УДК 517.53

М. М. Шеремета, М. Т. Бордуляк (Львів. нац. ун-т)

ОБМЕЖЕНІСТЬ l-ІНДЕКСУ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ЛАГЕРРА – ПОЙА

We investigate conditions on zeros of an entire function f from the Laguerre – Pólya class under which f is a function of a bounded l-index.

Досліджено умови на нулі цілої функції f з класу Лагерра – Пойа, при яких f є функцією обмеженого l-індексу.

1^0. Вступ. Нехай Λ — клас додатних неперервних на $[0,+\infty)$ функцій l, а Q — клас таких функцій $l\in\Lambda$, що $l(r+O(1/l(r)))=O(l(r))$, $r\to+\infty$.

Для $l\in\Lambda$ ціла функція f називається функцією обмеженого l-індексу [1, 2, с. 5], якщо існує $N\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n\in\mathbb{Z}_+$ і $z\in\mathbb{C}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!\,l^n(|z|)} \le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!\,l^k(|z|)}: 0\le k\le N\right\}. \tag{1}$$

Звідси при $l(x)\equiv 1$ отримуємо означення цілої функції обмеженого індексу, введене Б. Лепсоном [3].

Покладемо $M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$. Відомо [2, с. 71], що якщо $l\in Q$ і ціла функція f є функцією обмеженого l-індексу, то

$$\ln M_f(r) = O(L(r)), \quad r\to+\infty, \quad L(r)=\int_0^r l(t)\,dt. \tag{2}$$

Звідси випливає, що для цілих функцій f обмеженого індексу справедливе співвідношення [4, 5] $\ln M_f(r)=O(r)$, $r\to+\infty$.

Якщо $a_k\in\mathbb{C}$ — нулі цілої функції f, то позначимо $n(r,z_0,1/f)=\sum\limits_{|a_k-z_0|\le r} 1$, і нехай для $l\in\Lambda$ і $q\in(0,+\infty)$

$$G_q(f) = \bigcup_k\left\{z: |z-a_k|\le\frac{q}{l(|a_k|)}\right\}.$$

Справедливий наступний критерій обмеженості l-індексу цілої функції.

Лема 1 [6, 2, с. 27]. *Якщо $l\in Q$, то ціла функція f є функцією обмеженого l-індексу тоді і тільки тоді, коли:*

1) *для кожного $q>0$ існує $P(q)>0$ таке, що для всіх $z\in\mathbb{C}\setminus G_q(f)$*

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \le P(q)\,l(|z|);$$

2) *для кожного $q>0$ існує $n^*(q)\in\mathbb{N}$ таке, що для кожного $z_0\in\mathbb{C}$*

$$n\left(\frac{q}{l(|z_0|)}, z_0, \frac{1}{f}\right) \le n^*(q).$$

Цей критерій неодноразово [7 – 11], [2] (гл. 5) використовувався для побудови і дослідження цілих функцій обмеженого l-індексу. Ми застосуємо його до дослідження обмеженості l-індексу цілих функцій з класу Лагерра – Пойа.

Позначимо через LP клас всіх цілих функцій, що допускають рівномірне наближення на кожному замкненому крузі дійсними многочленами з нулями тільки на $\mathbb{R}$. Класична теорема Е. Лагерра [12] і Д. Пойа [13] стверджує, що $f \in LP$ тоді і тільки тоді, коли

$$f(z) = A z^m e^{-az^2+bz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n}, \tag{3}$$

де $A \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $a \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} (1/a_n^2) < +\infty$. Тому клас цілих функцій вигляду (1) називають класом Лагерра – Пойа.

Розглянемо цілу функцію $\varphi(z) = A z^m e^{-az^2+bz}$. Використовуючи лему 1, неважко показати, що якщо $a > 0$, то φ є функцією обмеженого l-індексу з $l(x) = \max\{x, 1\}$, а з огляду на (2) вона є функцією необмеженого l-індексу для кожної функції $l \in Q$ такої, що $l(r) = o(r)$, $r \to +\infty$. Якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то φ є функцією обмеженого індексу і необмеженого l-індексу для кожної функції $l \in Q$ такої, що $l(r) = o(1)$, $r \to +\infty$. Нарешті, якщо $a = b = 0$, то φ — функція обмеженого l-індексу для кожної функції $l \in \Lambda$.

