УДК 517.27

И. С. Белов (Нац. техн. ун-т „ХПИ")

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ – ЛИТТЛВУДА – ПОЙА

We obtain a generalization of the Hardy – Littlewood – Polya inequality for numerical sets to some sets of vectors in a plane.

Одержано узагальнення нерівності Харді – Літтлвуда – Пойа для числових множин на деякі множини векторів на площині.

Пусть A, B — два семейства n вещественных чисел, (a_i), (b_i) — последовательности элементов A и B, упорядоченные по возрастанию (убыванию), π — произвольная перестановка индексов $[1, 2, \ldots, n]$. Известно следующее неравенство Харди – Литтлвуда – Пойа (ХЛП) [1, с. 314] о перестановках:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\pi(i)} \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \tag{1}$$

т. е. максимум выражения $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\pi(i)}$ достигается, когда последовательности (a) и (b) подобно упорядочены, а минимум — когда они противоположно упорядочены.

Простым следствием неравенства ХЛП является следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть X, Y — два семейства n векторов в евклидовом пространстве, причем векторы из X лежат на некоторой прямой. Тогда существуют упорядочения (x_i), (y_i) элементов X и Y (упорядочение X согласовано с порядком на прямой) такие, что для любой перестановки π*

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_{n+1-i}) \le \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_{\pi(i)}) \le \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i). \tag{1a}$$

В [2] (на языке задачи о назначении) доказано, что (1a) справедливо для семейств векторов X и Y, линейно упорядоченных относительно конуса неотрицательных векторов.

Если $Y = X$, то из соотношения

$$2\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot x_{\pi(i)}) \le \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot x_i) + \sum_{i=1}^{n} (x_{\pi(i)} \cdot x_{\pi(i)}), \qquad \pi \in S_n,$$

следует, что для любого семейства векторов X

$$\max \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot x_{\pi(i)}), \qquad \pi \in S_n, \tag{2}$$

достигается на единичной перестановке $\pi_{\max} = e$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ — семейство $2n$ векторов евклидо-*

вой плоскости, лежащих на окружности. Тогда найдется перестановка $\pi_{\min}$, *решающая задачу*

$$\min \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot x_{\pi(i)}), \qquad \pi \in S_n, \tag{3}$$

такая, что $\pi_{\min}^2 = e$.

Для векторов, лежащих на прямой, это, конечно, вытекает из (1а).

Пусть X, Y — два семейства n векторов в евклидовом пространстве. Поскольку

$$-2\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_{\pi(i)}) = \sum_{i=1}^{n} \left\| x_i - y_{\pi(i)} \right\|^2 - \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot x_i) - \sum_{i=1}^{n} (y_{\pi(i)} \cdot y_{\pi(i)})$$

и оба вычитаемых справа не зависят от π, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Задачи*

$$\min \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_{\pi(i)}) \quad \text{и} \quad \max \sum_{i=1}^{n} \left\| x_i - y_{\pi(i)} \right\|^2, \quad \pi \in S_n,$$

эквивалентны.

Далее будем решать задачу

$$\max \sum_{i=1}^{n} \left\| x_i - y_{\pi(i)} \right\|^2, \quad \pi \in S_n. \tag{4}$$

Пусть $Y = X$, $\pi_{\max} = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \ldots \cdot \pi_l$ — разложение максимальной перестановки в произведение циклов, π_1 — цикл четной длины, $x_1, x_2, \ldots, x_{2k}$ — входящие в него векторы, $x_{i+1} = x_{\pi(i)}$. Сумму $\sum_{i=1}^{2k} \| x_i - x_{i+1} \|^2$, соответствующую этому циклу, разобьем на нечетную и четную части:

$$\sum_{i=1}^{2k} \| x_i - x_{i+1} \|^2 = \begin{bmatrix} \| x_1 - x_2 \|^2 + \| x_3 - x_4 \|^2 + \ldots + \| x_{2k-1} - x_{2k} \|^2 + \\ + \| x_2 - x_3 \|^2 + \| x_4 - x_5 \|^2 + \ldots + \| x_{2k} - x_1 \|^2 \end{bmatrix}.$$

Если, например, нечетная часть не меньше четной, то, заменив цикл π_1 произведением k циклов длины 2: $(1 \leftrightarrow 2)(3 \leftrightarrow 4) \ldots (2k-1 \leftrightarrow 2k)$, мы не уменьшим значения функционала. Следовательно, справедлива такая лемма.

