УДК 517.95 + 511.2

Б. Й. Пташник, М. М. Симотюк
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА З КРАТНИМИ ВУЗЛАМИ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

We establish conditions for the existence and uniqueness of a solution of a problem with multipoint conditions with respect to a selected variable t (in the case of multiple nodes) and periodic conditions with respect to $x_1, \ldots, x_p$ for an anisotropic partial differential equation with constant complex coefficients. We prove metric theorems on lower bounds of small denominators appearing in the solution of the problem.

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі з багатоточковими умовами за виділеною змінною t (у випадку кратних вузлів) та умовами періодичності по $x_1, \ldots, x_p$ для неізотропного рівняння з частинними похідними зі сталими комплексними коефіцієнтами. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язку задачі.

Вивчення задач із багатоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними почалося недавно. Загалом, такі задачі є умовно коректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників. У випадку простих вузлів багатоточкові задачі вивчались багатьма авторами (див. [1–12] та наведену в них бібліографію). Багатоточкові задачі з кратними вузлами для лінійного однорідного гіперболічного рівняння у випадку однієї просторової змінної досліджено у статті [9], для одного класу диференціально-операторних рівнянь — у статті [13], а для деяких лінійних псевдодиференціальних рівнянь — у статті [14]. У даній роботі результати праці [9] узагальнено на випадок безтипного диференціального рівняння, неізотропного стосовно диференціювання по t і по $x_1, \ldots, x_p$.

1. Будемо використовувати такі позначення: $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$; $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$; $(k, x) = k_1x_1 + \ldots + k_px_p$; C_n^m — кількість комбінацій з n елементів по m; $\mu(A, \mathbb{R}^n)$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ множини $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mu(B, \mathbb{C}^n)$ — міра Лебега в $\mathbb{C}^n$ (яку розуміємо як добуток n мір Лебега в $\mathbb{R}^2$) множини $B \subset \mathbb{C}^n$; $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z)$ — залишок функції $f(z)$ в точці $z = z_0$; Ω_p — p-вимірний тор, одержаний шляхом ототожнення протилежних граней куба $\{x \in \mathbb{R}^p: 0 \le x_r \le 2\pi,\ r = 1, \ldots, p\}$, $Q_p = (0, T) \times \Omega_p$; $C^{(n,N)}(\overline{Q}_p)$ — простір гладких в $\overline{Q}_p$ функцій $u(t, x)$ з нормою

$$\|u(t,x)\|_{C^{(n,N)}(\overline{Q}_p)} = \sum_{\substack{j \le n \\ |q| \le N}} \max_{(t,x)\in\overline{Q}_p} \left| \frac{\partial^{j+|q|}u(t,x)}{\partial t^j \partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_p^{q_p}} \right|;$$

$G_{\beta,\delta}$, $\beta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, — простір 2π-періодичних по $x_1, \ldots, x_p$ комплекснозначних функцій

$$\varphi(x) = \sum_{|k| \ge 0} \varphi_k \exp(ik, x),$$

для яких є скінченною норма

$$\|\varphi\|_{\beta,\delta} = \sum_{|k|\geq 0} |\varphi_k| \exp\left(\delta |k|^{\beta}\right);$$

$C^n([0, T]; G_{\beta,\delta})$ — простір функцій

$$u(t, x) = \sum_{|k|\geq 0} u_k(t) \exp(ik, x)$$

таких, що для кожного $t \in [0, T]$ $\partial^j u / \partial t^j$, $0 \leq j \leq n$, належать до простору $G_{\beta,\delta}$ і як елементи цього простору є неперервними по t на $[0, T]$. Норму в просторі $C^n([0, T]; G_{\beta,\delta})$ задамо формулою

$$\|u\|_{n;\beta,\delta} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{|k|\geq 0} \max_{t\in[0,T]} \left|u_k^{(j)}(t)\right| \exp\left(\delta |k|^{\beta}\right).$$

2. Розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right) u(t, x) \equiv \frac{\partial^n u(t, x)}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}(D) \frac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j} = F(t, x), \quad (t, x) \in Q_p, \quad (1)$$

$$V_{j, q_j}[u] \equiv \left.\frac{\partial^{q_j - 1} u(t, x)}{\partial t^{q_j - 1}}\right|_{t = t_j} = \varphi_{j, q_j}(x),$$

$$q_j = 1, \ldots, r_j, \quad j = 1, \ldots, l, \quad x \in \Omega_p, \quad (2)$$

де

$$D = \left(-\frac{i\partial}{\partial x_1}, \ldots, -\frac{i\partial}{\partial x_p}\right), \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_l \leq T, \quad l \leq n,$$

$$n = r_1 + \ldots + r_l, \quad \max_{1\leq j\leq l} r_j = r, \quad A_j(\xi) \equiv A_j(\xi_1, \ldots, \xi_p), \quad j = 1, \ldots, n,$$

— многочлени з комплексними коефіцієнтами вигляду

$$A_j(\xi) = \sum_{|s|\leq N_j} A_j^s \xi_1^{s_1} \ldots \xi_p^{s_p}, \quad A_j^s \in \mathbb{C},$$

$$j = 1, \ldots, n, \quad s = (s_1, \ldots, s_p), \quad |s| = s_1 + \ldots + s_p. \quad (3)$$

Припустимо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ корені $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$ рівняння $L(\lambda, k) = 0$ є різними. Зі структури цього рівняння випливає, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}$ справджуються оцінки

$$|\lambda_j(k)| \leq a |k|^{\gamma}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\gamma = \max_{1\leq j\leq n} \left\{\frac{N_j}{j}\right\}, \quad a = 2 \max_{1\leq j\leq n} \sup_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}} \left\{\frac{\sqrt[j]{|A_j(k)|}}{|k|^{\gamma}}\right\}. \quad (4)$$

Вигляд області Q_p накладає умови 2π-періодичності за змінними $x_1, \ldots, x_p$ на функції $u(t, x)$, $F(t, x)$ та $\varphi_{j, q_j}(x)$, $q_j = 1, \ldots, r_j$, $j = 1, \ldots, l$.

3. Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} u_k(t) \exp(ik, x). \tag{5}$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком задачі

$$\frac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}(k) \frac{d^j u_k(t)}{dt^j} = F_k(t), \tag{6}$$

$$u_k^{(q_j-1)}(t_j) = \varphi_{j, q_j, k}, \quad q_j = 1, \ldots, r_j, \quad j = 1, \ldots, l, \tag{7}$$

де $F_k(t)$, $\varphi_{j, q_j, k}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти розвинень функцій $F(t, x)$, $\varphi_{j, q_j}(x)$, $q_j = 1, \ldots, r_j$, $j = 1, \ldots, l$, у ряди Фур'є за системою функцій $\{\exp(ik, x), k \in \in \mathbb{Z}^p\}$.