Теорема про обмеженість l-індексу добутку [6, 2, с. 34] стверджує, що якщо $l \in Q$, φ — ціла функція обмеженого l-індексу, π — ціла функція і $f(z) = \pi(z)\varphi(z)$, то для того, щоб f була функцією обмеженого l-індексу, необхідно і досить, щоб π була функцією обмеженого l-індексу.

Отже, питання про обмеженість l-індексу функції (3) зводиться до вивчення обмеженості l-індексу канонічного добутку

$$\pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n}, \quad a_n > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} < +\infty. \tag{4}$$

Надалі будемо вважати, що $\sum_{n=1}^{\infty} (1/a_n) = +\infty$. У випадку, коли $\sum_{n=1}^{\infty} (1/a_n) < < +\infty$, канонічний добуток, побудований за нулями a_n, має вигляд $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/a_n)$. Обмеженість l-індексу таких добутків досліджувалась у [14, 15].

2^0. Загальна лема про обмеженість l-індексу канонічного добутку першого роду. Будемо вважати, що нулі a_k можуть бути комплексними, $\sum_{n=1}^{\infty} (1/|a_n|^2) < +\infty$ і $\sum_{n=1}^{\infty} (1/|a_n|) = +\infty$. Тоді рід канонічного добутку дорівнює 1 і його порядок ≥ 1. Тому з огляду на (2) π є функцією необмеженого l-індексу для кожної функції $l \in Q$ такої, що $l(r) = o(1)$, $r \to +\infty$, а отже, природно розглядати випадок, коли l — неспадна функція.

Зауважимо також, що якою б не була функція $l \in \Lambda$, існують функції з класу Лагерра – Пойа необмеженого l-індексу, оскільки в цьому класі існують функції з нулями будь-якої кратності. З іншого боку, якщо кратності всіх нулів функції f обмежені одним і тим же числом, то [11] існує функція $l \in \Lambda$ така, що f є функцією обмеженого l-індексу.

Лема 2. *Нехай функція $l \in Q$ неспадна на $[0, +\infty)$, а послідовність (a_n) задовольняє умови:*

а) $|a_{n+1}| - |a_n| > \dfrac{2q_0}{l(|a_n|)}$ *для деякого* $q_0 > 0$ *і всіх* $n \geq 1$;

б) $l(|a_{n+1}|) = O(l(|a_n|))$, $n \to +\infty$;

в) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|a_n|}{|a_k|\,(|a_n| - |a_k|)} = O(l(|a_n|))$, $n \to +\infty$;

г) $\displaystyle\sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{|a_n|}{|a_k|\,(|a_k| - |a_n|)} = O(l(|a_n|))$, $n \to +\infty$.

Тоді канонічний добуток (4) *зображає цілу функцію* π *обмеженого* l*-індексу.*

Доведення. З умови а) і умов, накладених на функцію l, випливає, що $|a_n| + \frac{q_0}{l(|a_n|)} < |a_{n+1}| - \frac{q_0}{l(|a_{n+1}|)}$ та існує таке $q^0 \in (0, q_0)$, що $n\left(\frac{q^0}{l(|z_0|)}, z_0, \frac{1}{\pi}\right) \le 1$. Алє кожний круг радіуса $\frac{q}{l(|z_0|)}$, $q > q^0$, можна покрити скінченною кількістю $m(q^0, q)$ кругів радіуса $\frac{q^0}{l(|z_0|)}$. Тому $n\left(\frac{q^0}{l(|z_0|)}, z_0, \frac{1}{\pi}\right) \le m(q^0, q)$, тобто для функції π виконується умова 2 леми 1.

Зрозуміло, що для використання леми 1 досить показати, що функція π задовольняє умову 1 з $q \le q_0$.

Позначимо

$$A_n = \left\{z\colon \left||z| - |a_n|\right| \le \frac{q}{l(|a_n|)},\ |z - a_n| \ge \frac{q}{l(|a_n|)}\right\}, \quad n \ge 1,$$

$$B_n = \left\{z\colon |a_n| + \frac{q}{l(|a_n|)} \le |z| \le |a_{n+1}| - \frac{q}{l(|a_{n+1}|)}\right\}, \quad n \ge 1.$$

З (4) випливає

$$\left|\frac{\pi'(z)}{\pi(z)}\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|}{|a_k|\,|z - a_k|}. \tag{5}$$

