УДК 517.5

В. Ф. Бабенко[*], **В. А. Кофанов, С. А. Пичугов** (Днепропетр. нац. ун-т)

СРАВНЕНИЕ ТОЧНЫХ КОНСТАНТ В НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ И ОКРУЖНОСТИ

We investigate the correlation between the constants $K(\mathbf{R})$ and $K(\mathbf{T})$, where

$$K(G) = K_{k,r}(G; q, p, s; \alpha) := \sup_{\substack{x \in L^r_{p,s}(G) \\ x^{(r)} \neq 0}} \frac{\|x^{(k)}\|_{L_q(G)}}{\|x\|^{\alpha}_{L_p(G)} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_s(G)}}$$

is an exact constant in the Kolmogorov-type inequality, $\mathbf{R}$ is the real line, $\mathbf{T}$ is the unit circle, $L^r_{p,s}(G)$ is a set of functions $x \in L_p(G)$ such that $x^{(r)} \in L_s(G)$; $q, p, s \in [1, \infty]$; $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$; $\alpha = \dfrac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s}$ if $G = \mathbf{R}$ and $\alpha = \min\left\{1-k/r, \dfrac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s}\right\}$ if $G = \mathbf{T}$. We prove that $K(\mathbf{R}) = K(\mathbf{T})$ in the case where $\dfrac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s} = 1-k/r$. If $\dfrac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s} < 1-k/r$, then $K(\mathbf{R}) \leq K(\mathbf{T})$ and the last inequality may be both an equality and a strict inequality. As a corollary, we obtain new strict Kolmogorov-type inequalities on the real line.

Досліджується взаємозв'язок між константами $K(\mathbf{R})$ і $K(\mathbf{T})$, де

$$K(G) = K_{k,r}(G; q, p, s; \alpha) := \sup_{\substack{x \in L^r_{p,s}(G) \\ x^{(r)} \neq 0}} \frac{\|x^{(k)}\|_{L_q(G)}}{\|x\|^{\alpha}_{L_p(G)} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_s(G)}}$$

— точна константа в нерівності Колмогорова; $\mathbf{R}$ — дійсна пряма, $\mathbf{T}$ — одиничне коло; $L^r_{p,s}(G)$ — множина функцій $x \in L_p(G)$ таких, що $x^{(r)} \in L_s(G)$; $q, p, s \in [1, \infty]$; $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$; $\alpha = \dfrac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s}$, якщо $G = \mathbf{R}$, і $\alpha = \min\left\{1-k/r, \dfrac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s}\right\}$, якщо $G = \mathbf{T}$. Доведено, що коли $\dfrac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s} = 1-k/r$, то $K(\mathbf{R}) = K(\mathbf{T})$; якщо ж $\dfrac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s} < 1-k/r$, то $K(\mathbf{R}) \leq K(\mathbf{T})$, причому остання нерівність може бути як рівністю, так і строгою нерівністю. Як наслідок одержано нові точні нерівності типу Колмогорова на дійсній прямій.

1. Введение. Пусть G — действительная ось $\mathbf{R}$, или единичная окружность $\mathbf{T}$, реализованная как отрезок $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами; $L_p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, — пространство измеримых функций $x: G \to \mathbf{R}$ с конечной L_p-нормой

$$\|x\|_{L_p(G)} = \|x\|_p := \begin{cases} \left\{ \int\limits_G |x(t)|^p \, dt \right\}^{1/p}, & \text{если} \quad 1 \leq p < \infty; \\ \operatorname{vrai\,sup}\limits_{t \in G} |x(t)|, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

---

[*] Частично поддержан УФФИ (проект 01.07/00241).

В дальнейшем будем использовать обозначения $\|\cdot\|_p$ вместо $\|x\|_{L_p(G)}$ только в тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений. Для $r \in \mathbf{N}$ и $s \in$ $\in [1, \infty]$ обозначим через $L_s^r(G)$ множество функций $x : G \to \mathbf{R}$ таких, что $x^{(r-1)}$ $(x^{(0)} = x)$ локально абсолютно непрерывна, а $x^{(r)} \in L_s(G)$, и положим $L_{p,s}^r(G) = L_p(G) \bigcap L_s^r(G)$. Отметим, что $L_s^r(\mathbf{T}) \subset L_p(\mathbf{T})$ для любого $p \in [1, \infty]$.

Важную роль во многих вопросах анализа играют неравенства для норм промежуточных производных функций $x \in L_{p,s}^r(G)$ вида

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \leq K \|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_s^{1-\alpha}, \tag{1}$$

где $k, r \in \mathbf{Z}_+ = \mathbf{N} \bigcup \{0\}$, $k < r$, $\alpha \in (0, 1)$.

