

В. А. Теско (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ПРОСТОРИ, ЩО ВИНИКАЮТЬ ПРИ ПОБУДОВІ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНОГО АНАЛІЗУ ЗА БІОРТОГОНАЛЬНОЮ СХЕМОЮ

We study properties of infinite-order operators of annihilation acting in spaces of test functions. We use the results obtained to establish the coincidence of spaces of test functions.

Вивчаються властивості операторів знищення нескінченного порядку, що діють у просторах основних функцій. Отримані результати застосовуються для встановлення рівності просторів основних функцій.

Вступ. На початку 90-х років минулого століття виник і почав активно розроблятися біортогональний підхід до побудови теорії узагальнених функцій нескінченновимірної змінної x зі спеціальними просторами основних функцій і спаренням, що задається інтегруванням за деякою ймовірнісною мірою $d\rho(x)$ (див. [1–20]).

При такому підході простори основних функцій будуються певним чином, виходячи з деякої системи функцій. Конструкцію побудови таких просторів найпростіше пояснити на модельному одновимірному випадку.

Нехай $h(x, \lambda)$ — задана функція, яка при кожному $x \in Q$ (Q — сепарабельний метричний простір) допускає розклад

$$h(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} h_n(x), \quad B_h = \{\lambda \in \mathbb{C}^1 \mid |\lambda| < R_h\} \quad (0.1)$$

з коефіцієнтами $h_n(x) \in \mathbb{C}^1$. Іншими словами, при кожному $x \in Q$ функція $\mathbb{C}^1 \ni \lambda \mapsto h(x, \lambda) \in \mathbb{C}^1$ є аналітичною в деякому околі $0 \in \mathbb{C}^1$.

При фіксованих $q \in \mathbb{N}$ і $K > 1$ за коефіцієнтами $h_n(x)$ цієї функції, як за ортогональним базисом, побудуємо гільбертів простір

$$H^h(q) := \left\{ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n h_n(x), f_n \in \mathbb{C}^1 \mid \|f_n\|_{H^h(q)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\} \quad (0.2)$$

з відповідним скалярним добутком.

Нехай ρ — борелівська ймовірнісна міра на Q . Виявляється, що за певних припущень на функцію $h(x, \lambda)$ і міру ρ (див. [12]) простір $H^h(q)$ (при достатньо великому $K > 1$) можна трактувати як позитивний по відношенню до нульового $(L^2) := L^2(Q, d\rho(x))$. Це дає можливість будувати оснащення простору (L^2) позитивними і негативними просторами $H^h(q)$ і $H^h(-q)$:

$$H^h(-q) \supset (L^2) \supset H^h(q), \quad (0.3)$$

і тим самим отримати теорію основних і узагальнених функцій змінної $x \in Q$.

Поряд з простором $H^h(q)$ доречно розглянути простір $H^k(q)$, побудований за правилом (0.2) за коефіцієнтами $\kappa_n(x)$ функції

$$\kappa(x, \lambda) = \ell(\lambda) h(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \kappa_n(x), \quad \lambda \in B_\kappa \subset B_h,$$

де $\ell(\lambda)$ — аналітична в околі $0 \in \mathbb{C}^1$ функція така, що $\ell(0) \neq 0$.

В [12] (теорема 5.1) встановлено щільність і неперервність вкладень

$$H^K(q) \hookrightarrow H^h(q-1), \quad H^h(q) \hookrightarrow H^K(q-1) \quad (0.4)$$

(тут $q \in \mathbb{N}_3 := \{3, 4, \dots\}$, константа $K > 1$ є достатньо великою і спільною для просторів $H^h(q)$ та $H^K(q)$).

Завдяки останньому і (0.3) простір $H^K(q)$ також можна трактувати як позитивний по відношенню до нульового (L^2). Як результат, можна будувати оснащення простору (L^2), беручи за позитивний як простір $H^h(q)$, так і простір $H^K(q)$.

У цій роботі ми вивчимо деякі властивості операторів знищення нескінченного порядку, що діють у просторах основних функцій. А головне, використовуючи властивості цих операторів, покажемо, що при достатньо великому $K > 1$ $H^h(q)$ і $H^K(q)$, $q \in \mathbb{N}_3$, рівні як топологічні простори.

Для встановлення рівності топологічних просторів $H^h(q)$ і $H^K(q)$ суттєву роль буде відігравати наступна лема.

Лема 0.1. *Нехай лінійна множина \mathcal{P} є щільною в банахових просторах E_1 і E_2 (з нормами $\|\cdot\|_{E_1}$ і $\|\cdot\|_{E_2}$ відповідно). Припустимо, що на множині \mathcal{P} визначено лінійні оператори A і B , які як оператори*

$$E_2 \supset \mathcal{P} \ni \varphi \mapsto A\varphi \in E_2, \quad E_1 \supset \mathcal{P} \ni \varphi \mapsto B\varphi \in E_1$$

є неперервними, а як оператори

$$E_1 \supset \mathcal{P} \ni \varphi \mapsto A\varphi \in E_2, \quad E_2 \supset \mathcal{P} \ni \varphi \mapsto B\varphi \in E_1$$

— ізометричними.

Тоді оператор $U: E_1 \rightarrow E_2$, що є продовженням за неперервністю оператора

$$E_1 \supset \mathcal{P} \ni \varphi \mapsto U\varphi = \varphi \in \mathcal{P} \subset E_2, \quad (0.5)$$

реалізує топологічний ізоморфізм між E_1 і E_2 .

Доведення. Для доведення леми досить встановити еквівалентність норм $\|\cdot\|_{E_1}$ і $\|\cdot\|_{E_2}$ на множині \mathcal{P} , точніше, переконатися в існуванні констант $c_1 > 0$ і $c_2 > 0$ таких, що

$$c_1 \|\varphi\|_{E_1} \leq \|\varphi\|_{E_2} \leq c_2 \|\varphi\|_{E_1}, \quad \varphi \in \mathcal{P}. \quad (0.6)$$

Справді, якщо оцінка (0.6) виконується, то оператор U (0.5) є визначеним і неперервним. Далі, нехай $f \in E_1$ і $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$, $\varphi_n \in \mathcal{P}$, — довільна послідовність, що збігається до f в E_1 . Тоді $\varphi_n \rightarrow Uf$ при $n \rightarrow \infty$ в топології простору E_2 . Згідно з (0.6) для кожного $\varphi_n \in \mathcal{P}$, $n \in \mathbb{N}_0$, є справедливою оцінка

$$c_1 \|\varphi_n\|_{E_1} \leq \|\varphi_n\|_{E_2} \leq c_2 \|\varphi_n\|_{E_1}. \quad (0.7)$$

Перейшовши в (0.7) до границі при $n \rightarrow \infty$, отримаємо

$$c_1 \|f\|_{E_1} \leq \|Uf\|_{E_2} \leq c_2 \|f\|_{E_1}, \quad f \in E_1. \quad (0.8)$$

Завдяки (0.8) область значень $\text{Ran}(U)$ оператора U є замкненою в тополо-

гії простору E_2 , а оскільки $\mathcal{P} = \text{Ran}(U) \subset \text{Ran}(U)$ і множина \mathcal{P} є щільною в E_2 , то $\text{Ran}(U) = E_2$. Враховуючи останнє, на підставі нерівностей (0.8) робимо висновок, що оператор $U: E_1 \rightarrow E_2$ є взаємно однозначним і взаємно неперервним відображенням між просторами E_1 і E_2 , тобто реалізує топологічний ізоморфізм між цими просторами.

