УДК 517.5

О. І. Степанець, І. В. Соколенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ОПЕРАТОРАМИ ФУР'Є $\overline{\psi}$-ІНТЕГРАЛІВ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ НА ДІЙСНІЙ ОСІ

We establish asymptotic formulas for exact upper bounds of deviations of the Fourier operators on classes of functions locally summable on the entire real line and determined by $\overline{\psi}$-integrals. On the classes of this sort, we also obtain asymptotic equalities for upper bounds of functionals characterizing simultaneous approximation of several functions.

Знайдено асимптотичні формули для точних верхніх меж відхилень операторів Фур'є на класах локально сумовних на всій дійсній осі функцій, що задаються $\overline{\psi}$-інтегралами. На таких класах одержано також асимптотичні рівності для верхніх меж функціоналів, що характеризують одночасне наближення кількох функцій.

У даній роботі наводяться результати, пов'язані з наближенням класів $\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ функцій, заданих на всій осі, — неперіодичних аналогів класів, що розглядалися в роботі [1] (див. також наведену там бібліографію), за допомогою операторів Фур'є (див. [2 – 8]) — цілих функцій експоненціального типу, які в періодичному випадку збігаються з частинними сумами відповідних порядків рядів Фур'є функцій, що наближаються.

Нехай $\overline{\psi}=(\psi_1,\psi_2)$ — пара функцій $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ таких, що $\psi_1\in\mathfrak{A}$, $\psi_2\in\mathfrak{A}'$, де $\mathfrak{A}$ [2, с. 193] — множина всіх неперервних при $t\geq 0$ функцій h, які задовольняють умови:

1) $h(t)\geq 0$, $h(0)=0$, h зростає на $[0;1]$;

2) h опукла донизу на $[1;\infty)$ і $\lim\limits_{t\to\infty} h(t)=0$;

3) похідна $h'(t):=h'(t+0)$ є функцією обмеженої варіації на $[0;\infty)$:

$$\bigvee_0^\infty h'(t)\ \leq\ K\ <\ \infty,$$

а $\mathfrak{A}'$ — підмножина всіх функцій h з $\mathfrak{A}$ таких, що

$$\int_1^\infty \frac{h(t)}{t}dt\ <\ \infty.$$

Нехай, далі, $\mathfrak{N}$ — одинична куля у просторі суттєво обмежених функцій, $S_\infty = \{\varphi\colon \operatorname{ess\,sup}|\varphi(t)|\leq 1\}$, або ж клас $H_\omega = \left\{\varphi\in C\colon \left|\varphi(t)-\varphi(t')\right|\leq\omega\left(\left|t-t'\right|\right),\ t,t'\in\mathbb{R}\right\}$, де $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності. Тоді через $\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ позначають множину всіх неперервних функцій f, які для всіх x можна подати у вигляді

$$f(x)\ =\ A_0\ +\ \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-t)\hat{\psi}(t)\,dt\ =\ A_0\ +\ \varphi*\hat{\psi}(x), \tag{1}$$

де $\hat{\psi}(t)$ — перетворення Фур'є функції $\psi(t)=\psi_{1+}(t)+i\psi_{2-}(t)$, ψ_{1+} і ψ_{2-} — парне і непарне продовження функцій відповідно ψ_1 і ψ_2,

$$\hat{\psi}(t)\ =\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\psi_{1+}(x)+i\psi_{2-}(x)\right)e^{-ixt}\,dx; \tag{2}$$

A_0 — деяка константа, $\varphi \in \mathfrak{N}$, а неозначений інтеграл визначається як границя інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються. За умов, коли $\psi_1 \in \mathfrak{A}$ і $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$ (які далі вважаємо виконаними), як показано в [2, с. 194], $\hat{\psi}(t)$ є функцією, сумовною на $\mathbb{R}$. Функцію $f(\cdot)$ в рівності (1) називають $\overline{\psi}$-інтегралом функції $\varphi(\cdot)$ і записують $f(\cdot) = \mathcal{J}^{\overline{\psi}}(\varphi, \cdot)$. Іноді функцію $\varphi(\cdot)$ називають $\overline{\psi}$-похідною $f(\cdot)$ і записують $\varphi(\cdot) = f^{\overline{\psi}}(\cdot)$.