Для точного решения многих экстремальных задач анализа особое значение имеют неравенства (1) с неулучшаемыми константами

$$K = K(G) = K_{k,r}(G; q, p, s; \alpha) := \sup_{\substack{x \in L_{p,s}^r(G) \\ x^{(r)} \neq 0}} \frac{\left\|x^{(k)}\right\|_q}{\|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_s^{1-\alpha}}. \tag{2}$$

Исследования многих математиков были посвящены вычислению констант (2) при различных значениях параметров G, k, r, q, p, s, α. Одним из первых и наиболее ярких результатов в этом направлении является следующее неравенство А. Н. Колмогорова [1]: при всех k, $r \in \mathbf{N}$, $k < r$, для любой функции $x \in$ $\in L_{\infty,\infty}^r(\mathbf{R})$

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|x\|_\infty^{1-k/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{k/r},$$

где φ_r — r-й периодический интеграл, имеющий нулевое среднее значение на периоде, от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$. Поэтому за неравенствами вида (1) закрепилось название „неравенства типа Колмогорова". Обзоры известных результатов для $G = \mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{T}$ см., например, в [2 – 7].

Целью данной статьи является сравнение точных констант (2) для функций, заданных на всей вещественной оси и единичной окружности.

В п. 2 приведены известные условия существования неравенств типа (1) для функций классов $L_{p,s}^r(\mathbf{R})$ и $L_{p,s}^r(\mathbf{T})$ и описана их геометрическая интерпретация. В п. 3 приведено (теоремы 1 и 2) сравнение точных констант $K(\mathbf{R})$ и $K(\mathbf{T})$. П. 4 содержит обсуждение и некоторые приложения полученных результатов.

2. Условия существования и их геометрическая интерпретация. Известно [8], что при $G = \mathbf{R}$ неравенство (1) имеет место для всех $x \in L_{p,s}^r(\mathbf{R})$, если и только если

$$\frac{r-k}{p} + \frac{k}{s} \geq \frac{r}{q}, \tag{3}$$

и при этом

$$\alpha = \frac{r - k - s^{-1} + q^{-1}}{r - s^{-1} + p^{-1}}.$$

Общие условия существования неравенств (1) в периодическом случае установлены в [9], где доказано, что (1) справедливо для всех функций $x \in L_{p,s}^r(\mathbf{T})$, $1 \leq$ $\leq p$, $s \leq \infty$, r, $k \in \mathbf{N}$, $k < r$, если и только если

$$\alpha \le \alpha_{cr} := \min\left\{1-\frac{k}{r},\ \frac{r-k-s^{-1}+q^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}}\right\}. \tag{4}$$

Отметим, что для периодических функций наибольший интерес представляют неравенства (1) с $\alpha = \alpha_{cr}$.

При описании условий (3), (4) часто используется следующая удобная геометрическая интерпретация. На координатной плоскости по оси абсцисс откладываются величины, обратные параметрам метрик $1/q$, $1/p$, $1/s$, а по оси ординат — значения параметров k, r. При этом тот факт, что $x \in L^r_{p,s}(G)$, изображается парой точек $A_{p,0}$ с координатами $(1/p, 0)$ и $A_{s,r}$ с координатами $(1/s, r)$, расположенных в прямоугольнике $P = [0, 1] \times [0, r]$. Параметрам q и k, фигурирующим в левой части (1), соответствует точка $A_{q,k}$ с координатами $(1/q, k)$ в этом прямоугольнике. Вопрос о существовании неравенства типа (1) при заданном наборе параметров $k, r;\ q, p, s$ теперь может быть сформулирован так: при каком взаимном расположении точек $A_{q,k}$, $A_{p,0}$ и $A_{s,r}$ возможны неравенства типа (1) ?

В прямоугольнике P выделим два множества: 1) множество $\mathcal{K} = \mathcal{K}(p, s; r)$ — „колмогоровскую область", состоящую из точек, расположенных правее или на отрезке $[A_{p,0}, A_{s,r}]$, соединяющем точки $A_{p,0}$ и $A_{s,r}$; 2) множество $\Gamma = \Gamma(p, s; r)$ — „габушинскую область", состоящую из точек, расположенных левее или на отрезке $[A_{p,0}, A_{s,r}]$. Их пересечение будем называть „колмогоровским отрезком". Разбиение на эти множества аналитически описывается следующим образом. Пусть

$$\Delta = \Delta(q, p, s; k, r) = \frac{1}{q} - \left(1-\frac{k}{r}\right)\frac{1}{p} - \frac{k}{r}\frac{1}{s}.$$

Тогда $\Delta \ge 0$ в области $\mathcal{K}$, $\Delta = 0$ на отрезке $\mathcal{K} \cap \Gamma$, $\Delta \le 0$ в области Γ.

С каждой из троек точек $A_{q,k}$, $A_{p,0}$ и $A_{s,r}$ свяжем следующие числа:

$$\alpha_{\mathcal{K}} := 1 - \frac{k}{r}, \qquad \alpha_{\Gamma} := \frac{r-k-s^{-1}+q^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}}.$$