Функції $\{\exp(\lambda_q(k)t),\ q = 1, \ldots, n\}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідного диференціального рівняння, яке відповідає рівнянню (6). Введемо позначення:

$$H_k(t, \tau) = \sum_{q=1}^{n} \exp\big(\lambda_q(k)(t-\tau)\big) \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq q}}^{n} \big(\lambda_q(k) - \lambda_j(k)\big)^{-1}. \tag{8}$$

$$\Delta(k) = \det \left\| \lambda_q^{q_j-1}(k) \exp\big(\lambda_q(k)t_j\big) \right\|_{q_j = \overline{1, r_j};\ j = \overline{1, l}}^{q = \overline{1, n}}, \tag{9}$$

$$\Delta_{j, q_j, q}(k), \quad q_j = 1, \ldots, r_j, \quad j = 1, \ldots, l, \quad q = 1, \ldots, n,$$

— алгебраїчне доповнення елемента $\lambda_q^{q_j-1}(k) \exp\big(\lambda_q(k)t_j\big)$ у визначнику $\Delta(k)$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^{(n, N)}(\overline{Q}_p)$, $N = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \{N_j\}$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta(k) \neq 0. \tag{10}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 5.3 з розділу 2 [3] і випливає з теореми про єдиність розвинення періодичної функції в ряд Фур'є.

Зауваження 1. У роботі [13] показано, що умова (10) виконується для довільних $t_1, \ldots, t_l$ таких, що $0 \leq t_1 < \ldots < t_l \leq T$, якщо $\lambda_j(k) \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, $j = 1, \ldots, n$.

4. Лема 1. *Нехай* $F_k(t) \in C[0, T]$. *Якщо* $\Delta(k) \neq 0$, *то задача* (6), (7) *має єдиний розв'язок* $u_k(t) \in C^n[0, T]$, *який зображується формулою*

$$u_k(t) = \int_0^t H_k(t, \tau) F_k(\tau)\, d\tau + \sum_{q=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \sum_{q_j=1}^{r_j} \frac{\Delta_{j, q_j, q}(k)}{\Delta(k)} \varphi_{j, q_j, k} \exp\big(\lambda_q(k)t\big) -$$

$$- \sum_{q=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \sum_{q_j=1}^{r_j} \frac{\Delta_{j, q_j, q}(k)}{\Delta(k)} V_{j, q_j} \left[\int_0^t H_k(t, \tau) F_k(\tau)\, d\tau \right] \exp\big(\lambda_q(k)t\big). \tag{11}$$

Доведення. Використовуючи метод варіації довільних сталих, для розв'язку задачі (6), (7) отримуємо формулу

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^{n} C_{kq} \exp\big(\lambda_q(k)t\big) + \int_0^t H_k(t,\tau) F_k(\tau)\, d\tau, \tag{12}$$

де сталі C_{kq}, $q = 1, \ldots, n$, однозначно визначаються із системи лінійних рівнянь

$$\sum_{q=1}^{n} C_{kq} \lambda_q^{q_j - 1}(k) \exp\big(\lambda_q(k) t_j\big) = \varphi_{j, q_j, k} - V_{j, q_j}\left[\int_0^t H_k(t,\tau) F_k(\tau)\, d\tau\right], \tag{13}$$

$$q_j = \overline{1, r_j}, \quad j = \overline{1, l},$$

визначник якої збігається з $\Delta(k)$. Розв'язуючи систему (13) за правилом Крамера і підставляючи знайдені значення C_{kq} у формулу (12), отримуємо формулу (11).

Надалі вважатимемо, що умова (10) справджується. На підставі формул (5) та (11) отримуємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k| \ge 0} \exp(ik, x) \left\{ \int_0^t H_k(t,\tau) F_k(\tau)\, d\tau \; + \right.$$

$$+ \sum_{q=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \sum_{q_j = 1}^{r_j} \frac{\Delta_{j, q_j, q}(k)}{\Delta(k)} \varphi_{j, q_j, k} \exp\big(\lambda_q(k)t\big) -$$

$$\left. - \sum_{q=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \sum_{q_j=1}^{r_j} \frac{\Delta_{j, q_j, q}(k)}{\Delta(k)} V_{j, q_j} \left[\int_0^t H_k(t,\tau) F_k(\tau)\, d\tau\right] \exp\big(\lambda_q(k)t\big) \right\}. \tag{14}$$

Збіжність ряду (14) пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки $|\Delta(k)|$, який є відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень на нескінченній множині векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Теорема 2. *Нехай справджується умова* (10) *і для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k)| > |k|^{-\omega} \exp(-\delta |k|^\gamma), \qquad \omega, \delta \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Якщо

$$\varphi_{j, q_j}(x) \in G_{\gamma, \delta_1}, \qquad \delta_1 > \delta + naT, \qquad q_j = 1, \ldots, r_j, \quad j = 1, \ldots, l,$$

$$F(t,x) \in C\big([0,T]; G_{\gamma, \delta_2}\big), \qquad \delta_2 > \delta + (n+1)aT,$$

то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) *з класу* $C^{(n,N)}(\overline{Q}_p)$, *який зображується рядом* (14) *і неперервно залежить від функцій* $F(t,x)$ *та* $\varphi_{j, q_j}(x)$.

Доведення. Розглянемо інтеграли

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{R_k} \frac{\lambda^s \exp(\lambda(t-\tau))}{\prod_{j=1}^{n} \big(\lambda - \lambda_j(k)\big)}\, d\lambda, \qquad s = 0, 1, \ldots, n, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\bar{0}\}, \tag{16}$$

де $R_k = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = a|k|^\gamma + 1\}$, а обхід контурів R_k здійснюється проти годинникової стрілки. Оскільки підінтегральна функція у формулі (16) має в точках $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$ прості полюси, то

$$\operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_q(k)} \frac{\lambda^s \exp(\lambda(t-\tau))}{\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda-\lambda_j(k)\right)} =$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda_q(k)}\left(\lambda-\lambda_q(k)\right)\frac{\lambda^s \exp(\lambda(t-\tau))}{\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda-\lambda_j(k)\right)} = \frac{\lambda_q^s(k)\exp\left(\lambda_q(k)(t-\tau)\right)}{\prod_{\substack{j=1,\\ j\neq q}}^{n}\left(\lambda_q(k)-\lambda_j(k)\right)}.$$