Пересвідчимось в існуванні оцінки (0.6). Оскільки оператор A як оператор в E_2 ($\text{Dom}(A) = \mathcal{P}$) є неперервним, то існує константа $c_3 > 0$ така, що

$$\|A\varphi\|_{E_2} \leq c_3 \|\varphi\|_{E_2}, \quad \varphi \in \mathcal{P}. \tag{0.9}$$

Аналогічно, існує константа $c_4 > 0$ така, що

$$\|B\varphi\|_{E_1} \leq c_4 \|\varphi\|_{E_1}, \quad \varphi \in \mathcal{P}. \tag{0.10}$$

Крім цього, на підставі ізометричності операторів A і B маємо

$$\|A\varphi\|_{E_2} = \|\varphi\|_{E_1}, \quad \|B\varphi\|_{E_1} = \|\varphi\|_{E_2}, \quad \varphi \in \mathcal{P}. \tag{0.11}$$

Використовуючи (0.9) і першу рівність в (0.11), одержуємо

$$\|\varphi\|_{E_1} \leq c_3 \|\varphi\|_{E_2}, \quad \varphi \in \mathcal{P}. \tag{0.12}$$

Аналогічно із (0.10) і другої рівності в (0.11) маємо

$$\|\varphi\|_{E_2} \leq c_4 \|\varphi\|_{E_1}, \quad \varphi \in \mathcal{P}.$$

Враховавши останнє і (0.12), легко отримаємо (0.6).

1. Загальні відомості про базисні функції та пов'язані з ними простори. Розглянемо фіксований ланцюжок

$$\mathcal{N}' := \text{ind} \lim_{p \in \mathbb{N}} N_{-p} \supset \dots \supset N_{-p} \supset \dots \supset N_0 \supset \dots \supset N_p \supset \dots \supset \text{pr} \lim_{p \in \mathbb{N}} N_p =: \mathcal{N} \tag{1.1}$$

дійсних сепарабельних гільбертових просторів зі спарюванням $(\cdot, \cdot)_{N_0} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ по відношенню до нульового простору N_0 , де $N_{-p} := (N_p)'$. Припустимо, що $\|\cdot\|_{N_0} \leq \|\cdot\|_{N_1} \leq \dots$ і вкладення $N_{p+1} \hookrightarrow N_p$, $p \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, є квазіядерним (тобто Гільберта–Шмідта; норму Гільберта–Шмідта будемо позначати $\|\cdot\|_{HS}$).

Комплексифікуючи простори ланцюжка (1.1), тобто переходячи від N_p , \mathcal{N} до $N_{p, \mathbb{C}}$, $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ і беручи їх симетричні тензорні степені $\hat{\otimes}$ (див. [21]), будемо при кожному $n \in \mathbb{N}_0$ ядерний ланцюжок

$$\left(\mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}\right)' := \text{ind} \lim_{p \in \mathbb{N}} N_{-p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n} \supset N_{-p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n} \supset N_{0, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n} \supset N_{p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n} \supset \text{pr} \lim_{p \in \mathbb{N}} N_{p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n} =: \mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$$

(при $n = 0$ всі простори збігаються з \mathbb{C}^1). Комплексне спарювання $(\cdot, \cdot)_{N_{p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}$ збігається з дійсним $(\cdot, \cdot)_{N_p^{\hat{\otimes} n}} = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Позначимо через $\text{Hol}_0(\mathcal{N}_{\mathbb{C}})$ простір ростків аналітичних в $0 \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ функцій $\phi: \mathcal{N}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}^1$. Наділимо його індуктивною топологією, заданою сім'єю норм

$$\|\phi\|_{p, l} := \sup_{\|\lambda\|_{N_{p, \mathbb{C}}} \leq K^{-l}} |\phi(\lambda)|, \quad p, l \in \mathbb{N},$$

з фіксованим $K > 1$. Зрозуміло, що $\text{Hol}_0(\mathcal{N}_{\mathbb{C}})$ є комутативною алгеброю відносно звичайного множення функцій.

Згідно з [12] (теорема 2.1), [20] має місце рівність топологічних просторів

$$\text{Hol}_0(\mathcal{N}_{\mathbb{C}}) = \text{ind} \lim_{p, q \in \mathbb{N}} \text{Hol}(N_{p, \mathbb{C}}, q),$$

де $\text{Hol}(N_{p, \mathbb{C}}, q)$, $p, q \in \mathbb{N}$, — гільбертів простір аналітичних в $0 \in N_{p, \mathbb{C}}$ функцій:

$$\begin{aligned} \text{Hol}(N_{p, \mathbb{C}}, q) &= \left\{ \phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, \xi_n \rangle, \xi_n \in N_{-p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, \lambda \in B_p(K^{-q/2}) \mid \right. \\ &\quad \left. \|\phi\|_{\text{Hol}(N_{p, \mathbb{C}}, q)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\xi_n\|_{N_{-p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}^2 K^{-qn} < \infty \right\}, \\ B_p(K^{-q/2}) &= \left\{ \lambda \in N_{p, \mathbb{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{p, \mathbb{C}}} < K^{-q/2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Нехай Q — сепарабельний метричний простір точок x, y, \dots і $C(Q)$ — лінійний простір усіх комплекснозначних локально обмежених (тобто обмежених на кожній кулі в Q) неперервних функцій на Q . Будемо вважати, що $C(Q)$ — топологічний простір зі збіжністю, рівномірною на кожній кулі з Q .