Тогда

$$\alpha_{cr} := \min\{\alpha_{\mathcal{K}}, \alpha_{\Gamma}\}.$$

Легко видеть, что $\alpha_{\mathcal{K}} < \alpha_{\Gamma}$ в области $\mathcal{K} - \Gamma$, $\alpha_{\mathcal{K}} > \alpha_{\Gamma}$ в области $\Gamma - \mathcal{K}$ и $\alpha_{\mathcal{K}} = \alpha_{\Gamma}$ на отрезке $\mathcal{K} \cap \Gamma$. Геометрически смысл числа α_{cr} следующий. Пусть $A_{q,k} \in \mathcal{K}$; сместимся от этой точки по горизонтали влево до встречи в точке $(1/q_{\mathcal{K}}, k)$ с отрезком $[A_{p,0}, A_{s,r}]$. Тогда $(\alpha_{cr}, 1-\alpha_{cr})$ являются барицентрическими координатами точки $(1/q_{\mathcal{K}}, k)$ относительно точек $A_{p,0}$ и $A_{s,r}$. Если же $A_{q,k} \in \Gamma$, то будем двигаться от нее к отрезку $[A_{p,0}, A_{s,r}]$ по прямой с угловым коэффициентом 1. Пусть $(1/q_{\Gamma}, y)$ — декартовы координаты точки пересечения. Тогда $(\alpha_{cr}, 1-\alpha_{cr})$ снова являются барицентрическими координатами точки $(1/q_{\Gamma}, y)$ относительно точек $A_{p,0}$ и $A_{s,r}$.

Сформулированное выше условие (3) теперь означает, что при заданных значениях $k, r;\ q, p, s$ неравенство (1) в случае $G = \mathbf{R}$ возможно, если и только если $(1/q, k) \in \Gamma$, и при этом показатель α в (1) необходимо равен α_{Γ}.

Для периодических функций неравенства типа (1) возможны при любых значениях параметров k, r, q, p, s, но показатель $\alpha_{cr} = \alpha_\Gamma$, если $(1/q, k) \in \Gamma$, и $\alpha_{cr} = \alpha_{\mathcal{K}}$, если $(1/q, k) \in \mathcal{K}$.

3. Сравнение констант $K(\mathbf{R})$ и $K(\mathbf{T})$ в области Γ для $\alpha = \alpha_{cr}$. Сравнение этих констант в тех случаях, когда известны их точные значения, позволяет предположить, что $K(\mathbf{R}) \le K(\mathbf{T})$ в области Γ и $K(\mathbf{R}) = K(\mathbf{T})$ на колмогоровском отрезке.

Докажем, что эти соотношения в действительности имеют место. Точнее, справедливы следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$; $1 \le q, p, s \le \infty$. *Тогда если* $A_{q,k} = (1/q, k) \in \Gamma = \Gamma(p, s; r)$, *то выполняется неравенство*

$$K(\mathbf{R}) \le K(\mathbf{T}), \tag{5}$$

где $K(\mathbf{R}) = K_{k,r}(\mathbf{R}; q, p, s; \alpha)$, $K(\mathbf{T}) = K_{k,r}(\mathbf{T}; q, p, s; \alpha)$ — *неулучшаемые константы в неравенствах* (1) *на оси и на окружности соответственно и*

$$\alpha = \alpha_{cr} = \frac{r - k - s^{-1} + q^{-1}}{r - s^{-1} + p^{-1}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$; $1 \le q, p, s \le \infty$. *Тогда если* $A_{q,k} = (1/q, k) \in \mathcal{K} \cap \Gamma = \mathcal{K}(p, s; r) \cap \Gamma(p, s; r)$, *то*

$$K_{k,r}(\mathbf{R}; q, p, s; 1 - k/r) = K_{k,r}(\mathbf{T}; q, p, s; 1 - k/r). \tag{6}$$

К настоящему времени вопрос о точных константах в неравенствах (1) для периодических функций изучен полнее, чем для функций, заданных на оси, что позволяет с помощью (6) получить некоторые новые результаты на оси в случае, когда точка $A_{q,k}$ расположена на колмогоровском отрезке. Отметим, что в общем случае, когда $A_{q,k} \in \Gamma$, равенство в (5) (впрочем, как и строгое неравенство) не гарантируется (соответствующие примеры см. в п. 4).

Перейдем к доказательству теорем. Отметим сразу, что случай $p = s = \infty$ (в этом случае и $q = \infty$) можно исключить, так как при этих значениях параметров равенство (6) следует из неравенства Колмогорова. Поэтому в дальнейшем будем полагать выполненным условие

$$\min\{p, s\} < \infty. \tag{7}$$

Для дальнейшего нам понадобятся следующие три леммы.

Лемма 1 (см., например, [10, с. 211]). *Существует последовательность четных функций* $\{\eta_l\}_{l \in \mathbf{N}}$ *со следующими специальными свойствами*:

1) $\forall l \in \mathbf{N} \quad \eta_l : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$;

2) $\eta_l(t) \in C^\infty(\mathbf{R})$;

3) $\eta_l(t) = 0 \quad \forall t \, (|t| > l + 1)$;

4) $0 \le \eta_l(t) \le 1 \quad \forall t \in \mathbf{R}$;

5) $\eta_l(t) = 1$, *если* $|t| \le l$;

6) $\forall l \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [l+1, l+2] \quad \eta_{l+1}(t) = \eta_l(t - 1)$.

Отметим, что для любого $i \in \mathbf{N}$ и для любого l $\operatorname{supp} \eta_l^{(l)} \subset \Delta_l := [-l-1, l+1]$.

Условимся в дальнейшем через $\|x\|_{p,\Delta_l}$ обозначать $\|x\|_{L_p(\Delta_l)}$.