Тому з основної теореми теорії лишків [15] і з (8) випливає, що для довільного $s=0,1,\ldots,n$

$$\frac{\partial^s H_k(t,\tau)}{\partial t^s} = \sum_{q=1}^{n}\operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_q(k)}\frac{\lambda^s \exp(\lambda(t-\tau))}{\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda-\lambda_j(k)\right)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{R_k}\frac{\lambda^s \exp(\lambda(t-\tau))}{\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda-\lambda_j(k)\right)}\,d\lambda. \quad (17)$$

Із (4) випливає, що відстань від R_k до коренів $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$ не менша, ніж 1, тому $\prod_{j=1}^{n}\left|\lambda-\lambda_j(k)\right|\geq 1$, якщо $\lambda\in R_k$. Із (17) маємо

$$\max_{0\leq\tau\leq t\leq T}\left|\frac{\partial^s H_k(t,\tau)}{\partial t^s}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\exp\left(\left(a|k|^\gamma+1\right)T\right)\oint_{R_k}|\lambda|^s|d\lambda| \leq$$

$$\leq \left(a|k|^\gamma+1\right)^{s+1}\exp\left(\left(a|k|^\gamma+1\right)T\right), \quad s=0,1,\ldots,n. \quad (18)$$

З нерівностей (18) випливає, що для всіх $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\bar{0}\}$

$$\left|\max_{0\leq t\leq T}\left(\frac{d}{dt}\right)^s\int_0^t H_k(t,\tau)F_k(\tau)\,d\tau\right| \leq C_1|k|^{\gamma(s+1)}\exp\left(aT|k|^\gamma\right)\overline{F}_k, \quad (19)$$

$$s=0,1,\ldots,n,$$

де

$$\overline{F}_k = \max_{t\in[0,T]}|F_k(t)|, \quad k\in\mathbb{Z}^p.$$

Очевидними є такі нерівності:

$$\left\|\exp\left(\lambda_q(k)t\right)\right\|_{C^n[0,T]} \leq C_2|k|^{\gamma n}\exp\left(aT|k|^\gamma\right), \quad k\neq\bar{0}, \quad (20)$$

$$\left|\Delta_{j,q_j,q}(k)\right| \leq C_3|k|^{\gamma\theta}\exp\left((n-1)aT|k|^\gamma\right),$$

$$k\neq\bar{0},\quad q=\overline{1,n},\quad q_j=\overline{1,r_j},\quad j=\overline{1,l}, \quad (21)$$

де $\theta=\sum_{j=1}^{l}r_j(r_j-1)/2$. Тоді з формули (11) та нерівностей (15), (19)–(21) отримуємо

$$\|u_k(t)\|_{C^n[0,T]} \leq C_4\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{q_j=1}^{r_j}\left|\varphi_{j,q_j,k}\right|\xi_k + \overline{F}_k\eta_k\right), \quad k\in\mathbb{Z}^p,$$

де

$$\xi_k = 1+|k|^{\gamma(n+\theta)+\omega}\exp\left((\delta+naT)|k|^\gamma\right),$$

$$\eta_k = 1+|k|^{\gamma r}\exp\left(aT|k|^\gamma\right)\xi_k.$$

Отже,

$$\|u(t,x)\|_{C^{(n,N)}(\overline{Q}_p)} \le C_5 \sum_{|k|\ge 0} \|u_k(t)\|_{C^n[0,T]}\left(1+|k|^N\right) \le$$

$$\le C_5 C_4 \sum_{|k|\ge 0} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{q_j=1}^{r_j} \left|\varphi_{j,q_j,k}\right|\xi_k + \overline{F}_k \eta_k \right)\left(1+|k|^N\right) \le$$

$$\le C_6 \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{q_j=1}^{r_j} \left\|\varphi_{j,q_j}(x)\right\|_{\gamma,\delta_1} + \|F(t,x)\|_{0;\gamma,\delta_2} \right). \tag{22}$$

В нерівностях (19) – (22) C_j, $j = 1, \ldots, 6$, — додатні сталі, що не залежать від k. З нерівності (22) випливає доведення теореми.

Зауваження 2. За умов теореми 2 розв'язок задачі (1), (2) належить до простору $C^n\left([0,T]; G_{\gamma,\delta_3}\right)$, де $\delta_3 < \min\{\delta_1 - \delta - naT,\ \delta_2 - \delta - (n+1)aT\}$.

5. Доведемо деякі допоміжні твердження, які будуть використані при дослідженні питання стосовно виконання нерівності (15).

Позначимо

$$\Pi_n = \left\{\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \max_{1\le j\le n}\left|z_j - z_{0j}\right| \le \rho\right\},$$

де $z_{0j} \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$.

Лема 2. *Нехай* $q_1, \ldots, q_n$ *— деякі натуральні числа, а* $F(z_1, \ldots, z_n)$ *— такий многочлен від змінних* $z_1, \ldots, z_n$, *що його похідні*

$$\frac{\partial^{q_{j+1}+\ldots+q_n} F}{\partial z_{j+1}^{q_{j+1}} \ldots \partial z_n^{q_n}} \equiv P_j, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

є многочленами від змінних $z_1, \ldots, z_j$, *причому* $P_1 = P_1(z_1)$ *має степінь* q_1. *Нехай*

$$M_n(\varepsilon) = \{\vec{z} \in \Pi_n : |F(z_1, \ldots, z_n)| \le \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Якщо для всіх $\vec{z} \in \Pi_n$ *виконується нерівність*

$$\left|\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n} F}{\partial z_1^{q_1} \ldots \partial z_n^{q_n}}\right| \ge \delta > 0,$$

то

$$\mu\left(M_n(\varepsilon), \mathbb{C}^n\right) \le C(q_1, \ldots, q_n) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{2/(q_1+\ldots+q_n)}.$$

Доведення. Використаємо метод математичної індукції по n. Для $n = 1$ твердження леми випливає з леми 1 [16]. Припустимо, що лема є справедливою для $n = m$, $m \ge 1$, і доведемо її істинність для $n = m+1$. Розглянемо многочлен від $m+1$ змінної $F(z_1, \ldots, z_{m+1})$. Введемо множини

$$E_1(\alpha) = \left\{(z_1, \ldots, z_{m+1}) \in M_{m+1}(\varepsilon) : \left|\frac{\partial^{q_{m+1}} F(z_1, \ldots, z_{m+1})}{\partial z_{m+1}^{q_{m+1}}}\right| > \alpha\right\},$$

$$E_2(\alpha) = \left\{(z_1, \ldots, z_{m+1}) \in M_{m+1}(\varepsilon) : \left|\frac{\partial^{q_{m+1}} F(z_1, \ldots, z_{m+1})}{\partial z_{m+1}^{q_{m+1}}}\right| \le \alpha\right\},$$

$$E_1(z_1, \ldots, z_m, \alpha) = \{z_{m+1} \in \mathbb{C} : (z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}) \in E_1(\alpha)\},$$

$$E_2(z_{m+1}, \alpha) = \left\{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m : (z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}) \in E_2(\alpha)\right\},$$