Нехай $z \in A_n$. Оскільки з умови а) і неспадання функції l випливає нерівність $\frac{q}{l(|a_n|)} \le \frac{1}{2}\left||a_k| - |a_n|\right|$, $k \ne n$, то

$$\left|\frac{\pi'(z)}{\pi(z)}\right| \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|z|}{|a_k|\,(|z| - |a_k|)} + \frac{|z|}{|a_n|\,|z - a_n|} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|}{|a_k|\,(|a_k| - |z|)} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|a_n| - q/l(|a_n|)}{|a_k|\,(|a_n| - |a_k| - q/l(|a_n|))} + \frac{|a_n| + q/l(|a_n|)}{q|a_n|}\, l(|a_n|) + $$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_n| + q/l(|a_n|)}{|a_k|\,(|a_k| - |a_n| - q/l(|a_n|))} \le$$

$$\le 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|a_n| - q/l(|a_n|)}{|a_k|\,(|a_n| - |a_k|)} + 2\,\frac{|a_n|\, l(|a_n|) + q}{q|a_n|} + 2\sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{|a_n| + q/l(|a_n|)}{|a_k|\,(|a_k| - |a_n|)}.$$

З означення класу Q випливає $x l(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$, так що $|a_n| + q/l(|a_n|) = (1 + o(1))|a_n|$, $n \to +\infty$. Для $z \in A_n$ виконується $|z| > |a_{n-1}|$ і завдяки умові б) $l(|a_n|) = O(l(|a_{n-1}|)) = O(l(|z|))$, $n \to +\infty$. Тому з огляду на умови в) і г) для $z \in A_n$ маємо

$$\left|\frac{\pi'(z)}{\pi(z)}\right| = P_1(q)\, l(|z|), \quad n \to +\infty \tag{6}$$

(тут і далі $P_j(q)$ — додатні сталі).

Якщо ж $z \in B_n$, то завдяки умовам б) – г) аналогічно отримуємо

$$\left|\frac{\pi'(z)}{\pi(z)}\right| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{|z|}{|a_k|(|z| - |a_k|)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|}{|a_k|(|a_k| - |z|)} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_n|+q/l(|a_n|)}{|a_k|(|a_n|-|a_k|+q/l(|a_n|))} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_{n+1}|-q/l(|a_{n+1}|)}{|a_k|(|a_k|-|a_{n+1}|+q/l(|a_{n+1}|))} \le$$

$$\le 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|a_n|+q/l(|a_n|)}{|a_k|(|a_n|-|a_k|)} + \frac{|a_n|l(|a_n|)+q}{q|a_n|} + \frac{|a_{n+1}|l(|a_{n+1}|)-q}{q|a_{n+1}|} +$$

$$+ 2\sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{|a_{n+1}|-q/l(|a_{n+1}|)}{|a_k|(|a_k|-|a_{n+1}|)} \le P_2(q)l(|z|), \quad n\to+\infty. \tag{7}$$

З (5) – (7) випливає $\left|\frac{\pi'(z)}{\pi(z)}\right| \le P_3(q)\,l(|z|)$ для всіх $z\in\mathbb{C}\setminus G_q(\pi)$ і $|z|\ge R_1 = |a_1|-q/l(|a_1|)$. З іншого боку, для всіх z, $|z|\le R_1$, виконується нерівність $\frac{|\pi'(z)|}{|\pi(z)|\,l(|z|)} \le P_4(q)$. Тому $\left|\frac{\pi'(z)}{\pi(z)}\right| \le P(q)\,l(|z|)$ для всіх $z\in\mathbb{C}\setminus G_q(\pi)$, і за лемою 1 π є функцією обмеженого l-індексу. Лему 2 доведено.

3^0. Обмеженість l-індексу канонічного добутку першого роду з додатними нулями. Розглянемо випадок, коли всі $a_k>0$ і, звичайно, $\sum_{k=1}^{\infty}(1/a_k^2) < +\infty$, а $\sum_{k=1}^{\infty}(1/a_k) = +\infty$.

Перш за все зауважимо, що *канонічний добуток першого роду з додатними нулями є функцією необмеженого індексу*.

Справді, припустимо, від супротивного, що π є функцією обмеженого індексу. Тоді $\ln M_\pi(r) = O(r)$, $r\to+\infty$. З іншого боку, оскільки рід канонічного добутку $p=1$, то його порядок $\rho\ge 1$. Звідси випливає, що $\rho = p = 1$. Але $\sum_{k=1}^{\infty}(1/a_k) = +\infty$. Тому за теоремою Ліндельофа [16, с. 42] π має максимальний тип, тобто $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{\ln M_\pi(r)}{r} = +\infty$, що неможливо.