Лемма 2 (см., например, [8, 11]). *При любых фиксированных* $r \in \mathbf{N}$, $q, p, s \in [1, \infty]$ *существуют константы* A *и* B, *не зависящие от* l *и* k, *такие, что для любого* $x \in L^r_{p,s}$ *при всех* $k = 0, 1, \ldots, r - 1$

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{q,\Delta_l} \leq A\|x\|_{p,\Delta_l} + B\left\|x^{(r)}\right\|_{s,\Delta_l}. \tag{8}$$

Лемма 3. *Пусть $q, p, s \in [1, \infty]$, $\min\{p, s\} < \infty$, $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, и значения параметров таковы, что*

$$A_{q,k} \in \Gamma(p, s, r).$$

Тогда для любой функции $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{R})$ найдется последовательность $\{y_l, l \in \mathbf{N}\}$ бесконечно дифференцируемых функций из $L^r_{p,s}(\mathbf{R})$ таких, что при $l \to \infty$

$$\|y_l\|_p \to \|x\|_p, \tag{9}$$

$$\left\|y_l^{(k)}\right\|_q \to \left\|x^{(k)}\right\|_q, \tag{10}$$

$$\left\|y_l^{(r)}\right\|_s \to \left\|x^{(r)}\right\|_s. \tag{11}$$

Доказательство. Поскольку $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{R})$ и $A_{q,k} \in \Gamma$, правые части (8) – (10) конечны. Положим $y_l = x\eta_l$, где η_l определены в лемме 1. Соотношение (9) очевидно; (10) и (11) будем доказывать одновременно (для этого будем допускать в (10) случай $k = r$, полагая при этом $q = s$). Имеем

$$y_l^{(k)} = x^{(k)}\eta_l + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i x^{(i)} \eta_l^{(k-i)}. \tag{12}$$

Ясно, что при $l \to \infty$

$$\left\|x^{(k)}\eta_l\right\|_q \to \left\|x^{(k)}\right\|_q. \tag{13}$$

Кроме того, для любого i, $i < k$,

$$\operatorname{supp}\left(x^{(i)}\eta_l^{(k-i)}\right) \subset \operatorname{supp}\left(\eta_l^{(k-i)}\right) \subset \Delta_l := [-l-1, l+1], \tag{14}$$

и найдется $C > 0$ такое, что для всех $i \leq r$

$$\left\|\eta_l^{(i)}\right\|_\infty \leq C. \tag{15}$$

Пусть сначала $s < \infty$ или $s = \infty$, но $i < r - 1$. Ввиду (12), (13) для доказательства (10) и (11) достаточно установить, что при $l \to \infty$

$$\left\|\sum_{i=0}^{k-1} C_k^i x^{(i)} \eta_l^{(k-i)}\right\|_q \to 0. \tag{16}$$

Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что при любом $i = 0, 1, \ldots, k-1$

$$\left\|x^{(i)}\eta_l^{(k-i)}\right\|_q \to 0, \quad l \to \infty. \tag{17}$$

Ввиду (15) имеем

$$\left\|x^{(i)}\eta_l^{(k-i)}\right\|_q \leq C\left\|x^{(i)}\right\|_{q,\Delta_l}.$$

Выберем $p_i \in (q, \infty)$ так, чтобы $(1/p_i, i) \in \Gamma$. Из (3) следует, что $x^{(i)} \in L_{p_i}(\mathbf{R})$. Применяя неравенство (8) в виде

$$\left\| x^{(i)} \right\|_{q,\Delta_l} \leq A \left\| x^{(i)} \right\|_{p_l,\Delta_l} + B \left\| x^{(r)} \right\|_{s,\Delta_l}$$

и учитывая, что при $l \to \infty$ (в случае, если $s < \infty$)

$$\left\| x^{(i)} \right\|_{p_l,\Delta_l} \to 0 \quad \text{и} \quad \left\| x^{(r)} \right\|_{s,\Delta_l} \to 0,$$

получаем (17). В случае $s = \infty$ и $i < r$ положим $s_1 = rp/(r-1)$ и применим неравенство (8) в виде

$$\left\| x^{(i)} \right\|_{q,\Delta_l} \leq A \left\| x^{(i)} \right\|_{p_l,\Delta_l} + B \left\| x^{(r-1)} \right\|_{s_1,\Delta_l}$$

(p_l такое, как в предыдущем случае). Снова учитывая, что при $l \to \infty$

$$\left\| x^{(i)} \right\|_{p_l,\Delta_l} \to 0 \quad \text{и} \quad \left\| x^{(r-1)} \right\|_{s_1,\Delta_l} \to 0,$$

получаем (17). Итак, в случае $s < \infty$ при всех i и в случае $s = \infty$ при $i < r-1$ все доказано. Осталось рассмотреть случай, когда $s = \infty$ и $i = r-1$. Здесь мы будем пользоваться тем легко проверяемым фактом, что если $x \in L^1_{p,\infty}$, $p < \infty$, то

$$\| x \|_{\infty,\Delta_l} \to 0 \quad \text{при} \quad l \to \infty. \tag{18}$$