де $\alpha > 0$. За умовою леми

$$\frac{\partial^{q_{m+1}} F(z_1, \ldots, z_{m+1})}{\partial z_{m+1}^{q_{m+1}}} \equiv P_m$$

є многочленом від змінних $z_1, \ldots, z_m$. Оскільки похідні

$$\frac{\partial^{q_{j+1} + \ldots + q_m} P_m}{\partial z_{j+1}^{q_{j+1}} \ldots \partial z_m^{q_m}}, \quad j = 1, \ldots, m-1,$$

є многочленами від змінних $z_1, \ldots, z_j$, причому многочлен

$$\frac{\partial^{q_2 + \ldots + q_m} P_m}{\partial z_2^{q_2} \ldots \partial z_m^{q_m}}$$

має степінь q_1, і $\left|\partial^{q_1 + \ldots + q_m} P_m / \left(\partial z_1^{q_1} \ldots \partial z_m^{q_m}\right)\right| \geq \delta$, то за припущенням індукції

$$\mu\left(E_2(z_{m+1}, \alpha), \mathbb{C}^m\right) \leq C(q_1, \ldots, q_m) \cdot \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{2/(q_1 + \ldots + q_m)},$$

якщо $z_{m+1} \in \mathbb{C}$, $|z_{m+1} - z_{0,m+1}| \leq \rho$. Тому

$$\mu\left(E_2(\alpha), \mathbb{C}^{m+1}\right) \leq \pi\rho^2 C(q_1, \ldots, q_m) \cdot \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{2/(q_1 + \ldots + q_m)}. \tag{23}$$

При фіксованих $z_1, \ldots, z_m$ $F(z_1, \ldots, z_m, z_{m+1})$ є многочленом від змінної z_{m+1} степеня q_{m+1}. Із леми 1 [16] випливає, що

$$\mu(E_1(z_1, \ldots, z_m, \alpha), \mathbb{C}) \leq C(q_{m+1}) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{2/q_{m+1}},$$

якщо $z_j \in \mathbb{C}$, $|z_j - z_{0,j}| \leq \rho$, $j = 1, \ldots, m$. Тоді

$$\mu\left(E_1(\alpha), \mathbb{C}^{m+1}\right) \leq (\pi\rho^2)^m C(q_{m+1}) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{2/q_{m+1}}. \tag{24}$$

Оскільки $M_{m+1}(\varepsilon) = E_1(\alpha) \cup E_2(\alpha)$, то з (23), (24) випливає, що для кожного $\alpha > 0$ виконується нерівність

$$\mu\left(M_{m+1}(\varepsilon), \mathbb{C}^{m+1}\right) \leq \pi\rho^2 C(q_1, \ldots, q_m) \cdot \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{2/(q_1 + \ldots + q_m)} +$$

$$+ (\pi\rho^2)^m C(q_{m+1}) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{2/q_{m+1}}. \tag{25}$$

Якщо в нерівності (25) покласти

$$\alpha = \left(\frac{(\pi\rho^2)^{m-1} C(q_{m+1}) |\tilde{q}|}{C(q_1, \ldots, q_m) q_{m+1}}\right)^{|\tilde{q}| q_{m+1}/(2|q|)} \delta^{q_{m+1}/|q|} \varepsilon^{|\tilde{q}|/|q|},$$

де $|\tilde{q}| = q_1 + \ldots + q_m$, $|q| = |\tilde{q}| + q_{m+1}$, одержимо

$$\mu\left(M_{m+1}(\varepsilon), \mathbb{C}^{m+1}\right) \leq$$

$$|q| \left(\frac{\pi\rho^2 C(q_1, \ldots, q_m)}{|\tilde{q}|}\right)^{|\tilde{q}|/|q|} \left(\frac{(\pi\rho^2)^m C(q_{m+1})}{q_{m+1}}\right)^{q_{m+1}/|q|} \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{2/|q|}.$$

Лему доведено.

Введемо позначення: $r_{j,q} = (0, \ldots, 0, N_j, 0, \ldots, 0)$, $j = 1, \ldots, n$, $q = 1, \ldots, p$, — мультиіндекс довжини p, q-та компонента якого дорівнює N_j;

$$\sigma_{j,q} = \frac{\partial}{(\partial A_j^{r_{j,q}})}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad q = 1, \ldots, p,$$

$$\vec{y}_q = \left(A_1^{r_{1,q}}, \ldots, A_n^{r_{n,q}}\right) \in \mathbb{C}^n, \quad q = 1, \ldots, p, \qquad \vec{Y} \equiv (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_p) \in \mathbb{C}^{np};$$

$\vec{U}$ — вектор, складений з тих коефіцієнтів A_j^s рівняння (1), які не є компонентами вектора $\vec{Y}$;

$$J = \left\{\vec{Y} \in \mathbb{C}^{np} : \max_{1 \le j \le np} \left|Y_j - Y_{0,j}\right| < \rho\right\}$$

— полікруг радіуса ρ з центром у точці

$$\vec{Y}_0 = (Y_{0,1}, \ldots, Y_{0,np}) \in \mathbb{C}^{np},$$

$$J_q = \left\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \max_{1 \le j \le n} \left|z_j - Y_{0,nq-n+j}\right| < \rho\right\}, \quad q = 1, \ldots, p,$$

$$I_{j,q} = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - Y_{0,nq-n+j}\right| < \rho\right\}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad q = 1, \ldots, p.$$

Лема 3. *Нехай $F(z_1, \ldots, z_n)$ — симетричний многочлен степеня m від сукупності змінних $z_1, \ldots, z_n$ з цілими коефіцієнтами, відмінний від тотожного нуля. Для довільного фіксованого вектора $\vec{U}$ і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}^{np}$) векторів $\vec{Y}$ нерівність*

$$|F(\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k))| \ge |k|^{-\tau}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\tau > mp/2$.