Нехай U_0 — деякий окіл нуля в просторі $N_{1, \mathbb{C}}$ і $Q \times U_0 \ni \{x, \lambda\} \mapsto h(x, \lambda) \in \mathbb{C}^1$ — задана функція. Припустимо, що для кожного x вона є аналітичною в $0 \in N_{1, \mathbb{C}}$ функцією змінної λ , для кожного $\lambda \in U_0$ $h(\cdot, \lambda) \in C(Q)$ і, крім того, локально обмежена рівномірно відносно λ із довільної замкненої кулі з U_0 . Зафіксуємо функцію h зі вказаними властивостями.

Завдяки аналітичності по λ функція $h(x, \lambda)$ при кожному $x \in Q$ допускає розклад у ряд (див. [12], п. 3)

$$h(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, h_n(x) \rangle, \quad \lambda \in B_h = \{ \lambda \in N_{2, \mathbb{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{2, \mathbb{C}}} < R_h \}, \quad (1.3)$$

який рівномірно збігається (по λ) в кожній замкненій кулі з B_h . Припускається існування спільного для всіх $x \in Q$ околу B_h , в якому має місце розклад (1.3).

Зазначимо, що для кожного $x \in Q$ коефіцієнти (базисні функції) $h_n(x) \in N_{-2, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, а елементарні функції $Q \ni x \mapsto \langle f_n, h_n(x) \rangle \in \mathbb{C}^1$ ($f_n \in N_{p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}_3 := \{3, 4, \dots\}$) є неперервними та локально обмеженими (див. [12]).

При фіксованих $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$ і $K > 1$ розглянемо гільбертів простір формальних рядів

$$\begin{aligned} H^h(p, q) &:= \left\{ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(x) \rangle, f_n \in N_{p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, x \in Q \mid \right. \\ &\quad \left. \|f\|_{H^h(p, q)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{N_{p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}^2 (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

з відповідним скалярним добутком.

Легко перевірити [12] (лема 4.2), що при достатньо великому $K > 1$ перший ряд в (1.4) збігається рівномірно на кожній кулі з Q до неперервної локально

обмеженої функції (зафіксуємо таке $K > 1$). Разом з тим може трапитись так, що різні елементи простору $H^h(p, q)$ збігаються як функції змінної $x \in Q$ (тобто $\sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot) \rangle \neq \sum_{n=0}^{\infty} \langle g_n, h_n(\cdot) \rangle$ в $H^h(p, q)$, але $\sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(x) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle g_n, h_n(x) \rangle \quad \forall x \in Q$). Щоб уникнути цієї незручності, припустимо, що система базисних функцій $(h_n(x))_{n=0}^{\infty}$ є мінімальною в такому розумінні: якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(x) \rangle = f(x)$, $f_n \in N_{p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, збігається в $H^h(p, q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, і його сума дорівнює 0 для всіх $x \in Q$, то $f_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Іншими словами, якщо $f \in H^h(p, q)$ і $f(x) = 0 \quad \forall x \in Q$, то $f = 0$ в топології простору $H^h(p, q)$.

Зауваження 1.1. За такого припущення мінімальності, якщо функція $f \in C(Q)$ допускає зображення

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(x) \rangle, \quad x \in Q, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{N_{p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}^2 (n!)^2 K^{qn} < \infty, \quad p \in \mathbb{N}_3, \quad q \in \mathbb{N}, \quad (1.5)$$

то воно єдине. Тому природно гільбертів простір $H^h(p, q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, розуміти як простір неперервних локально обмежених функцій f на Q , що допускають зображення (1.5), з відповідною гільбертовою нормою $\|\cdot\|_{H^h(p, q)}$, заданою на цьому просторі. Тобто

$$H^h(p, q) = \left\{ f \in C(Q) \mid f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(x) \rangle, \right. \\ \left. \|f\|_{H^h(p, q)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{N_{p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}^2 (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\}. \quad (1.6)$$

Зауваження 1.2. Зрозуміло, що множина

$$\mathcal{P}(Q) := \left\{ \varphi \in C(Q) \mid \varphi(x) = \sum_{n=0}^s \langle \varphi_n, h_n(x) \rangle, \quad x \in Q, \quad \varphi_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, \quad s \in \mathbb{N}_0 \right\} \quad (1.7)$$

є щільною в гільбертовому просторі $H^h(p, q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$.

Зауваження 1.3. Простір $H^h(p, q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, є унітарно ізоморфним ваговому простору Фока $\mathcal{F}(N_p, \gamma(q))$, $\gamma(q) = ((n!)^2 K^{qn})_{n=0}^{\infty}$ послідовностей

$$f = (f_n)_{n=0}^{\infty}, \quad f_n \in \mathcal{F}_n(N_p) := N_{p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}; \quad (1.8)$$

$$\|f\|_{\mathcal{F}(N_p, \gamma(q))}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{N_{p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}^2 (n!)^2 K^{qn} < \infty.$$

Цей ізоморфізм задається відображенням

$$\mathcal{F}(N_p, \gamma(q)) \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (I^h f)(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot) \rangle \in H^h(p, q). \quad (1.9)$$

Поряд з простором $H^h(p, q)$, користуючись тим же правилом (1.4), побудуємо простір за коефіцієнтами, які визначаються з розкладу типу (1.3), але для видозміненої лівої частини, тісно пов'язаної з $h(x, \lambda)$.

Нехай $\ell: N_{1, \mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}^1$ — аналітична в $0 \in N_{1, \mathbb{C}}$ функція і $\ell(0) \neq 0$ (зафік-

суємо надалі таку функцію). Тоді для кожного $x \in Q$ функція $\kappa(x, \lambda) := \ell(\lambda)h(x, \lambda)$ є аналітичною в $0 \in N_{1, \mathbb{C}}$ і допускає зображення типу (1.3)

$$\kappa(x, \lambda) = \ell(\lambda)h(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \kappa_n(x) \rangle,$$

$$\lambda \in B_{\kappa} = \{ \lambda \in N_{2, \mathbb{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{2, \mathbb{C}}} < R_{\kappa} \}. \quad (1.10)$$

Для кожного $x \in Q$ коефіцієнти (базисні функції, пов'язані з $\kappa(x, \lambda)$) $\kappa_n(x) \in N_{-2, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, а елементарні функції $Q \ni x \mapsto \langle f_n, \kappa_n(x) \rangle \in \mathbb{C}^1$ ($f_n \in N_{p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}_3$) є неперервними та локально обмеженими.