Надо доказать, что

$$\left\| x^{(r-1)} \eta_l' \right\|_q \to 0, \qquad l \to \infty. \tag{19}$$

Применяя (15) и учитывая тот факт, что $x^{(r-1)} \in L^1_{p_1,\infty}(\mathbf{R})$, где $p_1 = rp/(r-1)$, получаем

$$\left\| x^{(r-1)} \eta' \right\|_{q,\Delta_l} \leq C \left\| x^{(r-1)} \right\|_{q,\Delta_l} \leq 2^{1/q} C \left\| x^{(r-1)} \right\|_{\infty,\Delta_l}.$$

Отсюда с учетом (18) выводим (19). Лемма 3 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Существенным обстоятельством является тот факт, что константа $K(\mathbf{T})$ в неравенстве для периодических функций с периодом длины 2π в случае, когда $A_{q,k} \in \Gamma$ и $\alpha = \alpha_{cr}$, на самом деле не зависит от длины периода. Действительно, обозначим через $l\mathbf{T}$, $l > 0$, отрезок $[0, 2\pi l]$ с отождествленными концами. Для функции $x \in L^r_{p,s}(l\mathbf{T})$ положим $y(t) = x(lt)$, $t \in \mathbf{T}$. Ясно, что $y \in L^r_{p,s}(\mathbf{T})$, и

$$K(\mathbf{T}) = \sup_{y \in L^r_{p,s}(\mathbf{T})} \frac{\left\| y^{(k)} \right\|_{L_q(\mathbf{T})}}{\| y \|^{\alpha}_{L_p(\mathbf{T})} \left\| y^{(r)} \right\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbf{T})}} =$$

$$= \sup_{x \in L^r_{p,s}(l\mathbf{T})} \frac{l^{k-1/q} \left\| x^{(k)} \right\|_{L_q(l\mathbf{T})}}{\left(l^{-1/p} \| x \|_{L_p(l\mathbf{T})} \right)^{\alpha} \left(l^{r-1/s} \left\| x^{(r)} \right\|_{L_s(l\mathbf{T})} \right)^{1-\alpha}} =$$

$$= l^{k-1/q+\alpha/p-(r-1/s)(1-\alpha)} K(l\mathbf{T}).$$

Осталось заметить, что при $\alpha = \alpha_{cr}$ справедливо равенство

$$k - \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{p} - \left(r - \frac{1}{s}\right)(1-\alpha) = 0.$$

Перейдем к доказательству неравенства (5). Выберем произвольно $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{R})$ и $\varepsilon > 0$. Использовав лемму 3, найдем финитную функцию $y \in L^r_{p,s}(\mathbf{R})$ такую, что

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{R})} \le (1+\varepsilon)\|y^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{R})}, \quad \|x\|_{L_p(\mathbf{R})} \ge \frac{1}{1+\varepsilon}\|y\|_{L_p(\mathbf{R})},$$

$$\|x^{(r)}\|_{L_s(\mathbf{R})} \ge \frac{1}{1+\varepsilon}\|y^{(r)}\|_{L_s(\mathbf{R})}.$$

Выберем положительное число l, большее длины носителя функции y, и положим

$$\tilde{y}(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} y(t + 2\pi l\nu).$$

Ясно, что $\tilde{y} \in L^r_{p,s}(l\mathbf{T})$, и при $\alpha = \alpha_{cr}$ имеем

$$\frac{\|x^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{R})}}{\|x\|^{\alpha}_{L_p(\mathbf{R})}\|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbf{R})}} \le \frac{(1+\varepsilon)\|y^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{R})}}{\left((1+\varepsilon)^{-1}\|y\|_{L_p(\mathbf{R})}\right)^{\alpha}\left((1+\varepsilon)^{-1}\|y^{(r)}\|_{L_s(\mathbf{R})}\right)^{1-\alpha}} =$$

$$= (1+\varepsilon)^2 \frac{\|\tilde{y}^{(k)}\|_{L_q(l\mathbf{T})}}{\|\tilde{y}\|^{\alpha}_{L_p(l\mathbf{T})}\|\tilde{y}^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_s(l\mathbf{T})}} \le (1+\varepsilon)^2 K(l\mathbf{T}) = (1+\varepsilon)^2 K(\mathbf{T}).$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует (5). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы **2.** Пусть $\mathbf{T}_1$ — отрезок $[0, 1]$ с отождествленными концами. Возьмем произвольно $x \in L^r_{p,s}(\mathbf{T}_1)$. Предположим, что q таково, что $A_{q,k} = (1/q, k) \in \mathcal{K} \cap \Gamma$ и, следовательно, в неравенстве (1) $\alpha = \alpha_{cr} = 1 - k/r$ и тогда $1/q - \alpha/p - (1-\alpha)/s = 0$. Положим

$$y_l(t) = x(t)\eta_l(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad l \in \mathbf{N}.$$