Доведення. З основної теореми теорії симетричних многочленів [17, с. 285] та формул Вієта випливає, що $F(\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k))$ можна подати у вигляді

$$F(\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)) = \sum_{q_1 + 2q_2 + \ldots + nq_n \le m} \beta_q A_1^{q_1}(k) \ldots A_n^{q_n}(k),$$
$$q = (q_1, \ldots, q_n), \tag{26}$$

де коефіцієнти β_q є цілими числами, які всі одночасно не дорівнюють нулю. Нехай одночлен $\beta_s A_1^{s_1}(k) \ldots A_n^{s_n}(k)$, $\beta_s \ne 0$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$, є старшим членом стосовно лексикографічного впорядкування [17, с. 284] доданків у (26), а $j_1, \ldots, j_h$, $h \le n$, — номери відмінних від нуля компонент мультиіндекса s: $s_{j_1} \ne 0, \ldots, s_{j_h} \ne 0$, $1 \le j_1 < \ldots < j_h \le n$.

Зафіксуємо вектор $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}$. Нехай $|k_\alpha| = \max_{1 \le j \le p} |k_j|$, $1 \le \alpha \le p$. При фіксованих $\vec{y}_j$, $j = 1, \ldots, p$, $j \ne \alpha$, та при фіксованих $A_j^{r_{j,\alpha}}$, $j \notin \{j_1, \ldots, j_h\}$, функція $F(\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k))$ є многочленом від h змінних $A_{j_1}^{r_{j_1,\alpha}}, \ldots, A_{j_h}^{r_{j_h,\alpha}}$ (див. (3)). Оскільки

$$\beta_s A_1^{s_1}(k) \ldots A_n^{s_n}(k) \equiv \beta_s A_{j_1}^{s_{j_1}}(k) \ldots A_{j_h}^{s_{j_h}}(k)$$

є старшим членом у розкладі (26), то існує такий номер g, $1 \le g \le h$, що

$$\left(\sigma_{j_g,\alpha}\right)^{s_{j_g}}[F(\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k))] \equiv \left(\sigma_{j_g,\alpha}\right)^{s_{j_g}}\left[\beta_s A_{j_1}^{s_{j_1}}(k)\ldots A_{j_h}^{s_{j_h}}(k)\right]. \qquad (27)$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що в (27) $g = h$ (в протилежному випадку відповідні компоненти вектора $\bar{y}_\alpha$ поміняємо місцями). Тоді, враховуючи формули (3), із (27) отримуємо

$$\left(\sigma_{j_h,\alpha}\right)^{s_{j_h}}[F(\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k))] \equiv \beta_s s_{j_h}!k_\alpha^{s_{j_h}N_{j_h}} A_{j_1}^{s_{j_1}}(k)\ldots A_{j_{h-1}}^{s_{j_{h-1}}}(k).$$

Тому при фіксованих $\bar{y}_j$, $j = 1,\ldots,p$, $j \neq \alpha$, та при фіксованих $A_j^{r_j,\alpha}$, $j \notin \{j_1,\ldots,j_h\}$, похідні

$$\left(\sigma_{j_{\nu+1},\alpha}\right)^{s_{j_{\nu+1}}}\ldots\left(\sigma_{j_{h-1},\alpha}\right)^{s_{j_{h-1}}}\left(\sigma_{j_h,\alpha}\right)^{s_{j_h}} F(\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)) \equiv$$

$$\equiv \beta_s \prod_{q=\nu+1}^{h} s_{j_q}!k_\alpha^{s_{j_q}N_{j_q}} \prod_{q=1}^{\nu} A_{j_q}^{s_{j_q}}(k), \quad \nu = 1,\ldots,h-1,$$

залежать тільки від ν змінних $A_{j_1}^{r_{j_1},\alpha},\ldots,A_{j_\nu}^{r_{j_\nu},\alpha}$, причому степінь многочлена

$$\left(\sigma_{j_2,\alpha}\right)^{s_{j_2}}\ldots\left(\sigma_{j_h,\alpha}\right)^{s_{j_h}} F \equiv \beta_s \prod_{q=2}^{h} s_{j_q}!k_\alpha^{s_{j_q}N_{j_q}} A_{j_1}^{s_{j_1}}(k)$$

за змінною $A_{j_1}^{r_{j_1},\alpha}$ дорівнює s_{j_1}. Із формул (3) випливає, що для всіх

$$\left(A_{j_1}^{r_{j_1},\alpha},\ldots,A_{j_h}^{r_{j_h},\alpha}\right) \in \prod_{q=1}^{h} I_{j_q,\alpha}$$

виконується нерівність

$$\left|\left(\sigma_{j_1,\alpha}\right)^{s_{j_1}}\ldots\left(\sigma_{j_h,\alpha}\right)^{s_{j_h}} F(\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k))\right| = \left|\beta_s \prod_{q=1}^{h} s_{j_q}!k_\alpha^{s_{j_q}N_{j_q}}\right| \geq \left(\frac{|k|}{p}\right)^{\xi}, \quad (28)$$

де $\xi = s_{j_1}N_{j_1} + \ldots + s_{j_h}N_{j_h}$. Оскільки $\tau > mp/2$, $\xi \geq 0$, $|s| = s_1 + \ldots + s_n = s_{j_1} + \ldots + s_{j_h} \leq m$ (див. (26)), то $2(\tau+\xi)/|s| \geq p + \varepsilon_1$, де $\varepsilon_1 = (2\tau - mp)/|s|$. На підставі леми 2 з нерівності (28) випливає

$$\mu\left(B(k;\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_{\alpha-1},\bar{w}_\alpha,\bar{y}_{\alpha+1},\ldots,\bar{y}_p),\mathbb{C}^h\right) \leq C_7|k|^{-2(\tau+\xi)/|s|} \leq C_8|k|^{-p-\varepsilon_1}, \quad (29)$$

де $B(k;\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_{\alpha-1},\bar{w}_\alpha,\bar{y}_{\alpha+1},\ldots,\bar{y}_p)$ — множина векторів

$$\left(A_{j_1}^{r_{j_1},\alpha},\ldots,A_{j_h}^{r_{j_h},\alpha}\right) \in \prod_{q=1}^{h} I_{j_q,\alpha},$$