Лемма 2. *Если* $X = Y$, *циклы четной длины, входящие в разложение* $\pi_{\max}$, *имеют порядок* 2.

Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что произведение двух циклов нечетной длины σ и ρ можно, не уменьшая функционал, заменить циклом четной длины.

Пусть $x'_1, \ldots, x'_{2k+1}, x''_1, \ldots, x'''_{2l+1}$ — соответствующие им векторы:

$$\sigma: \; x'_1 \to x'_2 \to \ldots \to x'_{2k+1} \to x'_1,$$

$$\rho: \; x'''_1 \to x'''_2 \to \ldots \to x''_{2l+1} \to x''_1.$$

Считая, что все они различны, сопоставим каждой хорде (x_p, x_{p+1}) меньшую из дуг, которые она стягивает, и обозначим ее γ_p.

Лемма 3. *Если некоторые дуги* γ'_p *и* γ''_q *не пересекаются, существует цикл четной длины* τ *на множестве векторов* $(x') \cup (x'')$, *имеющий не меньшее значение функционала* $\sum_{i=1}^{n} \left\| x_i - x_{\tau(i)} \right\|^2$.

Действительно, пусть $\gamma'_p = AB$, $\gamma''_q = CD$. Легко проверить, что неравенство

$$AC^2 + BD^2 \geq AB^2 + CD^2$$

(рис. 1) эквивалентно условию $\angle AEB \leq \pi/2$, которое выполнено для вневписанного угла $\angle AEB$, так как $\cup AB \leq \pi$.

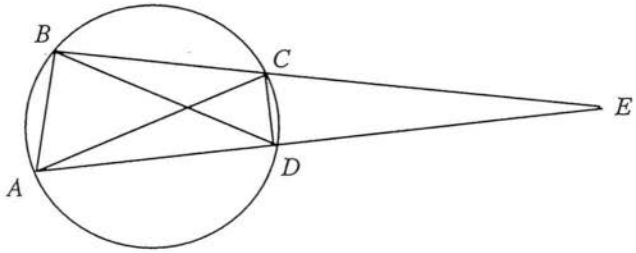

Рис. 1

Поэтому цикл τ, определенный условиями

$$\tau(A) = C, \quad \tau(M') = \sigma(M') \quad (M' \in \sigma, M' \neq A),$$
$$\tau(D) = B, \quad \tau(M'') = \rho(M'') \quad (M'' \in \rho, M'' \neq D),$$

имеет не меньшее значение функционала (4), чем произведение $\sigma \cdot \rho$. Осталось доказать, что среди дуг γ'_p, γ''_q найдется пара непересекающихся. Для этого понадобится следующая лемма.

Лемма 4. *Если дуга γ'' пересекается со всеми дугами γ' цикла σ нечетной длины, то она либо содержит некоторую дугу γ' цикла σ, либо содержится в ней.*

Пусть $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_{2k+1}$ — дуги цикла σ. Предположим противное. Тогда γ'' содержит в точности одну конечную вершину каждой дуги γ'_i. Помечая входящую в γ'' вершину плюсом, а не входящую минусом и обходя цикл σ, получаем в силу его нечетности, что начальная вершина имеет метки + и –, что невозможно.

Лемма 5. *Среди дуг циклов σ и ρ найдутся непересекающиеся γ' и γ''.*

Доказательство проведем индукцией по общей длине $|\sigma| + |\rho|$. Пусть $AB \in \sigma$ — наибольшая из дуг циклов σ и ρ, AC и BD — соседние с ней дуги цикла σ. Пусть вначале $AC \bigcup BD \subset AB$. Заменив участок $CABD$ цикла σ хордой CD, получим нечетный цикл σ' меньшей длины. По предположению индукции найдется дуга γ' цикла σ', не пересекающаяся с дугой γ'' цикла ρ. Если $\gamma' \neq CD$, то лемма доказана. Если же $\gamma' = CD$, то предположив, что

$$\gamma'' \bigcap AC \neq \varnothing \quad \text{и} \quad \gamma'' \bigcap BD \neq \varnothing,$$

в обоих случаях (рис. 2, *а*) и (рис. 2, *б*) получаем $\gamma'' \bigcap CD \neq \varnothing$, что невозможно по построению .