Учитывая свойства функции η_l (см. лемму 1), имеем

$$\|y_l^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{R})} \ge (2l)^{1/q}\|x^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{T}_1)},$$

$$\|y_l\|_{L_p(\mathbf{R})} \le (2l+2)^{1/p}\|x\|_{L_p(\mathbf{T}_1)},$$

$$\|y_l^{(r)}\|_{L_s(\mathbf{R})} = \left\|x^{(r)}\eta_l + \sum_{i=1}^{r} C_r^i x^{(r-i)}\eta_l^{(i)}\right\|_{L_s(\mathbf{R})} \le$$

$$\le \|x^{(r)}\eta_l\|_{L_s(\mathbf{R})} + \sum_{i=1}^{r} C_r^i \|x^{(r-i)}\eta_l^{(i)}\|_{L_s(\mathbf{R})} \le$$

$$\le (2l+2)^{1/s}\|x^{(r)}\|_{L_s(\mathbf{T}_1)} + 2M\sum_{i=1}^{r} C_r^i \|x^{(r-i)}\|_{L_s(\mathbf{T}_1)},$$

где $M = \max_{1\le i\le r}\left\|\eta_l^{(i)}\right\|_\infty$ не зависит от l. Здесь при оценке $\left\|x^{(r-i)}\eta_l^{(i)}\right\|_{L_s(\mathbf{R})}$ мы использовали тот факт, что $\eta_l^{(i)}\neq 0$ только на двух интервалах длины 1.

Из полученных оценок следует, что при любом $l\in\mathbf{N}$

$$K(\mathbf{R}) \ge \frac{\left\|y_l^{(k)}\right\|_{L_q(\mathbf{R})}}{\|y_l\|_{L_p(\mathbf{R})}^{\alpha}\left\|y_l^{(r)}\right\|_{L_s(\mathbf{R})}^{1-\alpha}} \ge$$

$$\ge \frac{(2l)^{1/q}\left\|x^{(r)}\right\|_{L_q(\mathbf{T}_1)}}{\left((2l+2)^{1/p}\|x\|_{L_p(\mathbf{T}_1)}\right)^{\alpha}\left((2l+2)^{1/s}\left\|x^{(r)}\right\|_{L_s(\mathbf{T}_1)}+2M\sum_{i=1}^{r}C_r^i\left\|x^{(r-i)}\right\|_{L_s(\mathbf{T}_1)}\right)^{1-\alpha}} =:$$

$$=: F(l).$$

Поскольку при $\alpha=\alpha_{cr}=1-k/r$ будет $1/q-\alpha/p-(1-\alpha)/s=0$, и, следовательно,

$$\lim_{l\to\infty}\frac{(2l)^{1/q}}{(2l+2)^{\alpha/p}\,(2l+2)^{(1-\alpha)/s}} = 1,$$

при $l\to\infty$ получаем

$$F(l) \to \frac{\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q(\mathbf{T}_1)}}{\|x\|_{L_p(\mathbf{T}_1)}^{\alpha}\left\|x^{(r)}\right\|_{L_s(\mathbf{T}_1)}^{1-\alpha}}.$$

Отсюда следует $K(\mathbf{R})\ge K(\mathbf{T}_1)=K(\mathbf{T})$. Теорема 2 доказана.

4. Обсуждение и приложение полученных результатов. В связи с неравенством (5) приведем примеры, показывающие, что в области Γ для констант $K(\mathbf{T})$ и $K(\mathbf{R})$ возможны как равенство

$$K(\mathbf{T}) = K(\mathbf{R}), \tag{20}$$

так и строгое неравенство

$$K(\mathbf{T}) > K(\mathbf{R}). \tag{21}$$

Рассмотрим случай $q=\infty$, $p=s=2$. Л. В. Тайков [12] доказал, что

$$K_{k,r}(\mathbf{R};\infty,2,2) = \pi^{-1/2}\beta_{r,k}A_{r,k}, \tag{22}$$

где

$$\beta_{r,k} = \left(\frac{2r}{2k+1}\right)^{(2k+1)/4r}\left(\frac{2r}{2r-2k-1}\right)^{(2r-2k-1)/4r}$$

$$A_{r,k}^2 = \int_0^\infty \frac{x^{2k}}{1+x^{2r}}dx = \frac{\pi}{2}\left(r\sin\frac{2k+1}{2r}\pi\right)^{-1}. \tag{23}$$

В работе А. Ю. Шадрина [13] доказано, что

$$K_{k,r}(\mathbf{T};\infty,2,2) = \pi^{-1/2}\beta_{r,k}\sup_{t>0}A_{r,k}(t), \tag{24}$$

где

$$A_{r,k}^2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2k+1} n^{2k}}{1+t^{2r} n^{2r}}$$

— „интегральная сумма" для $A_{r,k}^2$ (см. (23)), т. е. $A_{r,k}^2 = \lim_{t\to 0} A_{r,k}^2(t)$.

Приведем простые оценки, показывающие, что при некоторых значениях параметров k, r

$$\sup_{t>0} A_{r,k}(t) > \lim_{t\to 0} A_{r,k}(t). \tag{25}$$

Пусть $r \ge 7$, $2 \le k \le (r-1)/2$. Поскольку $\sin x \ge 2x/\pi$ при $x \in (0, \pi/2]$, то

$$A_{r,k}^2 = \frac{\pi}{2r}\left(\sin\frac{2k+1}{2r}\pi\right)^{-1} < \frac{\pi}{2(2k+1)}.$$

С другой стороны,

$$\sup_{t>0} A_{r,k}^2(t) \ge A_{r,k}^2(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2k}}{1+n^{2r}} > \frac{1}{2},$$

и при сделанных предположениях $\frac{\pi}{2(2k+1)} < \frac{1}{2}$, т. е. выполнено (25). Теперь из (22) – (25) следует (21).