для яких нерівність $|F(\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k))| < |k|^{-\tau}$ виконується при фіксованому $k \neq \bar{0}$ та при фіксованих векторах $\bar{y}_j$, $j = 1,\ldots,p$, $j \neq \alpha$, $\bar{w}_\alpha$ (тут $\bar{w}_\alpha$ — $(n-h)$-вимірний вектор, складений із $A_j^{r_j,\alpha}$, $j \notin \{j_1,\ldots,j_h\}$). Інтегруючи нерівність (29) за всіма $\bar{y}_j \in J_j$, $j = 1,\ldots,p$, $j \neq \alpha$, та за $A_j^{r_j,\alpha} \in I_{j,\alpha}$, $j \notin \{j_1,\ldots,j_h\}$, отримаємо

$$\mu\left(B(k),\mathbb{C}^{np}\right) \leq C_8(\pi\rho^2)^{np-h}|k|^{-p-\varepsilon_1},$$

де

$$B(k) = \left\{ \bar{Y} \in J : \left| F(\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)) \right| < |k|^{-\tau} \right\}.$$

Тоді ряд $\sum_{|k|>0} \mu\left(B(k), \mathbb{C}^{np}\right)$ є збіжним, і, отже, за лемою Бореля – Кантеллі [18, 19] міра Лебега в $\mathbb{C}^{np}$ множини тих векторів $\bar{Y}$, які належать нескінченній кількості множин $B(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\bar{0}\}$, дорівнює нулю. Враховуючи, що простір $\mathbb{C}^{np}$ можна покрити зліченною кількістю полікругів J, завершуємо доведення леми.

Через $C(n, m)$, $m \le n$, позначимо множину всіх наборів $\omega = (i_1, \ldots, i_m)$, складених з m цілих чисел $i_1, \ldots, i_m$ таких, що $1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n$. На множині $C(n, m)$ введемо бінарне відношення $\prec$ за правилом

$$\omega = (i_1, \ldots, i_m) \prec (j_1, \ldots, j_m) = \sigma, \quad \omega, \sigma \in C(n, m),$$

якщо перша відмінна від нуля різниця серед $j_1 - i_1, \ldots, j_m - i_m$ є додатною. Для набору $\omega = (i_1, \ldots, i_m) \in C(n, m)$ покладемо

$$\operatorname{set}\omega = \{i_1, \ldots, i_m\}, \quad S_\omega = i_1 + \ldots + i_m, \quad Z_\omega = z_{i_1} + \ldots + z_{i_m},$$

$$\Lambda_\omega(k) = \lambda_{i_1}(k) + \ldots + \lambda_{i_m}(k),$$

$$\Gamma_\omega(k) = \prod_{m \ge j > q \ge 1} \left(\lambda_{i_j}(k) - \lambda_{i_q}(k) \right), \quad i_j, i_q \in \operatorname{set}\omega,$$

$$W_\omega(t, k) = \det \left\| \lambda_{i_j}^{q-1}(k) \exp\left(\lambda_{i_j}(k) t \right) \right\|_{q, j=1}^{m}.$$

Позначимо

$$\omega_j = (\rho_{j+1} + 1, \rho_{j+1} + 2, \ldots, \rho_{j+1} + r_j),$$
$$j = 1, \ldots, l-1, \quad \omega_l = (1, 2, \ldots, r_l), \tag{30}$$

$$P_j(\lambda, k) = \prod_{\omega \in C(\rho_j, r_j),\, \omega \prec \omega_j} (\lambda - \Lambda_\omega(k)), \quad j = 1, \ldots, l-1, \tag{31}$$

де $\rho_j = r_j + \ldots + r_l$, $j = 1, \ldots, l$. Зауважимо, що $\rho_{j+1} + r_j = \rho_j$, $j = 1, \ldots, l-1$, тому $\omega_j \in C(\rho_j, r_j)$, $j = 1, \ldots, l$.

Теорема 3. *Для довільного фіксованого вектора* $\bar{U}$ *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{C}^{np}$*) векторів* $\bar{Y}$ *справджуються нерівності*

$$\left(\forall k \in \mathbb{Z}^p, |k| > K(\bar{Y}) \right) \quad \left| \Gamma_{\omega_j}(k) \right| \ge |k|^{-\theta_j - \varepsilon_2}, \quad j = 1, \ldots, l, \quad \varepsilon_2 > 0, \tag{32}$$

$$\left(\forall k \in \mathbb{Z}^p, |k| > K(\bar{Y}) \right) \quad \left| P_j\left(\Lambda_{\omega_j}(k), k \right) \right| \ge |k|^{-\psi_j - \varepsilon_3},$$
$$j = 1, \ldots, l-1, \quad \varepsilon_3 > 0, \tag{33}$$

де

$$\theta_j = \gamma\left(C_n^2 - C_{r_j}^2 \right) + (n-1) \cdot \left(\frac{p}{4} - \frac{N_n}{2} \right),$$

$$\psi_j = \frac{p d_j}{4} + \gamma\left(\frac{d_j}{2} - C_{\rho_j}^{r_j} + 1 \right), \quad d_j = C_n^{r_j}\left(C_n^{r_j} - 1 \right).$$

Доведення. Використовуючи схему доведення теореми 4.5 з розділу 2 [3, с. 62] та лему із [16], одержуємо, що для майже всіх $\bar{Y} \in \mathbb{C}^{np}$ і для всіх (крім скінченної кількості) $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність

$$\prod_{n \geq q > s \geq 1} \left| \lambda_q(k) - \lambda_s(k) \right| > |k|^{(n-1)(N_n/2 - p/4) - \varepsilon_4}, \quad \varepsilon_4 > 0. \tag{34}$$

Оскільки справедливі формули

$$\prod_{n \geq q > s \geq 1} \left| \lambda_q(k) - \lambda_s(k) \right| = \left| \Gamma_{\omega_j}(k) \right| \prod_{(q,s) \in I_j} \left| \lambda_q(k) - \lambda_s(k) \right|, \quad j = 1, \ldots, l,$$

де

$$I_j = \{ (q, s) \in \mathbb{N}^2 : n \geq q > s \geq 1, \ (q, s) \notin \operatorname{set}\omega_j \times \operatorname{set}\omega_j \},$$

то враховуючи оцінки

$$|\lambda_q(k) - \lambda_s(k)| \leq 2a|k|^\gamma, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}, \quad q, s = 1, \ldots, n, \quad q \neq s,$$

і те, що множина I_j має $C_n^2 - C_{r_j}^2$ елементів, на підставі формули (34) отримуємо (32).