При фіксованих $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$ і $K > 1$ побудуємо гільбертів простір формальних рядів

$$H^K(p, q) := \left\{ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \kappa_n(x) \rangle, f_n \in N_{p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, x \in Q \mid \right.$$

$$\left. \|f\|_{H^K(p, q)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{N_{p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}^2 (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\}. \quad (1.11)$$

Неважко бачити, що при достатньо великому $K > 1$ перший ряд в (1.11) збігається рівномірно на кожній кулі з Q до неперервної локально обмеженої функції. Крім того, на підставі леми 5.3 із [12] система базисних функцій $(\kappa_n(x))_{n=0}^{\infty}$ є мінімальною в такому розумінні: якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \kappa_n(x) \rangle = f(x)$, $f_n \in N_{p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, збігається в $H^K(p, q)$, $p, q \in \mathbb{N}_3$, і його сума дорівнює 0 для всіх $x \in Q$, то $f_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Інакше кажучи, якщо $f \in H^K(p, q)$ і $f(x) = 0 \forall x \in Q$, то $f = 0$ в топології простору $H^K(p, q)$. Тому простір $H^K(p, q)$, $p, q \in \mathbb{N}_3$, природно трактувати таким чином:

$$H^K(p, q) = \left\{ f \in C(Q) \mid f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \kappa_n(x) \rangle, \right.$$

$$\left. \|f\|_{H^K(p, q)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{N_{p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}^2 (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\}. \quad (1.12)$$

Надалі стали $K > 1$ вибираємо достатньо великою та спільною для просторів $H^h(p, q)$ і $H^K(p, q)$.

Зауваження 1.4. Простір $H^K(p, q)$, $p, q \in \mathbb{N}_3$, є унітарно ізоморфним ваговому простору Фока $\mathcal{F}(N_p, \gamma(q))$ (1.8) з вагою $\gamma(q) = ((n!)^2 K^{qn})_{n=0}^{\infty}$. Цей ізоморфізм задається відображенням

$$\mathcal{F}(N_p, \gamma(q)) \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (I^K f)(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \kappa_n(\cdot) \rangle \in H^K(p, q). \quad (1.13)$$

Тісний зв'язок між функціями $h(x, \lambda)$ і $\kappa(x, \lambda)$ дає можливість знайти формули для перерахунку базисних функцій $h_n(x)$ і $\kappa_n(x)$ одна через одну. А саме, оскільки функція $\ell(\lambda)$ є аналітичною і $\ell(0) \neq 0$, то функція $1/\ell(\lambda)$ є також аналітичною в $0 \in N_{1, \mathbb{C}}$. Тому ці функції допускають зображення

$$\ell(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \alpha_n \rangle, \quad \frac{1}{\ell(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \beta_n \rangle, \tag{1.14}$$

$$\alpha_n, \beta_n \in N_{-2, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \lambda \in B_\ell = \{ \lambda \in N_{2, \mathbb{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{2, \mathbb{C}}} < R_\ell \}.$$

Розклад (1.3) (відповідно (1.10)) є добутком (1.10) (відповідно (1.3)) і другого (відповідно першого) розкладу в (1.14). Так, порівнюючи коефіцієнти, отримуємо (див. [12], п. 5)

$$\kappa_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} \alpha_{n-m} \hat{\otimes} h_m(x), \tag{1.15}$$

$$h_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} \beta_{n-m} \hat{\otimes} \kappa_m(x), \quad x \in Q, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Нагадаємо один факт (див., наприклад, [12], рівність (5.15)): якщо $\xi_k \in N_{-p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} k}$, $f_m \in N_{p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}$, $m \geq k$, то існує $f_m^{\xi_k} \in N_{p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(m-k)}$, $p \in \mathbb{N}_0$, таке, що

$$\langle f_m, \xi_k \hat{\otimes} \eta_{m-k} \rangle = \langle f_m^{\xi_k}, \eta_{m-k} \rangle, \quad \eta_{m-k} \in N_{-p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(m-k)}. \tag{1.16}$$

Зважаючи на формули (1.15) і (1.16), можна дати інший опис множини $\mathcal{P}(Q)$.

Лема 1.1 [12] (зауваження 5.3). Для довільної функції $\varphi \in \mathcal{P}(Q)$ існує однозначне зображення

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^s \langle \varphi_n, \kappa_n(x) \rangle, \quad \varphi_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, \quad x \in Q, \quad s \in \mathbb{N}_0, \tag{1.17}$$

і, навпаки, довільна функція вигляду (1.17) належить $\mathcal{P}(Q)$.

Зауваження 1.5. Очевидно, що множина $\mathcal{P}(Q)$ є щільною в гільбертовому просторі $H^K(p, q)$, $p, q \in \mathbb{N}_3$.

Доведемо необхідну для подальшого викладу лему.

Лема 1.2. При достатньо великому $K > 1$ функції ℓ і $1/\ell$ (1.14) належать гільбертовому простору $\text{Hol}(N_{3, \mathbb{C}}, 1)$.

Доведення. Покажемо, що $\ell \in \text{Hol}(N_{3, \mathbb{C}}, 1)$ (належність функції $1/\ell$ до $\text{Hol}(N_{3, \mathbb{C}}, 1)$ встановлюється аналогічно). Наявність першого розкладу в (1.14) дає можливість отримати оцінку (див. [12], оцінка (5.7))

$$\|\alpha_n\|_{N_{-3, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \leq \frac{n! e^n \|O_{3,2}\|_{HS}^n}{r^n} \sup_{\|\lambda\|_{N_{2, \mathbb{C}}} = r} |\ell(\lambda)|, \tag{1.18}$$

$$\lambda \in N_{3, \mathbb{C}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad r \in (0, R_\ell),$$

де $\|O_{3,2}\|_{HS}$ — норма Гільберта – Шмідта оператора вкладення $O_{3,2}: N_3 \rightarrow N_2$.

Далі, використавши означення (1.2) простору $\text{Hol}(N_{3, \mathbb{C}}, 1)$, (1.14) і (1.18), дістанемо

$$\|\ell\|_{\text{Hol}(N_{3, \mathbb{C}}, 1)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \alpha_n \right\|_{N_{-3, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}^2 K^{-n} \leq \left(\sup_{\|\lambda\|_{N_{2, \mathbb{C}}} = r} |\ell(\lambda)| \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2n} \|O_{3,2}\|_{HS}^{2n}}{r^{2n} K^n}. \tag{1.19}$$

Зафіксуємо $r \in (0, R_\ell)$ і виберемо $K > 1$ настільки великим, щоб $e^2 \|O_{3,2}\|_{HS}^2 r^{-2} K^{-1}$ було меншим за одиницю. Тоді з (1.19) отримаємо

$$\|\ell\|_{\text{Hol}(N_{3,C},1)}^2 \leq c \left(\sup_{\|\lambda\|_{N_{2,C}}=r} |\ell(\lambda)| \right)^2 < \infty,$$

а тому $\ell \in \text{Hol}(N_{3,C},1)$.