З доведення теореми Ліндельофа [16, с. 44] видно, що

$$\ln M_\pi(r) \le (1+o(1))\, r\sum_{a_k\le r}\frac{1}{a_k}, \quad r\to+\infty.$$

Тому природним є питання: чи є π функцією обмеженого l-індексу з $l(r) = (1+o(1))\, r\sum_{a_k\le r}(1/a_k)$, $r\to+\infty$? У загальному випадку відповідь на це питання негативна, оскільки з умови $\sum_{k=1}^{\infty}(1/a_k^2) < +\infty$ не випливає обмеженість кратності всіх нулів функції π одним і тим же числом. Але здається правдоподібною така гіпотеза.

Гіпотеза. *Якщо* (a_n^2) *— опукла послідовність, то* π *є функцією обмеженого* l*-індексу для кожної функції* $l\in Q$ *такої, що*

$$\sum_{a_k\le r}\frac{1}{a_k} \asymp l(r), \quad r\to+\infty. \tag{8}$$

Нам вдалося довести цю гіпотезу при додаткових умовах на (a_n). Але спочатку доведемо наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай функція* $l\in Q$ *неспадна на* $[0,+\infty)$, *а додатна послідовність* (a_k) *задовольняє умови* $\sum_{a_k\le r}(1/a_k) = O(l(r))$, $r\to+\infty$, $l(a_{n+1}) = O(l(a_n))$, $n\ln n = O(a_n l(a_n))$ *та* $a_n\sum_{k=n}^{\infty}(1/a_k^2) = O(l(a_n))$ *при* $n\to\infty$ *і* (a_n^2) *— опукла послідовність. Тоді канонічний добуток* (4) *зображає цілу функцію* π *обмеженого* l*-індексу.*

Доведення. З опуклості послідовності (a_n^2) випливає

$$\frac{a_n^2 - a_k^2}{n-k} \geq \frac{a_n^2 - a_1^2}{n-1}, \quad 1 \leq k \leq n-1. \tag{9}$$

Тому завдяки умові $n \ln n = O(a_n\, l(a_n))$, $n \to \infty$,

$$a_n - a_{n-1} = \frac{a_n^2 - a_{n-1}^2}{a_n + a_{n-1}} \geq \frac{a_n^2 - a_1^2}{2(n-1)a_n} = (1+o(1))\frac{a_n}{2n} \geq \frac{\ln n}{Kl(a_n)},$$

де K — деяка додатна стала. Звідси з огляду на умову $l(a_{n+1}) = O(l(a_n))$, $n \to \infty$, випливає виконання умови а) леми 2. Отже, залишилось показати, що виконуються умови в) і г) цієї леми.

Використовуючи (8) і (9), маємо

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_n}{a_k(a_n - a_k)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_n - a_k} \leq O(l(a_n)) + 2a_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_n^2 - a_k^2} \leq$$

$$\leq O(l(a_n)) + 2a_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-1}{(n-k)(a_n^2 - a_1^2)} \leq O(l(a_n)) + \frac{3n}{a_n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} \leq$$

$$\leq O(l(a_n)) + \frac{4n \ln n}{a_n} = O(l(a_n)), \quad n \to \infty,$$

тобто умова в) леми 2 виконується.

Аналогічно

$$\sum_{a_{n+2} \leq a_k \leq 2a_n} \frac{a_n}{a_k(a_k - a_n)} \leq 2a_n \sum_{a_{n+2} \leq a_k \leq 2a_n} \frac{1}{(a_k^2 - a_n^2)} \leq$$

$$\leq 3a_n \sum_{a_{n+2} \leq a_k \leq 2a_n} \frac{k}{(k-n)a_k^2} \leq \frac{3}{a_n} \sum_{a_{n+2} \leq a_k \leq 2a_n} \frac{k}{k-n}.$$

Але з (9) випливає $(a_{5n}^2 - a_n^2)/(5n - n) \geq (a_{5n}^2 - a_1^2)/(5n-1)$, звідки легко отримуємо нерівність $a_{5n}^2 \geq 4a_n^2$ для всіх досить великих n. Тому

$$\sum_{a_{n+2} \leq a_k \leq 2a_n} \frac{a_n}{a_k(a_k - a_n)} \leq \frac{3}{a_n} \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{k}{k-n} =$$

$$= O\left(\frac{n \ln n}{a_n}\right) = O(l(a_n)), \quad n \to \infty. \tag{10}$$

Нарешті,

$$\sum_{a_k \geq 2a_n} \frac{a_n}{a_k(a_k - a_n)} \leq 2a_n \sum_{a_k \geq 2a_n} \frac{1}{a_k^2} = O(l(a_n)), \quad n \to \infty. \tag{11}$$

З (10) і (11) випливає виконання умови г) леми 2. Тому за цією лемою функція π має обмежений l-індекс.