Рассмотрим другую ситуацию, в которой будет выполнено (20).

В работе В. И. Арестова [14], в частности, доказано, что при любом $s \in \in (1, \infty)$

$$K_{1,2}(\mathbf{R}; \infty, \infty, s; \alpha) = 2^{(s-1)/(2s-1)} \left(\frac{2s-1}{2s}\right)^{s/(2s-1)}, \tag{26}$$

где $\alpha = \alpha_{cr} = (1-1/s)/(2-1/s)$. В [15] доказано точное неравенство

$$\|x'\|_{L_\infty(\mathbf{T})} \le 2^{(1-s')/(1+s')} \left(\frac{s'+1}{s'}\right)^{s'/(s'+1)} E_0(x)_{L_\infty(\mathbf{T})}^{1/(s'+1)} E_0(x'')_{L_s(\mathbf{T})}^{s'/(s'+1)}, \tag{27}$$

где $s \in (1, \infty)$, $s' = s(s-1)^{-1}$, $E_0(x)_{L_\infty(\mathbf{T})}$ — наилучшее приближение функции x константами.

Из (26) и (27) следует

$$K_{1,2}(\mathbf{T}; \infty, \infty, s; \alpha) \le 2^{(1-s')/(1+s')} \left(\frac{s'+1}{s'}\right)^{s'/(s'+1)} = K_{1,2}(\mathbf{R}; \infty, \infty, s; \alpha),$$

и, значит, с учетом теоремы 1 получаем для этих значений параметров равенство (20).

Приведенный пример допускает обобщение, которое мы сформулируем в виде следующего утверждения.

Утверждение. *Пусть* $r = 2$, $k = 1$, $p = \infty$, $s \in [1, \infty)$, $q \ge 2s$, $\alpha = \alpha_{cr} = (1 + 1/q - 1/s)/(2 - 1/s)$. *Тогда*

$$K_{1,2}(\mathbf{R}; q, \infty, s; \alpha) = K_{1,2}(\mathbf{T}; q, \infty, s; \alpha).$$

Доказательство. Ясно, что при указанных значениях параметров $A_{q,k} = (1/q, k) \in \Gamma$. Поэтому в силу теоремы 1

$$K_{1,2}(\mathbf{R}; q, \infty, s; \alpha) \le K_{1,2}(\mathbf{T}; q, \infty, s; \alpha),$$

и для доказательства утверждения достаточно установить неравенство противоположного смысла. Для этого зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $x \in L_s^2(\mathbf{T})$ так, чтобы

$$\frac{\|x'\|_{L_q(\mathbf{T})}}{\|x\|_{L_\infty(\mathbf{T})}^{\alpha}\|x''\|_{L_s(\mathbf{T})}^{1-\alpha}} > (1-\varepsilon)K_{1,2}(\mathbf{T}; q, \infty, s; \alpha).$$

Без ограничения общности можно считать, что $\max_t x(t) = x(\pi)$. Рассмотрим функцию

$$\tilde{x}(t) := \begin{cases} x(t), & \text{если} \quad |t| \le \pi; \\ x(\pi), & \text{если} \quad |t| > \pi. \end{cases}$$

Ясно, что $\tilde{x} \in L_{\infty,s}^2(\mathbf{R})$, причем $\|\tilde{x}'\|_{L_q(\mathbf{R})} = \|x'\|_{L_q(\mathbf{T})}$, $\|\tilde{x}\|_{L_\infty(\mathbf{R})} = \|x\|_{L_\infty(\mathbf{T})}$, $\|\tilde{x}''\|_{L_s(\mathbf{R})} = \|x''\|_{L_s(\mathbf{T})}$. Таким образом,

$$K_{1,2}(\mathbf{R}; q, \infty, s; \alpha) \ge \frac{\|\tilde{x}'\|_{L_q(\mathbf{R})}}{\|\tilde{x}\|_{L_\infty(\mathbf{R})}^{\alpha}\|\tilde{x}''\|_{L_s(\mathbf{R})}^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{\|x'\|_{L_q(\mathbf{T})}}{\|x\|_{L_\infty(\mathbf{T})}^{\alpha}\|x''\|_{L_s(\mathbf{T})}^{1-\alpha}} > (1-\varepsilon)K_{1,2}(\mathbf{T}; q, \infty, s; \alpha).$$

Ввиду произвольности ε отсюда получаем $K_{1,2}(\mathbf{R}; q, \infty, s; \alpha) \ge K_{1,2}(\mathbf{T}; q, \infty, s; \alpha)$. Тем самым утверждение доказано.

Как было отмечено выше, задача о точных неравенствах типа Колмогорова для периодических функций изучена полнее, чем для непериодических функций, заданных на всей числовой оси. Одной из причин этого являются трудности, возникающие при построении экстремалей, удовлетворяющих условиям суммируемости в некоторой степени на всей оси. В заключение статьи приведем два новых неравенства для непериодических функций, заданных на $\mathbf{R}$, которые устанавливаются с помощью теоремы 2 и известных неравенств для периодических функций.