Для доведення (33) розглянемо симетричні многочлени

$$F_j(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{\sigma, \omega \in C(n, r_j), \sigma < \omega} (Z_\sigma - Z_\omega)^2, \quad j = 1, \ldots, l-1.$$

Оскільки F_j є многочленом степеня d_j, $j = 1, \ldots, l-1$, то згідно з лемою 3 для майже всіх $\vec{Y} \in \mathbb{C}^{np}$ і для всіх (крім скінченної кількості) $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності

$$\left| F_j(\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)) \right| > |k|^{-pd_j/2 - \varepsilon_5}, \quad j = 1, \ldots, l-1, \quad \varepsilon_5 > 0. \tag{35}$$

Із оцінок (4) випливає, що $|\Lambda_\sigma(k) - \Lambda_\omega(k))| \leq 2r_j a|k|^\gamma$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}$, $\sigma, \omega \in C(\rho_j, r_j)$. Враховуючи (31), маємо

$$\left| F_j(\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)) \right| =$$

$$= \left| P_j\left(\Lambda_{\omega_j}(k), k\right) \right|^2 \prod_{\substack{(\sigma, \omega) \notin C(\rho_j, r_j) \times C(\rho_j, r_j), \\ \sigma < \omega}} |\Lambda_\sigma(k) - \Lambda_\omega(k)|^2 \times$$

$$\times \prod_{\substack{(\sigma, \omega) \in C(\rho_j, r_j), \\ \sigma < \omega, \ \omega < \omega_j}} |\Lambda_\sigma(k) - \Lambda_\omega(k)|^2 \leq C_9 \left| P_j\left(\Lambda_{\omega_j}(k), k\right) \right|^2 |k|^{2\gamma(d_j/2 - C_{\rho_j}^{r_j} + 1)}, \tag{36}$$

$j = 1, \ldots, l-1$. Із оцінок (35), (36) випливає (33).

Позначимо

$$a_1 = \sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}} \left\{ \left| \operatorname{Re} \lambda_j(k) \right| / |k|^\gamma \right\}, \quad g_j = C_{\rho_j}^{r_j} - 1, \quad j = 1, \ldots, l-1.$$

Теорема 4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^l$*) векторів* $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_l) \in [0, T]^l$*, довільного фіксованого вектора* $\vec{U}$ *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{C}^{np}$*) векторів* $\vec{Y}$ *нерівність* (15) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при*

$$\delta = na_1 T, \quad \omega > (\gamma + p)\sum_{j=1}^{l-1} g_j + \sum_{j=1}^{l-1} (\theta_j + \psi_j) + \theta_l,$$

а сталі θ_j, $j = 1, \ldots, l$, ψ_j, $j = 1, \ldots, l-1$, *визначені в теоремі* 3.

Доведення. Через

$$\Delta^j_\omega(k) \equiv \Delta^j_\omega(k; t_{j+1}, \ldots, t_l), \quad \omega \in C(\rho_j, r_j), \quad j = 1, \ldots, l-1,$$

позначимо визначник, який отримується з $\Delta(k)$ (див. (9)) викреслюванням перших $n - \rho_{j+1}$ рядків та останніх $n - \rho_j$ стовпців і r_j стовпців, номери яких складають множину $\operatorname{set}\omega$. Для набору ω_j (див. (30)) покладемо

$$\Delta^j_{\omega_j}(k; t_{j+1}, \ldots, t_l) \equiv \Delta^j(k; t_{j+1}, \ldots, t_l).$$

Із теореми Лапласа про розклад визначника випливають такі рівності:

$$\Delta^{j-1}(k; t_j, \ldots, t_l) = \sum_{\omega \in C(\rho_j, r_j)} (-1)^{h_j + S_\omega} W_\omega(t_j, k)\, \Delta^j_\omega(k; t_{j+1}, \ldots, t_l), \quad j = \overline{1, l-1}, \tag{37}$$

де $\Delta^0(k; t_1, \ldots, t_l) \equiv \Delta(k)$, $h_j = r_j(r_j + 1)/2$. Оскільки

$$W_\omega(t, k) = \Gamma_\omega(k) \exp(\Lambda_\omega(k) t),$$

то із формул (37) отримуємо

$$P_j(\partial/\partial t_j, k)\Delta^{j-1}(k; t_j, \ldots, t_l) = (-1)^{h_j + S_{\omega_j}} \exp\left(\Lambda_{\omega_j}(k) t_j\right) \times$$
$$\times\ \Gamma_{\omega_j}(k)\, P_j\left(\Lambda_{\omega_j}(k), k\right) \Delta^j(k; t_{j+1}, \ldots, t_l), \quad j = 1, \ldots, l-1. \tag{38}$$

Нехай вектор $\vec{Y} \in \mathbb{C}^{np}$ задовольняє умови (32), (33) (згідно з теоремою 3 умови (32), (33) виконуються для майже всіх векторів $\vec{Y} \in \mathbb{C}^{np}$). Із оцінок

$$\left|\exp\left(\Lambda_{\omega_j}(k) t_j\right)\right| \geq \exp\left(-r_j a_1 T |k|^\gamma\right), \quad j = 1, \ldots, l-1,$$

та формул (32), (33), (38) випливає

$$\left| P_j\left(\frac{\partial}{\partial t_j}, k\right) \Delta^{j-1}(k; t_j, \ldots, t_l) \right| \geq$$
$$\geq \exp\left(-r_j a_1 T |k|^\gamma\right) \left|\Gamma_{\omega_j}(k)\right| \left|P_j\left(\Lambda_{\omega_j}(k), k\right)\right| \left|\Delta^j(k; t_{j+1}, \ldots, t_l)\right| \geq$$
$$\geq \exp\left(-r_j a_1 T |k|^\gamma\right) |k|^{-\chi_j} \left|\Delta^j(k; t_{j+1}, \ldots, t_l)\right|, \quad j = 1, \ldots, l-1, \tag{39}$$

де $\chi_j = \theta_j + \psi_j + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Розглянемо множини

$$G_0(k) = \left\{\vec{t} \in [0, T]^l : \left|\Delta^0(k; t_1, \ldots, t_l)\right| < \nu_0\right\},$$

$$G_j(k) = \left\{\vec{t} \in [0, T]^l : \left|\Delta^{j-1}(k; t_j, \ldots, t_l)\right| < \nu_{j-1},\ \left|\Delta^j(k; t_{j+1}, \ldots, t_l)\right| \geq \nu_j\right\},$$
$$j = 1, \ldots, l-1,$$