***Зауваження* 1.** Висновок теореми 1 є вірним і для канонічних добутків першого роду з комплексними нулями, але в усіх її умовах потрібно замінити a_n на $|a_n|$.

Наведемо декілька наслідків з теореми 1.

***Наслідок* 1.** *Нехай нулі канонічного добутку* (4) *задовольняють умови* $n \ln n = O\left(a_n \sum_{k=1}^{n} (1/a_k)\right)$ *та* $a_n \sum_{k=n}^{\infty} (1/a_k^2) = O\left(\sum_{k=1}^{n} (1/a_k)\right)$ *при* $n \to \infty$

і послідовність (a_n^2) *опукла. Тоді він зображає цілу функцію* π *обмеженого* l*-індексу для кожної* $l \in \Lambda$ *такої, що* $l(r) \asymp \sum_{a_k \le r} (1/a_k)$.

Справді, позначимо $s(r) = \sum_{a_k \le r} (1/a_k)$. Тоді функція $s(r)$ неспадна, $n \ln n = O(a_n s(a_n))$ та $s(a_{n+1}) = s(a_n) + 1/a_{n+1} = s(a_n) + o(1)$ при $n \to \infty$ і

$$s\left(r + \frac{K}{s(r)}\right) \le s(r) + \sum_{r \le a_k \le r + K/s(r)} \frac{1}{a_k} \le s(r) + \frac{n(r + K/s(r))}{r},$$

де $n(r)$ — лічильна функція послідовності (a_n). Оскільки $n = o(a_n s(a_n))$, $n \to \to \infty$, то $n(r)/r = o(s(r))$, $r \to +\infty$, і, отже, $s(r + K/s(r)) \le (1 + o(1)) s(r)$, $r \to +\infty$. Звідси випливає існування функції $l_1 \in Q$ такої, що $l_1(r) \sim s(r)$, $r \to +\infty$, і виконуються умови теореми 1. За цією теоремою π є функцією обмеженого l_1-індексу. Але тоді [2, с. 23] π — функція обмеженого l_2-індексу для $l_2(r) = q l_1(r)$, яким би не було число $q \in (0, 1)$, і, отже [2, с. 23], обмеженого l-індексу для кожної функції $l \in \Lambda$ такої, що $l(r) \ge l_2(r)$, що й потрібно було довести.

Наслідок 2. *Якщо нулі цілої функції* (3) *такі, що* $|a_{n+1}| = O(|a_n|)$, $n \ln n = O(|a_n|^2)$, $n \to \infty$, *і послідовність* (a_n^2) *опукла, то вона є функцією обмеженого* l*-індексу з* $l(r) = \max\{1, r\}$.

Справді, легко перевірити, що послідовність (a_n) задовольняє всі умови теореми 1 з $l(r) = \max\{1, r\}$ і $|a_n|$ замість a_n. Тому згідно із зауваженням 1 з теореми 1 випливає, що функція (4) з дійсними нулями є функцією обмеженого l-індексу з $l(r) = \max\{1, r\}$. Але і функція $\varphi(z) = A z^m e^{-az^2 + bz}$ є функцією обмеженого l-індексу з $l(r) = \max\{1, r\}$. Тому за теоремою про обмеженість l-індексу добутку отримуємо потрібний результат.

Наслідок 3. *Нехай нулі цілої функції* (3) *додатні і такі, що* $\ln a_{n+1} = O(\ln a_n)$, $n = O(a_n)$, $n \to \infty$, *і послідовність* (a_n^2) *опукла. Тоді якщо* $a = 0$, *то* f *є функцією обмеженого* l*-індексу з* $l(r) = \max\{1, \ln r\}$.