Відмітимо, що для того, щоб лема 1.2 була справедливою, K повинно бути таким:

$$K > \max\{1, e^2 R_\ell^{-2} \|O_{3,2}\|_{HS}^2\}$$

(при доведенні леми 1.2 необхідно брати $r = R_\ell - \varepsilon$ з достатньо малим фіксованим $\varepsilon > 0$).

2. Оператори знищення нескінченного порядку. В даному пункті ми введемо оператори знищення нескінченного порядку (подібно до того, як це зроблено в [16, 17]) і встановимо деякі властивості цих операторів. А головне, покажемо, що $H^h(p, q)$ і $H^k(p, q)$ збігаються як топологічні простори.

Простори $H^h(p, q)$ і $H^k(p, q)$ є унітарно ізоморфними ваговому простору Фока $\mathcal{F}(N_p, \gamma(q))$ (зауваження 1.3, 1.4), на якому визначено оператор знищення. Тому в цих просторах природно означити оператор знищення як образ оператора знищення, що діє в просторі Фока $\mathcal{F}(N_p, \gamma(q))$.

Відомо, що оператор знищення $a_-(\xi_m)$ з коефіцієнтом $\xi_m \in N_{-p, \mathbb{C}}^{\otimes m}$, $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, визначено в просторі Фока $\mathcal{F}(N_{p'}, \gamma(q))$, $p' \geq p$, $q \in \mathbb{N}$, як лінійний неперервний оператор, що діє в кожному n -частковому підпросторі $\mathcal{F}_n(N_{p'})$ за правилом

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(N_{p'}) \ni f_n &\mapsto a_-(\xi_m)f_n = \\ &= \begin{cases} n \dots (n-m+1) f_n^{\xi_m} \in \mathcal{F}_{n-m}(N_{p'}), & \text{якщо } n \in \{m, m+1, \dots\}; \\ a_-(\xi_m)f_n = 0, & \text{якщо } n = 0, \dots, m-1, \end{cases} \end{aligned}$$

де $f_n^{\xi_m}$ визначається з (1.16).

У просторі $H^h(p', q)$, $p' \geq p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, введемо оператор знищення $\partial_h(\xi_m)$ з коефіцієнтом $\xi_m \in N_{-p, \mathbb{C}}^{\otimes m}$, $m \in \mathbb{N}_0$, поклавши

$$\partial_h(\xi_m) := I^h a_-(\xi_m) (I^h)^{-1}. \quad (2.1)$$

Аналогічно, у просторі $H^k(p', q)$, $p' \geq p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}_3$, введемо оператор знищення

$$\partial_k(\xi_m) := I^k a_-(\xi_m) (I^k)^{-1} \quad (2.2)$$

(нагадаємо, що I^h і I^k — відображення (1.9) і (1.13) відповідно).

Зрозуміло, що оператор $\partial_h(\xi_m)$, $\xi_m \in N_{-p, \mathbb{C}}^{\otimes m}$, $p \in \mathbb{N}_3$, діє неперервно в кожному просторі $H^h(p', q)$, а оператор $\partial_k(\xi_m)$ — відповідно в кожному просторі $H^k(p', q)$, $p' \geq p$, $q \in \mathbb{N}_3$.

В [12] (лема 12.2) встановлено, що

$$\partial_h(\xi_m) \upharpoonright \mathcal{P}(Q) = \partial_\kappa(\xi_m) \upharpoonright \mathcal{P}(Q) =: \partial(\xi_m), \quad (2.3)$$

і дія оператора $\partial(\xi_m)$, $\xi_m \in N_{-p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}$, $m \in \mathbb{N}_0$, на елементарних функціях $\langle \varphi_n, h_n(x) \rangle$, $\varphi_n \in \mathcal{X}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, є такою:

$$\forall x \in Q: \partial(\xi_m) \langle \varphi_n, h_n(x) \rangle = \begin{cases} \frac{n!}{(n-m)!} \langle \varphi_n, \xi_m \hat{\otimes} h_{n-m}(x) \rangle, & \text{якщо } n \geq m; \\ 0, & \text{якщо } n < m. \end{cases} \quad (2.4)$$

На елементарних функціях $\langle \varphi_n, \kappa_n(x) \rangle$ оператор $\partial(\xi_m)$ діє аналогічно (із заміною в (2.4) h на κ).

Нехай $\phi(\cdot) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle \cdot^{\otimes m}, \xi_m \rangle \in \text{Hol}(N_{p, \mathbb{C}}, q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$. На множині $\mathcal{P}(Q)$ визначимо оператор знищення нескінченного порядку, поклавши

$$\phi(\partial) := \sum_{m=0}^{\infty} \partial(\xi_m). \quad (2.5)$$

Зрозуміло, що це означення є коректним (оскільки при $\varphi \in \mathcal{P}(Q)$ ряд $\phi(\partial)\varphi$ містить лише скінченну кількість членів) і оператор $\phi(\partial)$ є лінійним.

Лема 2.1. *Нехай $\phi(\cdot) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle \cdot^{\otimes m}, \xi_m \rangle \in \text{Hol}(N_{p, \mathbb{C}}, q-1)$, $p, q \in \mathbb{N}_3$. Тоді $\phi(\partial)$ як оператор*

$$H^h(p, q) \supset \mathcal{P}(Q) \ni \varphi \mapsto \phi(\partial)\varphi, \quad \varphi \in H^h(p, q) \quad (2.6)$$

і як оператор

$$H^\kappa(p, q) \supset \mathcal{P}(Q) \ni \varphi \mapsto \phi(\partial)\varphi, \quad \varphi \in H^\kappa(p, q) \quad (2.7)$$

є неперервним.

