'}\}$ із (20) у випадку неперервності знизу аналогічно (22) виводиться співвідношення

$$E\left[e^{-u\gamma^+(\theta_\nu') - \mu\gamma^+_{\theta_\nu'}},\ \xi^+(\theta_s) > \theta_\nu'\right] = s^{-1}\nu\rho(s)Ee^{-\nu\xi^+(\theta_s)}\bar{\upsilon}_s(\nu, u, \mu), \tag{63}$$

$$\bar{\upsilon}_s(\nu, u, \mu) = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{\rho(s) - u}\left[\frac{u+\mu}{u-\nu}\left(\bar{\Pi}(\mu+u) - \bar{\Pi}(\mu+\nu)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho(s)+\mu}{\rho(s)-\nu}\left(\bar{\Pi}(\mu+\nu) - \bar{\Pi}(\rho(s)+\mu)\right)\right].$$

При $m_1 > 0$, $\rho(s) \underset{s\to 0}{\to} \rho > 0$ генератриса $\{\gamma^+(\theta_\nu'), \gamma^+_{\theta_\nu'}\}$ визначається співвідношенням

$$Ee^{-u\gamma^+(\theta_\nu') - \mu\gamma^+_{\theta_\nu'}} = m_+(\nu)\bar{\upsilon}_0^+(\nu, u, \mu)\rho,$$

$$\bar{\upsilon}_0(\nu, u, \mu) = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{\rho - u}\left[\frac{u+\mu}{u-\nu}\left(\bar{\Pi}(\mu+u) - \bar{\Pi}(\mu+\nu)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho+\mu}{\rho-\nu}\left(\bar{\Pi}(\mu+\nu) - \bar{\Pi}(\rho+\mu)\right)\right],$$

$$Ee^{-u\gamma^+(\infty) - \mu\gamma^+_\infty} = m_+(0)\bar{\upsilon}_0^+(0, u, \mu), \qquad m_+(0) = \left[\bar{\upsilon}_0^+(0,0,0)\rho\right]^{-1}. \tag{64}$$

При $m_1 = 0$, $\rho(s) \underset{s\to 0}{\to} 0$ генератриса $\{\gamma^+(\infty), \gamma^+_\infty\}$ визначається співвідношенням

$$Ee^{-u\gamma^+(\theta_\nu') - \mu\gamma^+_{\theta_\nu'}} = m_0(\nu)\bar{\upsilon}_0(\nu, u, \mu),$$

$$\bar{\upsilon}_0(\nu, u, \mu) = \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{u}\left[\frac{u+\mu}{u-\nu}\left(\bar{\Pi}(\mu+u) - \bar{\Pi}(\mu+\nu)\right) - \frac{\mu}{\nu}\left(\bar{\Pi}(\mu+\nu) - \bar{\Pi}(\mu)\right)\right],$$

$$Ee^{-u\gamma^+(\infty)-\mu\gamma^+_\infty} = m_0(0)\tilde{v}_0(0,u,\mu), \qquad m_0(0) = \left[\frac{\sigma^2}{2} - \tilde{\Pi}'(0)\right]^{-1}, \tag{65}$$

$$\tilde{v}_0(0,u,\mu) = \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{u}\left[\frac{u+\mu}{u}\left(\tilde{\Pi}(\mu+u)-\tilde{\Pi}(\mu)\right) - \mu\tilde{\Pi}'(\mu)\right].$$

При $m_1 < 0$, $\rho(s) \underset{s\to 0}{\to} 0$ для визначення умовної генератриси використовується співвідношення, що випливає з (20):

$$E\left[e^{-u\gamma^+(\theta'_\nu)-\mu\gamma^+_{\theta'_\nu}} \,/\, \xi^+(\theta_s) > \theta'_\nu\right] = \frac{\nu\rho(s)Ee^{-\nu\xi^+(\theta_s)}\tilde{v}_s(\nu,u,\mu)}{sP\{\xi^+(\theta_s) > \theta'_\nu\}}.$$

Звідси при $s \to 0$ та $\nu \to 0$ знаходимо

$$E\left[e^{-u\gamma^+(\infty)-\mu\gamma^+_\infty} \,/\, \tau^+(\infty) < \infty\right] = \frac{1}{|m_1|E\xi^+}\tilde{v}_0(0,u,\mu). \tag{66}$$

Обернення (64) – (66) відносно u та μ дає спільний розподіл $\{\gamma^+(\infty), \gamma^+_\infty\}$, який визначається більш складними співвідношеннями, ніж раніше одержані маргінальні розподіли цих функціоналів (див. наслідок 3).

1. *Гусак Д. В.* О совместном распределении времени и величины первого перескока для однородных процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 1969. – **14**, № 1. – С. 15 – 23.
2. *Гусак Д. В., Королюк В. С.* Распределение функционалов от однородных процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1970. – Вып. 1. – С. 55 – 73.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. – Т. 2. – М.: Наука, 1973. – 639 с.
4. *Гусак Д. В.* Замечание о распределении момента и величины первого перескока для пуассоновских процессов // Теория случайных процессов. Вопр. статистики и управления. – Ин-т математики АН УССР, 1974. – С. 10 – 21.
5. *Фохт А. И.* Распределение величин первого перескока для одного класса процессов // Теория вероятностей и ее применения. – 1976. – **21**, № 2. – С. 430 – 434.
6. *Могульский А. А.* О величине первого перескока для процессов с независимыми приращениями // Там же. – 1976. – **21**, № 3. – С. 486 – 496.
7. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – К.: Наук. думка, 1975. – 138 с.
8. *Дьячковский С. В., Супрун В. Н., Пирджанов Б.* Изучение величины перескока для обобщенного пуассоновского процесса со сносом методом потенциала // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1975. – Вып. 13. – С. 53 – 59.
9. *Гусак Д. В.* Распределение предельной величины перескока для сложных пуассоновских процессов на цепи Маркова // Аналитические методы в теории вероятностей. – К.: Наук. думка, 1979. – С. 34 – 43.
10. *Братийчук Н. С., Гусак Д. В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – К.: Наук. думка, 1990. – 264 с.
11. *Гусак Д. В.* Метод факторизации в граничных задачах для одного класса случайных процессов. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1980. – 26 с. – (Автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук.).
12. *Гусак Д. В.* Метод факторизации в граничных задачах для одного класса процессов на цепи Маркова. II. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1978. – 60 с. – (Препринт 78.II).
13. *Гусак Д. В.* Метод факторизации в граничных задачах для однородных процессов с независимыми приращениями // Распределение некоторых функционалов для процессов с независимыми приращениями. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 3 – 42. – (Препринт 85.43).
14. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук. – 1958. – **5**. – С. 3 – 120.
15. *Gusak D.* The distributions of extrema for risk processes on the finite Markov chain // Theory Stoch. Proc. – 2001. – **7**(23), № 1 – 2. – P. 109 – 120.

Одержано 08.05.01