Справді, з умови $n = O(a_n)$, $n \to \infty$, випливає $n \ln n = O(a_n \ln a_n)$, $n \to \infty$, а також $n(t) = O(t)$, $t \to +\infty$. Тому

$$\int_0^r \frac{dn(t)}{t} \le \frac{n(r)}{r} + \int_0^r \frac{n(t)}{t^2} dt \le O(1) + O\left(\int_1^r \frac{dt}{t}\right) = O(\ln r), \quad r \to +\infty,$$

і

$$r \int_r^\infty \frac{dn(t)}{t^2} \le 2r \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^3} dt = O\left(r \int_r^\infty \frac{dt}{t^2}\right) = O(1), \quad r \to +\infty.$$

Звідси випливають співвідношення $\sum_{k=1}^n (1/a_k) = O(\ln a_n)$ і $a_n \sum_{k=n}^\infty (1/a_k^2) = O(1)$ при $n \to +\infty$. Отже, всі умови теореми 1 з $l(r) = \max\{1, \ln r\}$ виконуються, а тому π є функцією обмеженого l-індексу з $l(r) = \max\{1, \ln r\}$. Функція $\varphi(z) = A z^m e^{bz}$ є функцією обмеженого індексу і, отже, обмеженого l-індексу з $l(r) = \max\{1, \ln r\}$. За теоремою про обмеженість l-індексу добутку справедливий висновок наслідку 3.

Умова $n = O(a_n)$, $n \to \infty$, виконується, якщо послідовність (a_n) має додатний крок, тобто $a_{n+1} - a_n \ge h > 0$, $n \ge 1$. З останньої умови не випливає, взагалі кажучи, опуклість послідовності (a_n^2). Проте, якщо використати лему 2, можна довести наступне твердження.

Наслідок 4. *Нехай нулі цілої функції* (3) *додатні, мають додатний крок і* $\ln a_{n+1} = O(\ln a_n)$, $n \to \infty$. *Тоді якщо* $a = 0$, *то* f *є функцією обмеженого* l-*індексу з* $l(r) = \max\{1, \ln r\}$.

Справді, згідно з теоремою про обмеженість l-індексу добутку і з огляду на умови цього наслідку досить показати, що виконуються умови в) і г) леми 2. Маємо

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_n}{a_k(a_n - a_k)} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n - a_k} \right) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{kh} + \frac{1}{(n-k)h} \right) \le \frac{2}{h} \ln n = O(\ln a_n), \quad n \to +\infty.$$

Далі,

$$\sum_{a_{n+2} \le a_k \le 2a_n} \frac{a_n}{a_k(a_k - a_n)} \le \sum_{a_{n+2} \le a_k \le 2a_n} \frac{1}{a_k - a_n} \le$$

$$\le \sum_{a_{n+2} \le a_k \le 2a_n} \frac{1}{(k-n)h} \le \frac{1}{h} \ln \frac{n(2a_n)}{2} = O(\ln a_n), \quad n \to +\infty.$$

Нарешті,

$$\sum_{a_k \ge 2a_n + 1} \frac{a_n}{a_k(a_k - a_n)} \le 2 \sum_{a_k \ge 2a_n + 1} \frac{a_n}{a_k^2} \le 2a_n \int_{2a_n}^{\infty} \frac{dn(t)}{t^2} = O(1), \quad n \to \infty.$$

Наслідок 4 доведено.

Зауваження 2. Висновок наслідку 4 значно сильніший за висловлене в [17] припущення, що якщо додатна послідовність (a_n) має додатний крок, то функція (4) є функцією обмеженого l-індексу з $l(r) = \max\{1, r\}$.

Зауваження 3. У наслідках 3 і 4 не можна $\max\{1, \ln r\}$ замінити на функцію $l(r)$ таку, що $l(r) = o(\ln r)$, $r \to \infty$. На це вказує співвідношення (2) і ціла функція

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n},$$

для якої [16, c. 42] $\ln M_f(r) \sim r \ln r$, $r \to +\infty$.

4^0. Обмеженість l-індексу канонічного добутку першого роду з симетричними нулями. Приклад цілої функції $\sin \pi z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - z^2/n^2\right)$, яка має порядок $\rho = 1$ і є функцією обмеженого індексу, вказує на те, що канонічні добутки першого роду з симетричними нулями

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{a_n^2}\right), \quad a_n > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} < +\infty, \tag{12}$$

можуть мати обмежений індекс. У наступному твердженні від послідовності (a_n) вимагається, щоб вона задовольняла всі умови теореми 1, крім умови (8), яка і не дозволяла в цій теоремі вибирати $l(r) \equiv 1$.