Доведення. Встановимо неперервність оператора (2.6) (неперервність оператора (2.7) встановлюється аналогічно). Зважаючи на те, що оператор $\phi(\partial)$ є лінійним, досить переконатись у справедливості оцінки

$$\exists c > 0: \|\phi(\partial)\varphi\|_{H^h(p, q)} \leq c \|\phi\|_{\text{Hol}(N_{p, \mathbb{C}}, q-1)} \|\varphi\|_{H^h(p, q)}, \quad \varphi \in \mathcal{P}(Q). \quad (2.8)$$

Згідно з [12] (лема 12.1) оператор $\partial(\xi_m)$, $\xi_m \in N_{-p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}$, є таким, що

$$\|\partial(\xi_m)\varphi\|_{H^h(p, q)} \leq K^{\frac{-qm}{2}} \|\xi_m\|_{N_{-p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}} \|\varphi\|_{H^h(p, q)}, \quad \varphi \in \mathcal{P}(Q).$$

Використавши останню оцінку і (2.5), отримуємо

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{P}(Q): \|\phi(\partial)\varphi\|_{H^h(p, q)} &= \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \partial(\xi_m)\varphi \right\|_{H^h(p, q)} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \|\partial(\xi_m)\varphi\|_{H^h(p, q)} \leq \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} K^{\frac{-qm}{2}} \|\xi_m\|_{N_{-p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}} \|\varphi\|_{H^h(p, q)} \leq \|\varphi\|_{H^h(p, q)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} K^{\frac{-qm}{2}} \|\xi_m\|_{N_{-p, \mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Оскільки $\phi \in \text{Hol}(N_{p,\mathbb{C},q-1})$, то $\|\phi\|_{\text{Hol}(N_{p,\mathbb{C},q-1})}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \|\xi_m\|_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}}^2 K^{-(q-1)m} < \infty$. Звідси $\|\xi_m\|_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}} \leq \|\phi\|_{\text{Hol}(N_{p,\mathbb{C},q-1})} K^{\frac{(q-1)m}{2}}$, а тому (нагадаємо, що $K > 1$)

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} K^{-\frac{qm}{2}} \|\xi_m\|_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}} &\leq \|\phi\|_{\text{Hol}(N_{p,\mathbb{C},q-1})} \sum_{m=0}^{\infty} K^{\frac{(q-1)m}{2}} K^{-\frac{qm}{2}} \leq \\ &\leq c \|\phi\|_{\text{Hol}(N_{p,\mathbb{C},q-1})}, \quad c = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K}-1} < \infty. \end{aligned}$$

Врахувавши останнє, із нерівності (2.9) одержимо (2.8).

Лему доведено.

Наслідок 2.1. Згідно з лемою 1.2 функції (1.14) ℓ і $\frac{1}{\ell}$ належать простору $\text{Hol}(N_{3,\mathbb{C},1}) \subset \text{Hol}(N_{p,\mathbb{C},q-1})$, $p, q \in \mathbb{N}_3$, тому $\ell(\partial) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \partial(\alpha_m)$ і $\frac{1}{\ell}(\partial) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \partial(\beta_m)$ як оператори

$$H^h(p, q) \supset \mathcal{P}(Q) \ni \varphi \mapsto \ell(\partial)\varphi \in H^h(p, q),$$

$$H^h(p, q) \supset \mathcal{P}(Q) \ni \varphi \mapsto \frac{1}{\ell}(\partial)\varphi \in H^h(p, q),$$

$$H^K(p, q) \supset \mathcal{P}(Q) \ni \varphi \mapsto \ell(\partial)\varphi \in H^K(p, q),$$

$$H^K(p, q) \supset \mathcal{P}(Q) \ni \varphi \mapsto \frac{1}{\ell}(\partial)\varphi \in H^K(p, q)$$

є неперервними.

Зауваження 2.1. Міркуючи, як і при доведенні леми 2.1, можна показати, що оператори

$$\phi(\partial_h) := \sum_{m=0}^{\infty} \partial_h(\xi_m): H^h(p', q') \rightarrow H^h(p', q'), \quad (2.10)$$

$$\phi(\partial_K) := \sum_{m=0}^{\infty} \partial_K(\xi_m): H^K(p', q') \rightarrow H^K(p', q')$$

є неперервними при $\phi(\cdot) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle \cdot, \xi_m \rangle \in \text{Hol}(N_{p,\mathbb{C},q-1})$, $p, q \in \mathbb{N}_3$ і $p' \geq p$, $q' \geq q$. Більш того, неважко переконатися, що

$$\phi(\partial_h) \upharpoonright \mathcal{P}(Q) = \phi(\partial_K) \upharpoonright \mathcal{P}(Q) = \phi(\partial).$$

Підрахуємо дію операторів $\ell(\partial)$ і $\frac{1}{\ell}(\partial)$ на функціях із множини $\mathcal{P}(Q)$.

Лема 2.2. Оператор $\ell(\partial): \mathcal{P}(Q) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ переводить всю множину $\mathcal{P}(Q)$ на всю множину $\mathcal{P}(Q)$ (тобто $\text{Ran}(\ell(\partial)) = \mathcal{P}(Q)$) і діє на функціях $\varphi \in \mathcal{P}(Q)$ таким чином: якщо φ записано у вигляді

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^s \langle \varphi_n, h_n(x) \rangle, \quad (2.11)$$

то

$$\ell(\partial)\varphi(x) = \sum_{n=0}^s \langle \varphi_n, \kappa_n(x) \rangle, \quad x \in Q, \quad \varphi_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, \quad s \in \mathbb{N}_0. \quad (2.12)$$

Як результат, оператор $\ell(\partial)$ як оператор

$$H^h(p, q) \supset \mathcal{P}(Q) \ni \varphi \mapsto \ell(\partial)\varphi \in H^K(p, q), \quad p, q \in \mathbb{N}_3, \quad (2.13)$$

є ізометричним.

Доведення. Нехай функцію $\varphi \in \mathcal{P}(Q)$ записано у вигляді (2.11). Використавши (2.4), (2.5) (для $\phi = \ell$ (1.14)) і першу формулу з (1.15), отримуємо

$$\begin{aligned} \ell(\partial)\varphi(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \partial(\alpha_m) \sum_{n=0}^s \langle \varphi_n, h_n(x) \rangle = \\ &= \sum_{m=0}^s \frac{1}{m!} \sum_{n=m}^s \frac{n!}{(n-m)!} \langle \varphi_n, h_{n-m}(x) \hat{\otimes} \alpha_m \rangle = \\ &= \sum_{n=0}^s \left\langle \varphi_n, \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} h_{n-m}(x) \hat{\otimes} \alpha_m \right\rangle = \sum_{n=0}^s \langle \varphi_n, \kappa_n(x) \rangle. \end{aligned}$$

Лему доведено.