де

$$\nu_j \equiv \nu_j(k), \quad \nu_j = |k|^{-\xi_j} \exp\left(-\eta_j a_1 T |k|^\gamma\right), \quad j = 0, \ldots, l-1;$$

$$\xi_{l-1} = \theta_l + \varepsilon_2, \quad \xi_{j-1} = \xi_j + \chi_j + (\gamma + p) g_j + \varepsilon_6, \quad \varepsilon_6 > 0, \quad j = 1, \ldots, l-1;$$

$$\eta_{l-1} = r_l, \quad \eta_{j-1} = \eta_j + r_j, \quad j = 1, \ldots, l-1.$$

Якщо $\vec{t} \in G_j(k)$, $j = 1, \ldots, l-1$, то з нерівностей (39) випливає

$$\left| P_j\left(\frac{\partial}{\partial t_j}, k\right)\Delta^{j-1}(k; t_j, \ldots, t_l)\right| \geq$$

$$\geq \nu_j |k|^{-\chi_j} \exp\left(-r_j a_1 T |k|^\gamma\right), \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad |k| > K(\bar{Y}), \quad j = 1, \ldots, l-1. \tag{40}$$

Степінь многочлена $P_j(\lambda, k)$, $j = 1, \ldots, l-1$, за змінною λ дорівнює g_j, а модулі його коефіцієнтів при $\lambda^{g_j - q}$, $q = 1, \ldots, g_j$, не перевищують $C_{10}|k|^{\gamma q}$, де $C_{10} = C_{10}(a, n, r_1, \ldots, r_l)$. Із (37) видно, що при фіксованих $t_{j+1}, \ldots, t_l$ функція $\Delta^{j-1}(k; t_j, \ldots, t_l)$, $j = 1, \ldots, l-1$, як функція змінної t_j є лінійною комбінацією експонент вигляду $\exp(\Lambda_\omega(k) t_j)$, $\omega \in C(\rho_j, r_j)$. На підставі лем 1, 2 роботи [10] з нерівностей (40) одержуємо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K > K(\bar{Y})$,

$$\mu\left(G_j(k), \mathbb{R}^l\right) \leq C_{11}|k|^\gamma \sqrt[g_j]{\frac{\nu_{j-1}}{\nu_j |k|^{-\chi_j}\exp\left(-r_j a_1 T|k|^\gamma\right)}} =$$

$$= C_{11}|k|^\gamma \sqrt[g_j]{\frac{|k|^{-\xi_{j-1}}\exp\left(-\eta_{j-1} a_1 T |k|^\gamma\right)}{|k|^{-\xi_j}\exp\left(-\eta_j a_1 T|k|^\gamma\right)|k|^{-\chi_j}\exp\left(-r_j a_1 T|k|^\gamma\right)}} =$$

$$= C_{11} \sqrt[g_j]{\frac{|k|^{\xi_j + \chi_j + \gamma g_j}}{|k|^{\xi_{j-1}}}} \leq \frac{C_{11}}{|k|^{p+\varepsilon_7}}, \quad 1 \leq j \leq l-1, \quad \varepsilon_7 = \min_{1 \leq j \leq l-1}\left\{\frac{\varepsilon_6}{g_j}\right\}. \tag{41}$$

Оскільки

$$\Delta^{l-1}(k; t_l) = W_{\omega_l}(t_l, k) = \Gamma_{\omega_l}(k)\exp\left(\Lambda_{\omega_l}(k) t_l\right),$$

то, згідно з вибором вектора $\bar{Y} \in \mathbb{C}^{np}$,

$$\left|\Delta^{l-1}(k; t_l)\right| \geq |k|^{-\theta_l - \varepsilon_2}\exp\left(-r_l a_1 T |k|^\gamma\right) \equiv \nu_{l-1}.$$

Тоді $G_0(k) = \bigcup_{j=1}^{l-1} G_j(k)$, і з нерівностей (41) випливає

$$\sum_{|k|>0} \mu\left(G_0(k), \mathbb{R}^l\right) \leq \sum_{|k|>0}\sum_{j=1}^{l-1}\mu\left(G_j(k), \mathbb{R}^l\right) \leq C_{12}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^{p+\varepsilon_7}} < \infty.$$

Зі збіжності останнього ряду та леми Бореля – Кантеллі випливає, що міра Лебега в $\mathbb{R}^l$ множини тих векторів $\bar{t}$, які належать нескінченній кількості множин $G_0(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, дорівнює нулю. Теорему доведено.

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
2. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637 – 645.
3. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
4. *Пташник Б. Й., Фіголь В. В., Штаблюк П. І.* Розв'язність, стійкість і регуляризація багатоточкової задачі для гіперболічних рівнянь // Мат. студ.: Пр. Львів. мат. т-ва. – 1991. – Вип. 1. – С. 16 – 32.
5. *Пташник Б. Й., Комарницька Л. І.* Багатоточкова задача для диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Допов. НАН України. – 1995. – № 10. – С. 20 – 23.
6. *Пташник Б. Й., Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для безтипних факторизованих диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 1. – С. 66 – 79.

7. *Пташник Б. Й., Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для безтипних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Там же. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1236 – 1249.
8. *Василишин П. Б., Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Там же. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1468 – 1476.
9. *Бернік В. І., Бересневіч В. В., Василишин П. Б., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача з кратними вузлами для лінійних гіперболічних рівнянь // Там же. – 1999. – **51**, № 10. – С. 1311 – 1316.
10. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для неізотропних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Там же. – 2003. – **55**, № 2. – С. 241 – 254.
11. *Клюс І. С., Нитребич З. М.* Багатоточкова задача для диференціального рівняння із частинними похідними, що розкладається в добуток лінійних відносно диференціювання множників // Вісн. Нац. ун-ту "Львів. політехніка": Прикл. математика. – 2000. – № 407. – С. 220 – 226.
12. *Каленюк П. І., Нитребич З. М., Плешівський Я. М.* Багатоточкова задача для неоднорідної полілінійної системи рівнянь із частинними похідними // Вісн. Львів. нац. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 58. – С. 144 – 152.
13. *Валицкий Ю. Н.* Корректность задачи для дифференциального уравнения при заданных значениях функции и ее производных в нескольких точках // Сиб. мат. журн. – 1996. – **37**, № 2. – С. 251 – 258.
14. *Сайдаматов Э. М.* О корректности неоднородных граничных задач для псевдодифференциальных уравнений // Узб. мат. журн. – 1995. – № 2. – С. 77 – 88.
15. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. – М.: Наука, 1991. – 411 с.
16. *Симотюк М. М.* Задача з нелокальними багатоточковими умовами для диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Вісн. Нац. ун-ту "Львів. політехніка": Прикл. математика. – 2000. – № 411. – С. 280 – 285.
17. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984. – 446 с.
18. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 143 с.
19. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Выща шк., 1979. – 408 с.

Одержано 23.08.2001