Теорема 2. *Нехай функція* $l \in Q$ *неспадна на* $[0, +\infty)$. *Припустимо, що* $l(a_{n+1}) = O(l(a_n))$, $n \ln n = O(a_n l(a_n))$ *та* $a_n \sum_{k=n}^{\infty} (1/a_k^2) = O(l(a_n))$ *при* $n \to \infty$ *і* (a_n^2) — *опукла послідовність. Тоді канонічний добуток* (12) *зображає цілу функцію* p *обмеженого* l-*індексу.*

Доведення. З опуклості послідовності (a_n^2) і умови $n\ln n = O(a_n\, l(a_n))$, $n \to \to \infty$, як і при доведенні теореми 1, отримуємо нерівність $a_n - a_{n-1} \geq \ln n/(K\, l(a_n))$, з якої, як і при доведенні леми 2, випливає виконання умов 2 леми 1 та а) леми 2.

Далі, для функції (12) виконується

$$\left|\frac{p'(z)}{p(z)}\right| \leq 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|}{|z^2 - a_k^2|}.$$

Нехай B_n таке, як і при доведенні леми 2, а

$$A_n = \left\{z: \big|\,|z| - |a_n|\,\big| \leq \frac{q}{l(|a_n|)},\ |z - a_n| \geq \frac{q}{l(|a_n|)},\ |z + a_n| \geq \frac{q}{l(|a_n|)}\right\}.$$

Якщо $z \in A_n$, то

$$\frac{1}{2}\left|\frac{p'(z)}{p(z)}\right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|z|}{|z|^2 - a_k^2} + \frac{1}{|z - a_n|} + \frac{1}{|z + a_n|} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|}{a_k^2 - |z|^2} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_n - q/l(a_n)}{(a_n - q/l(a_n))^2 - a_k^2} + 2q\, l(a_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_n + q/l(a_n)}{a_k^2 - (a_n + q/l(a_n))^2}.$$

Оскільки з огляду на (9) і умову $n\ln n = O(a_n l(a_n))$, $n \to \infty$, для $k < n$ виконується

$$\left(a_n - \frac{q}{l(a_n)}\right)^2 - a_k^2 \geq (a_n^2 - a_k^2)\left(1 - \frac{2qa_n}{(a_n^2 - a_{n-1}^2)\, l(a_n)}\right) \geq$$

$$\geq (a_n^2 - a_k^2)\left(1 - \frac{2qa_n(n-1)}{(a_n^2 - a_1^2)\, l(a_n)}\right) = (1 + o(1))\,(a_n^2 - a_k^2), \quad n \to \infty,$$

а для $k > n$ аналогічно

$$a_k^2 - \left(a_n + \frac{q}{l(a_n)}\right)^2 \geq (1 + o(1))\,(a_k^2 - a_n^2), \quad n \to \infty,$$

то

$$\left|\frac{p'(z)}{p(z)}\right| \leq O\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_n}{a_n^2 - a_k^2} + l(a_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_n}{a_k^2 - a_n^2}\right), \quad n \to \infty.$$

Звідси, як і при доведенні леми 2 і теореми 1, для $z \in A_n$ маємо

$$\left|\frac{p'(z)}{p(z)}\right| = O(l(|z|)), \quad n \to \infty.$$

Справедливість останнього співвідношення для $z \in B_n$ доводиться аналогічно. Отже, виконується умова 1 леми 1 і p є функцією обмеженого l-індексу.

Наведемо кілька наслідків з теореми 2.

Наслідок 5. *Якщо* $n\ln n = O(a_n)$, $n \to \infty$, *і послідовність* (a_n^2) *опукла, то* p *є функцією обмеженого індексу.*

Наслідок 6. *Якщо* $n\ln n = O(a_n^2)$, $n \to \infty$, $a_{n+1} = O(a_n)$, $n = O(a_n)$, $n \to \to \infty$, *і послідовність* (a_n^2) *опукла, то* p *є функцією обмеженого* l*-індексу з* $l(r) = \max\{1, r\}$.

Наслідок 7. *Якщо* $\ln a_{n+1} = O(\ln a_n)$, $n = O(a_n)$, $n \to \infty$, *і послідовність* (a_n^2) *опукла, то* p *є функцією обмеженого* l*-індексу з* $l(r) = \max\{1, \ln r\}$.

У випадку, коли послідовність (a_n) має додатний крок, умовою опуклості послідовності (a_n^2) можна знехтувати.

***Наслідок* 8.** *Якщо послідовність* (a_n) *має додатний крок і* $\ln a_{n+1} = O(\ln a_n)$, $n \to \infty$, *то* p *є функцією обмеженого* l*-індексу з* $l(r) = \max\{1, \ln r\}$.