В работе авторов [16] отмечено, что если $r = 4$ и $k = 3$ или $r = 6$ и $k = 4, 5$, то при всех $q \in [1, \infty]$ для функций $x \in L_{1,\infty}^r(\mathbf{T})$ справедливо неравенство

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(\mathbf{T})} \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{L_q(\mathbf{T})}}{\|\varphi_r\|_{L_1(\mathbf{T})}^{\alpha}} \|x\|_{L_1(\mathbf{T})}^{\alpha} \|x^{(r)}\|_{L_\infty(\mathbf{T})}^{1-\alpha}, \tag{28}$$

где

$$\alpha = \alpha_{cr} = \min\left\{1 - \frac{k}{r}, \frac{r - k + q^{-1}}{r+1}\right\}.$$

Заметим, что если в (28) положить $q = q_k := r/(r-k)$, то соответствующая точка $A_{q_k,k}$ будет принадлежать колмогоровскому отрезку. Сопоставляя неравенство (28) и теорему 2, устанавливаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $r = 4$ *и* $k = 3$ *или* $r = 6$ *и* $k = 4, 5$. *Пусть также* $q_k = r/(r-k)$. *Тогда для любой функции* $x \in L_{1,\infty}^r(\mathbf{R})$ *выполняется точное неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_{q_k}(\mathbf{R})} \le \frac{\left\|\varphi_{r-k}\right\|_{L_{q_k}(\mathbf{T})}}{\left\|\varphi_r\right\|_{L_1(\mathbf{T})}^{1-k/r}} \left\|x\right\|_{L_{q_k}(\mathbf{R})}^{1-k/r} \left\|x^{(r)}\right\|_{L_\infty(\mathbf{R})}^{k/r}.$$

Еще одним результатом работы [16] является следующее точное неравенство для функций $x \in L_{\infty,1}^4(\mathbf{T})$:

$$\left\|x'''\right\|_{L_{4/3}(\mathbf{T})} \le \frac{\left\|g_1\right\|_{L_{4/3}(\mathbf{T})}}{\left\|g_4\right\|_{L_\infty(\mathbf{T})}^{1/4}} \left\|x\right\|_{L_\infty(\mathbf{T})}^{1/4} \left\|x^{(4)}\right\|_{L_1(\mathbf{T})}^{3/4},$$

где $g_k := \varphi_{k-1}/4$. С помощью этого неравенства и теоремы 2 заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Для любой функции* $x \in L_{\infty,1}^4(\mathbf{R})$ *выполняется неравенство*

$$\left\|x'''\right\|_{L_{4/3}(\mathbf{R})} \le \frac{\left\|g_1\right\|_{L_{4/3}(\mathbf{T})}}{\left\|g_4\right\|_{L_\infty(\mathbf{T})}^{1/4}} \left\|x\right\|_{L_\infty(\mathbf{R})}^{1/4} \left\|x^{(4)}\right\|_{L_1(\mathbf{R})}^{3/4}.$$

1. *Колмогоров А. Н.* Избранные труды. Математика, механика. – М.: Наука, 1985. – 470 с.
2. *Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г. Г.* Неравенства для производных // А. Н. Колмогоров. Избранные труды. Математика и механика. – М.: Наука, 1985. – 472 с.
3. *Арестов В. В., Габушин В. Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 44 – 66.
4. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. – 1996. – **51**, № 6. – С. 88 – 124.
5. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities of Kolmogorov type and some their applications in approximation theory // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. II, Suppl. – 1998. – **52**. – P. 223 – 237.
6. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* On the exact inequalities of Kolmogorov type and some of their applications // New Approaches in Nonlinear Analysis. – Palm Harbor (USA): Hadronic Press, 1999. – P. 9 – 50.
7. *Бабенко В. Ф.* Исследования днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 1. – С. 9 – 29.
8. *Габушин В. Н.* Неравенства для норм функции и ее производных в метриках L_p // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 3. – С. 291 – 298.
9. *Клоц Б. Е.* Приближение дифференцируемых функций функциями большей гладкости // Там же. – 1977. – **21**, № 1. – С. 21 – 32.
10. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 267 с.
11. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Об аддитивных неравенствах для промежуточных производных функций, заданных на конечном интервале // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 5. – С. 619 – 628.
12. *Тайков Л. В.* Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования // Мат. заметки. – 1967. – **4**, № 2. – С. 223 – 238.
13. *Шадрин А. Ю.* Неравенства типа Колмогорова и оценки сплайн-интерполяции для периодических классов W_2^m // Там же. – 1990. – **48**, № 4. – С. 132 – 139.
14. *Арестов В. В.* О точных неравенствах между нормами функций и их производных // Acta. Sci. Math. – 1972. – **33**, № 3 – 4.
15. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Некоторые точные неравенства типа Колмогорова для периодических функций // Ряди Фур'є: Теорія і застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 1998. – **20**. – С. 30 – 42.
16. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О точных неравенствах типа Колмогорова в случае малых гладкостей // Допов. НАН України. – 1998. – № 6. – С. 11 – 15.

Получено 11.12.2001