Зауваження 2.2. Аналогічно можна показати, що оператор $\frac{1}{\ell}(\partial)$ на функціях із $\mathcal{P}(Q)$ діє таким чином: якщо функцію $\varphi \in \mathcal{P}(Q)$ записано у вигляді

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^s \langle \varphi_n, \kappa_n(x) \rangle,$$

то

$$\frac{1}{\ell}(\partial)\varphi(x) = \sum_{n=0}^s \langle \varphi_n, h_n(x) \rangle, \quad x \in Q, \quad \varphi_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, \quad s \in \mathbb{N}_0.$$

Зрозуміло, що $\text{Ran}\left(\frac{1}{\ell}(\partial)\right) = \mathcal{P}(Q)$ і оператор $\frac{1}{\ell}(\partial)$ як оператор

$$H^K(p, q) \supset \mathcal{P}(Q) \ni \varphi \mapsto \frac{1}{\ell}(\partial)\varphi \in H^h(p, q), \quad p, q \in \mathbb{N}_3,$$

є ізометричним.

Наслідок 2.2. Оператор $\ell(\partial): \mathcal{P}(Q) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ є оборотним, причому $(\ell(\partial))^{-1} = \frac{1}{\ell}(\partial)$.

Тепер можна безпосередньо перейти до встановлення головного результату даної роботи.

Теорема 2.1. При $K > \max\left\{1, e^2 R^{-2} \|O_{3,2}\|_{HS}^2\right\}$ ($R := \min\{R_h, R_\kappa, R_l\}$) має місце рівність топологічних просторів

$$H^h(p, q) = H^K(p, q) =: H(p, q), \quad p, q \in \mathbb{N}_3. \quad (2.14)$$

Доведення. На підставі припущення мінімальності простори $H^h(p, q)$ і $H^K(p, q)$ (при даному виборі K) є просторами неперервних локально обмежених функцій на Q . Тому теорему буде доведено, якщо ми покажемо, що оператор, який кожній функції $f \in H^K(p, q)$ ставить у відповідність цю ж функцію

f , котру вже розуміємо як елемент простору $H^h(p, q)$, є визначеним і реалізує топологічний ізоморфізм між $H^K(p, q)$ і $H^h(p, q)$.

Зафіксуємо $p, q \in \mathbb{N}_3$. Із наслідку 2.1, леми 2.2 і зауваження 2.2 на підставі леми 0.1 (зараз $E_1 = H^K(p, q)$, $E_2 = H^h(p, q)$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}(Q)$, $A = \frac{1}{\ell}(\partial)$, $B = \ell(\partial)$) маємо: оператор $U: H^K(p, q) \rightarrow H^h(p, q)$, що є продовженням за неперервністю оператора

$$H^K(p, q) \supset \mathcal{P}(Q) \ni \varphi \mapsto U\varphi = \varphi \in \mathcal{P}(Q) \subset H^h(p, q),$$

реалізує топологічний ізоморфізм між $H^K(p, q)$ і $H^h(p, q)$.

Крім того, цей оператор такий, що

$$\forall f \in H^K(p, q): f(x) = (Uf)(x), \quad x \in Q. \quad (2.15)$$

Справді, згідно з [12] (лема 4.2) для кожної кулі $V \subset Q$ існують константи $c_3 = c_3(V) > 0$ і $c_4 = c_4(V) > 0$ такі, що для довільного $x \in V$

$$|f(x)| \leq c_3 \|f\|_{H^h(p, q)}, \quad f \in H^h(p, q), \quad (2.16)$$

$$|g(x)| \leq c_4 \|g\|_{H^K(p, q)}, \quad g \in H^K(p, q).$$

Нехай $f \in H^K(p, q)$ і $\mathcal{P}(Q) \ni \varphi_n \rightarrow f$ в $H^K(p, q)$, тоді $\mathcal{P}(Q) \ni \varphi_n \rightarrow Uf$ в $H^h(p, q)$. Використовуючи (2.16), для довільного $x \in V \subset Q$ маємо

$$\begin{aligned} |f(x) - (Uf)(x)| &= |f(x) - \varphi_n(x) + \varphi_n(x) - (Uf)(x)| \leq \\ &\leq |f(x) - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - (Uf)(x)| \leq \\ &\leq c_4 \|f - \varphi_n\|_{H^K(p, q)} + c_3 \|\varphi_n - Uf\|_{H^h(p, q)} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

при $n \rightarrow \infty$. Оскільки (2.17) має місце для x із довільної кулі $V \subset Q$, то $f(x) = (Uf)(x) \quad \forall x \in Q$.

Теорему доведено.

Зауваження 2.3. Як множина, простір $H(p, q) := H^h(p, q) = H^K(p, q)$, $p, q \in \mathbb{N}_3$, складається з неперервних локально обмежених функцій на Q , що допускають розклад в ряд як за базисними функціями $h_n(x)$, так і за базисними функціями $\kappa_n(x)$. Точніше, якщо функція f належить множині $H(p, q)$, то її можна однозначно зобразити як у вигляді

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(x) \rangle, \quad x \in Q, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{N_{p, \mathbb{C}}^{\otimes n}}^2 (n!)^2 K^{qn} < \infty,$$

так і у вигляді

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \tilde{f}_n, \kappa_n(x) \rangle, \quad x \in Q, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|\tilde{f}_n\|_{N_{p, \mathbb{C}}^{\otimes n}}^2 (n!)^2 K^{qn} < \infty.$$

Крім цього, справджується оцінка: існують константи $c_1 > 0$ і $c_2 > 0$ такі, що

$$c_1 \|f\|_{H^h(p, q)} \leq \|f\|_{H^K(p, q)} \leq c_2 \|f\|_{H^h(p, q)}, \quad f \in H(p, q),$$

яка забезпечує топологічну рівність просторів $H^h(p, q)$ і $H^K(p, q)$.

Зважаючи на те, що оператор $\partial_h(\xi_m)$, $\xi_m \in N_{-p, \mathbb{C}}^{\otimes m}$, $p \in \mathbb{N}_3$, діє неперервно в

кожному просторі $H^h(p', q)$, а оператор $\partial_\kappa(\xi_m)$ — відповідно в кожному просторі $H^\kappa(p', q)$, $p' \geq p$, $q \in \mathbb{N}_3$, причому має місце рівність (2.3), із теореми 2.1 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 2.3. Оператори $\partial_h(\xi_m)$ (2.1) і $\partial_\kappa(\xi_m)$ (2.2) ($\xi_m \in N_{-p, \mathbb{C}}^{\otimes m}$, $p \in \mathbb{N}_3$, $m \in \mathbb{N}_0$) діють неперервно в кожному топологічному просторі $H(p', q)$, $p' \geq p$, $q \in \mathbb{N}_3$, і

$$\partial_h(\xi_m) = \partial_\kappa(\xi_m) =: \partial(\xi_m).$$

Із теореми 2.1 і зауваження 2.1 випливає такий наслідок.