***Зауваження* 4.** Висновок наслідку 8 значно сильніший за висловлене в [17] припущення, що якщо додатна послідовність (a_n) має додатний крок, то функція (12) є функцією обмеженого l-індексу з $l(r) = \max\{1, r\}$.

5^0. Можливі узагальнення. Використовуючи теорему про обмеженість l-індексу добутку, кожне з наведених вище тверджень можна узагальнити. Для ілюстрації розглянемо, наприклад, наслідок 5. Будемо говорити, що додатна послідовність (a_n) належить класу A, якщо вона має додатний крок і $\ln a_{n+1} = O(\ln a_n)$, $n \to \infty$.

***Наслідок* 9.** *Нехай послідовність нулів цілої функції* (3) *є об'єднанням послідовностей* $(a_{k;n})$, $1 \le k \le K$, *з класу* A. *Тоді якщо* $a = 0$, *то* f *є функцією обмеженого* l*-індексу з* $l(r) = \max\{1, \ln r\}$.

Справді, за наслідком 4 кожний канонічний добуток

$$\pi_k(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_{k;n}}\right)e^{z/a_{k;n}}$$

є функцією обмеженого l-індексу з $l(r) = \max\{1, \ln r\}$. Оскільки $\varphi(z) = A z^m e^{bz}$ є також функцією обмеженого l-індексу з $l(r) = \max\{1, \ln r\}$ і $f(z) = \varphi(z)\pi_1(z)\ldots\pi_K(z)$, то за теоремою про обмеженість l-індексу добутку f — функція обмеженого l-індексу з $l(r) = \max\{1, \ln r\}$.

1. *Кузык А. Д., Шеремета М. Н.* Целые функции ограниченного l-распределения значений // Мат. заметки. – 1986. – **39**, № 1. – С. 3–13.
2. *Sheremeta M. M.* Analytic functions of bounded index. – Lviv: VNTL Publ., 1999. – 141 p.
3. *Lepson B.* Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index // Proc. Symp. Pure Math. – Providence, Phode Island: Amer. Math. Soc., 1968. – Vol. 2. – P. 298–307.
4. *Hayman W. K.* Differential inequalities and local valency // Pacif. J. Math. – 1973. – **44**. – P. 117–137.
5. *Shah S. M.* Entire functions of bounded index // Lect. Notes Math. – 1977. – **589**. – P. 117–145.
6. *Шеремета М. Н., Кузык А. Д.* О логарифмической производной и нулях целой функции ограниченного l-индекса // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, № 2. – С. 142–150.
7. *Гольдберг А. А., Шеремета М. Н.* О существовании целой трансцендентной функции ограниченного l-индекса // Мат. заметки. – 1995. – **57**, № 1. – С. 125–129.
8. *Бордуляк М. Т., Шеремета М. Н.* О существовании целых функций ограниченного l-индекса и l-регулярного роста // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 9. – С. 1166–1182.
9. *Гольдберг А. А.* Оцінка модуля логарифмічної похідної функції Міттаг-Леффлера та її застосування // Мат. ст. – 1996. – **5**, № 1. – С. 21–30.
10. *Бордуляк М. Т.* Обмеженість розподілу значень функції Міттаг-Леффлера // Там же. – 1998. – **9**, № 2. – С. 177–186.
11. *Bordulyak M. T.* A proof of Sheremeta conjecture concerning entire function of bounded l-index // Mat. Stud. – 1999. – **11**, № 2. – P. 108–110.
12. *Laguerre E.* Oeuvres I. – Paris: Gauthier-Villars, 1898.
13. *Polya G.* Uber Annaherung durch Polynome mit lauter reelen Wurzeln // Rend. Circ. mat. Palermo. – 1913. – **36**. – P. 279–295.
14. *Fricke G.* Entire functions having positive zeros // Indian J. Pure and Appl. Math. – 1974. – **5**, № 5. – P. 478–485.
15. *Шеремета М. М.* Уточнення однієї теореми Фріке // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 3. – С. 412–417.
16. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
17. *Шеремета М. М.* Нерозв'язані задачі в теорії цілих функцій обмеженого l-індексу // Сучасні пробл. математики: Матер. Міжнар. наук. конф. Ч. 3. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – С. 218–220.

Одержано 20.11.2000,
після доопрацювання — 05.11.2001