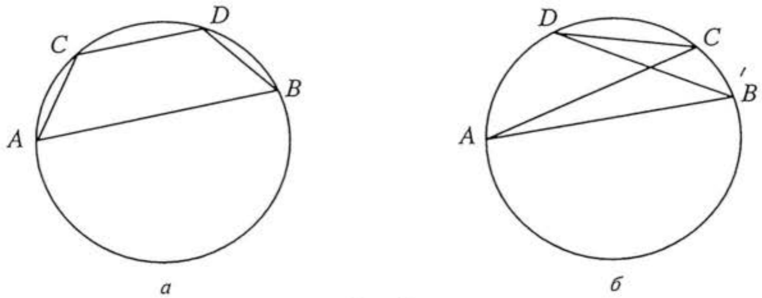

Рис. 2

Пусть теперь, например, $AC \not\subset AB$. Поскольку AB — наибольшая из дуг, $AC \cap AB = \varnothing$. Если AB пересекается со всеми дугами цикла ρ, то согласно лемме 4 она содержит некоторую дугу γ_0'' этого цикла. Тогда $\gamma_0'' \cap AC = \varnothing$. Лемма 5 и теорема 1 доказаны.

Вместо евклидовой плоскости со скалярным произведением $(x, y) = x_1x_2 + y_1y_2$ рассмотрим псевдоевклидову плоскость со скалярным произведением $[x, y] = x_1x_2 - y_1y_2$. Для нее роль окружности $x^2 + y^2 = 1$ играет равносторонняя гипербола $x^2 - y^2 = 1$. Пусть $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ — семейство $2n$ векторов, лежащих на какой-нибудь ветви этой гиперболы. Поскольку $[x_i, x_j] \geq 1$, решением задачи (3) на минимум будет единичная перестановка, $\pi_{\min} = e$, и остается вопрос о задаче (2) на максимум. Лемма 1 справедлива, и мы приходим к задаче $\min \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - x_{\pi(i)} \right|^2$. Лемма 2 также справедлива, что сводит дело к рассмотрению нечетных циклов. Несложные вычисления с гиперболическими функциями показывают, что неравенство из леммы 3 в нужную сторону сохраняется для точек, лежащих на одной ветви гиперболы. Доказательство лемм 4 и 5 полностью сохраняется, что приводит к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ — семейство $2n$ векторов плоскости, лежащих на ветви гиперболы. Тогда найдется перестановка $\pi_{\max}$, решающая задачу*

$$\max \sum_{i=1}^{n} \left[x_i \cdot x_{\pi(i)} \right], \quad \pi \in S_n,$$

такая, что $\pi_{\max}^2 = e$.

***Замечание* 1.** Утверждения теорем 1 и 2 не справедливы для произвольного семейства X векторов плоскости. Примером является X, состоящее из вершин и центра правильного треугольника. Анализ примеров позволяет сделать следующее предположение.

Предположение 1. *Утверждения теорем* 1, 2 *справедливы для семейства векторов X, являющихся вершинами выпуклого многоугольника (выпукло-независимого X).*

***Замечание* 2.** Контрпример из замечания 1 легко превратить в выпуклый в трехмерном пространстве.

***Замечание* 3.** В несимметричном случае $(Y \neq X)$ теоремы 1 и 2 не справедливы даже для регулярно расположенных семейств X и Y. Это связано с тем, что неверна лемма 2.

Предположение 2. *Для выпукло-независимых семейств векторов X и Y на плоскости перестановка $\pi_{\min/\max}$ разлагается в произведение циклов четной длины.*

1. *Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Пойа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1946. – 456 с.
2. *Eiselt H. A., Gerchack Y.* Solution structures and sensitivity of special assignment problems // Comput. and Oper. Res. – 1984. – **11**, № 4. – P. 397–399.

Получено 19.11.2001