Наслідок 2.4. Нехай $\phi(\cdot) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle \cdot, \xi_m \rangle \in \text{Hol}(N_{p, \mathbb{C}}, q-1)$, $p, q \in \mathbb{N}_3$. Оператори (2.10) $\phi(\partial_h)$ і $\phi(\partial_\kappa)$ діють неперервно в кожному топологічному просторі $H(p', q')$, $p' \geq p$, $q' \geq q$, і збігаються:

$$\phi(\partial_h) = \phi(\partial_\kappa) = \phi(\partial) := \sum_{m=0}^{\infty} \partial(\xi_m). \quad (2.18)$$

Із лем 1.2, 2.1, зауваження 2.2 і наслідку 2.4 випливає такий наслідок.

Наслідок 2.5. Оператор $\ell(\partial) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \partial(\alpha_m): H^h(p, q) \rightarrow H^\kappa(p, q)$, $p, q \in \mathbb{N}_3$, є унітарним і діє таким чином:

$$H^h(p, q) \ni f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot) \rangle \mapsto \ell(\partial)f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \kappa_n(\cdot) \rangle \in H^\kappa(p, q). \quad (2.19)$$

Оберненим до нього є унітарний оператор $\frac{1}{\ell}(\partial) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \partial(\beta_m)$, який діє із $H^\kappa(p, q)$ в $H^h(p, q)$ таким чином:

$$H^\kappa(p, q) \ni f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \kappa_n(\cdot) \rangle \mapsto \frac{1}{\ell}(\partial)f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot) \rangle \in H^h(p, q).$$

Зауваження 2.4. За певної фіксованої борелівської міри ρ на \mathcal{Q} (детальніше див. [12]) простори $H^h(p, q)$ і $H^\kappa(p, q)$ можна трактувати як позитивні по відношенню до нульового $L^2(\mathcal{Q}, d\rho(x))$. Зрозуміло, що збіг позитивних просторів $H^h(p, q)$ і $H^\kappa(p, q)$ (див. теорему 2.1) призводить до збігу і відповідних негативних просторів $H^h(-p, -q)$ і $H^\kappa(-p, -q)$, $p, q \in \mathbb{N}_3$.

Автор вдячний Ю. М. Березанському і М. О. Качановському за корисні обговорення і зауваження.

1. Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Streit L. How to generalize white noise analysis to non-Gaussian spaces // Dynamics of Complex and Irregular Systems / Eds Ph. Blanchard et. al. — Singapore: World Sci., 1993. — P. 48–60.
2. Albeverio S., Daletsky Yu. L., Kondratiev Yu. G., Streit L. Non-Gaussian infinite-dimensional analysis // J. Func. Anal. — 1996. — 138. — P. 311–350.
3. Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г. Негауссов анализ и гипергруппы // Функцион. анализ и его прил. — 1995. — 29, № 3. — С. 51–55.
4. Berezansky Yu. M. A connection between the theory of hypergroups and white noise analysis // Rept. Math. Phys. — 1995. — 36, № 2/3. — P. 215–234.
5. Berezansky Yu. M. A generalization of white noise analysis by means of theory of hypergroups // Ibid. — 1996. — 38, № 3. — P. 289–300.
6. Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G. Biorthogonal systems in hypergroups: an extension of non-Gaussian analysis // Meth. Funct. Anal. and Top. — 1996. — 2, № 2. — P. 1–50.

7. *Березанский Ю. М.* Бесконечномерный негауссов анализ и операторы обобщенного сдвига // *Функцион. анализ и его прил.* – 1996. – 30, № 4. – С. 61–65.
8. *Berezansky Yu. M.* Generalized functions, connected with differential hypergroups // *Differential Equations, Asymptotic Analysis, and Mathematical Physics* / Eds M. Demuth, B.-W. Schulze. – Berlin: Acad. Verlag, 1997. – P. 32–39.
9. *Березанский Ю. М.* Бесконечномерный анализ, связанный с операторами обобщенного сдвига // *Укр. мат. журн.* – 1997. – 49, № 3. – С. 364–409.
10. *Berezansky Yu. M.* Infinite-dimensional non-Gaussian analysis connected with generalized translation operators // *Analysis on Infinite-Dimensional Lie Groups and Algebras* / Eds H. Heyer, J. Marión. – Singapore etc.: World Sci., 1998. – P. 22–46.
11. *Березанский Ю. М.* Пуассонов бесконечномерный анализ как пример анализа, связанного с операторами обобщенного сдвига // *Функцион. анализ и его прил.* – 1998. – 32, № 3. – С. 65–70.
12. *Березанский Ю. М., Теско В. А.* Простори основних і узагальнених функцій, пов'язані з узагальненим зсувом // *Укр. мат. журн.* – 2003. – 55, № 12. – С. 1587–1657.
13. *Далецкий Ю. Л.* Биортогональный аналог полиномов Эрмита и обращение преобразования Фурье по негауссовой мере // *Функцион. анализ и его прил.* – 1991. – 25, № 2. – С. 68–70.
14. *Kachanovsky N. A.* Biortogonal Appel-like systems in a Hilbert space // *Meth. Funct. Anal. and Top.* – 1996. – 2, № 3–4. – P. 36–52.
15. *Качановский Н. А.* Дуальная система Аппеля и пространства Кондратьева в анализе на пространствах Шварца // *Укр. мат. журн.* – 1997. – 49, № 4. – С. 527–534.
16. *Качановский Н. А., Ус Г. Ф.* Биортогональные системы Аппеля в анализе на дуально-ядерных пространствах // *Функцион. анализ и его прил.* – 1998. – 32, № 1. – С. 69–72.
17. *Качановский Н. А.* Псевдодифференциальные уравнения и оператор обобщенного сдвига в негауссовом бесконечномерном анализе // *Укр. мат. журн.* – 1999. – 51, № 10. – С. 1334–1341.
18. *Kachanovsky N. A., Koshkin S. V.* Minimality of Appel-like systems and embeddings of test functions spaces in a generalization of white noise analysis // *Meth. Funct. Anal. and Top.* – 1999. – 5, № 3. – P. 13–25.
19. *Kondratiev Yu. G., Da Silva J. L., Streit L.* Generalized Appel systems // *Ibid.* – 1997. – 3, № 3. – P. 28–61.
20. *Kondratiev Yu. G., Streit L., Westerkamp W., Yan J.* Generalized functions on infinite dimensional analysis // *Hiroshima Math. J.* – 1998. – 28, № 2. – P. 213–260.
21. *Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G.* Spectral methods in infinite dimensional analysis. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1995. – Vol. 1. – XVII+572 p.; Vol. 2. – VIII+427 p.

Одержано 20.05.2003