Функції $f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ при кожному $\sigma > 0$ і деякому $c = \sigma - \tau, \tau > 0$, поставимо у відповідність функцію $F_{\sigma,c}(f;\cdot)$, поклавши

$$F_{\sigma,c}(f;\cdot) = A_0 + f^{\overline{\psi}} * \widehat{\psi\lambda}_{\sigma,c}(\cdot),$$

де $\widehat{\psi\lambda}_{\sigma,c}$ — перетворення вигляду (2) добутку $\psi(t)\lambda_{\sigma,c}(t)$,

$$\lambda_{\sigma,c}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le |t| \le c; \\ 1 - \dfrac{|t| - c}{\sigma - c}\dfrac{\psi(\sigma\,\mathrm{sign}\,(t))}{\psi(t)}, & c < |t| < \sigma; \\ 0, & \sigma \le |t|. \end{cases}$$

У роботі [8], зокрема, показано, що у випадку, коли $f(x)$ є 2π-періодичною функцією і $c = \sigma - 1$, $F_{\sigma,c}(f, x)$ — частинна сума порядку $[\sigma]$ ряду Фур'є функції $f(x)$. Тому величини $F_{\sigma,c}(\cdot,\cdot)$ було названо операторами Фур'є; в загальному випадку $F_{\sigma,c}(\cdot,\cdot)$ — цілі функції експоненціального типу, що не перевищує значення σ (див., наприклад, [2] (гл. IX), [8]).

Нехай тепер $f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$, $\rho_{\sigma,c}(f;x) = f(x) - F_{\sigma,c}(f;x)$ і

$$\mathcal{E}_\sigma\left(\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}\right) = \mathcal{E}_{\sigma,c}\left(\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}, x\right) = \sup\left\{\left|\rho_{\sigma,c}(f;x)\right| : f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}\right\}. \tag{3}$$

Величини $\mathcal{E}_\sigma\left(\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}\right)$ у випадку, коли $\mathfrak{N}$ — множина періодичних функцій, а також в неперіодичному випадку за умов, коли $\psi_1(t) = \psi(t)\cos\dfrac{\beta\pi}{2}$ і $\psi_2(t) = \psi(t)\sin\dfrac{\beta\pi}{2}$, де $\psi(t)$ — деяка функція з множини $\mathfrak{A}$, вивчались у низці робіт; основні результати, отримані в цьому напрямку, наведено в [1, 2].

Для величин, означених рівністю (3), виконується таке твердження.

Теорема 1. *Нехай*

$$\psi_1 \in \mathfrak{A}_0 = \left\{h \in \mathfrak{A}\colon 0 < \frac{t}{\eta(t) - t} \le K < \infty \;\; \forall\, t \ge 1\right\},$$

де $\eta(t) = \eta(h, t) = h^{-1}\left(\dfrac{1}{2}h(t)\right)$, *і* $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{A}'$. *Тоді при* $\sigma \to \infty$ *виконуються асимптотичні рівності*

$$\mathcal{E}_\sigma\left(\hat{C}^{\overline{\psi}}S_\infty\right) = \frac{2}{\pi}\int_\sigma^\infty \frac{\psi_2(t)}{t}dt + \frac{4}{\pi^2}|\psi(\sigma)|\ln\sigma + O(1)|\psi(\sigma)|,$$

$$\mathcal{E}_\sigma\left(\hat{C}^{\overline{\psi}}H_\omega\right) = \theta_\omega\left(\frac{1}{\pi}\int_0^1 \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\int_1^\infty \psi_2(\sigma v)\sin vt\,dv\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi^2}|\psi(\sigma)|\ln\sigma\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\,dt\right) + O(1)|\psi(\sigma)|\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

де $\theta_\omega \in \left[\frac{2}{3};1\right]$, *причому* $\theta_\omega = 1$, *якщо* $\omega(t)$ — *опуклий модуль неперервності*, $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені по* σ.

Теорему 1 у періодичному випадку доведено в [1] (теореми V.3.1, V.3.2), у випадку, коли $\psi_1(t) = \psi(t)\cos\frac{\beta\pi}{2}$ і $\psi_2(t) = \psi(t)\sin\frac{\beta\pi}{2}$, — в [4] (теорема 5) (див. також [2], теорема IX.12.3). Дана теорема доводиться аналогічно доведенню теорем V.3.1, V.3.2 із [1] з використанням замість леми V.4.1 із [1] її аналога — наступної леми.

Лема. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$ *і* a — *довільне додатне число. Тоді якщо* $f \in \hat{C}^{\overline{\Psi}} S_\infty$, *то для довільних* x *і* $\sigma \ge 1$

$$\rho_{\sigma,c}(f,x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\le a/\sigma} f^{\overline{\Psi}}(x-t) \int\limits_{\sigma}^{\infty} \psi_2(v) \sin vt \, dv \, dt +$$

$$+ \frac{|\psi(\sigma)|}{\pi} \int\limits_{a/\sigma \le |t| \le \pi/2} f^{\overline{\Psi}}(x-t) \frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{t} dt + O(1)|\psi(\sigma)|;$$

якщо ж $f \in \hat{C}^{\overline{\Psi}} H_\omega$, *то для довільних* x *і* $\sigma \ge 1$

$$\rho_{\sigma,c}(f,x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\le a/\sigma} \left(f^{\overline{\Psi}}(x-t) - f^{\overline{\Psi}}(x)\right) \int\limits_{\sigma}^{\infty} \psi_2(v) \sin vt \, dv \, dt +$$

$$+ \frac{|\psi(\sigma)|}{\pi} \int\limits_{a/\sigma \le |t| \le \pi/2} \left(f^{\overline{\Psi}}(x-t) - f^{\overline{\Psi}}(x)\right) \frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{t} dt + O(1)|\psi(\sigma)|\,\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

де

$$\gamma_\sigma = \operatorname{arctg} \frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$$

і $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені по* σ *і* a.

Нехай $\mathfrak{A}_C$ [2, с. 193] — підмножина функцій $h \in \mathfrak{A}$, що задовольняють умову

$$0 < K_1 \le \frac{t}{\eta(h,t) - t} \le K_2 < \infty \quad \forall\, t \ge 1.$$

Якщо $h \in \mathfrak{A}_C$, то [1] (співвідношення V.3.5)

$$\int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{h(t)}{t} dt \le O(1) h(\sigma), \tag{4}$$

і [1] (співвідношення V.3.11)

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right) \int\limits_1^{\infty} h(\sigma v) \sin vt \, dv \, dt = O(1)\,\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right) \int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{h(t)}{t} dt. \tag{5}$$

Тому у випадку, коли $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$ і $\psi_2 \in \mathfrak{A}_C$, враховуючи, що $\mathfrak{A}_C \subset \mathfrak{A}_0$, з теореми 1 отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$ *і* $\psi_2 \in \mathfrak{A}_C$. *Тоді при* $\sigma \to \infty$ *виконуються асимптотичні рівності*

$$\mathcal{E}_\sigma\left(\hat{C}^{\overline{\Psi}} S_\infty\right) = \frac{4}{\pi^2} |\psi(\sigma)| \ln \sigma + O(1)|\psi(\sigma)|,$$

$$\mathscr{E}_\sigma\left(\hat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega\right) = \frac{2\theta_\omega}{\pi^2} e_\sigma(\omega) |\psi(\sigma)| \ln\sigma + O(1)|\psi(\sigma)| \omega\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

де

$$e_\sigma(\omega) = \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right) \sin t\, dt,$$

величини θ_ω *і* $O(1)$ — *такі ж, як і в теоремі* 1.

Функції, що належать до множини $\mathfrak{A}_0$, не можуть спадати до нуля шви
за довільну степеневу функцію. Точніше, в [1, c. 165] показано, що я
$h \in \mathfrak{A}_0$, то існує таке $r > 0$, що при всіх $t \geq 1$ виконується співвідноше
$h(t) \geq K t^{-r}$. Наступне твердження відноситься до випадку, коли ψ_1, ψ_2 є
Множина F_0 визначається рівністю

$$F_0 = \left\{ h \in \mathfrak{A}\colon \eta'(t) = \eta'(h,t) = \frac{h'(t)}{2h'(\eta(t))} \leq K \quad \forall t \geq 1 \right\}.$$

До цієї множини належать як функції, які спадають із степеневою швидкіс
так і функції, що мають показникову швидкість спадання. Детальніше з м
жиною F_0 можна ознайомитись в [1] (§ III.13).

Теорема 2. *Нехай* $\psi_1, \psi_2 \in F_0$ *і при* $t \to \infty$ *виконується умова*

$$\psi_2(t) \left| \ln(\eta(\psi_2, t) - t) \right| \leq O(1) \psi_1(t).$$

Тоді при $\sigma \to \infty$ *виконуються асимптотичні рівності*

$$\mathscr{E}_\sigma\left(\hat{C}^{\overline{\psi}} S_\infty\right) = \frac{4}{\pi^2} \psi_1(\sigma) \left| \ln(\eta(\psi_1, \sigma) - \sigma) \right| + O(1) \psi_1(\sigma),$$

$$\mathscr{E}_\sigma\left(\hat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega\right) = \frac{2\theta_\omega}{\pi^2} e_\sigma(\omega) \psi_1(\sigma) \left| \ln(\eta(\psi_1, \sigma) - \sigma) \right| + O(1) \psi_1(\sigma) \omega\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

де $e_\sigma(\omega)$ *визначається рівністю* (6), *величини* θ_ω *і* $O(1)$ — *такі ж, як*
теоремі 1.

Якщо замість умови (7) *виконується умова*

$$\psi_1(t) \left| \ln(\eta(\psi_1, t) - t) \right| \leq O(1) \psi_2(t),$$

то у правих частинах рівностей (8) *і* (9) *потрібно* ψ_1 *замінити на* ψ_2.

У періодичному випадку теорему 2 доведено в [1] (теорема V.10.2), а у
падку, коли $\psi_1(t) = \psi(t) \cos\dfrac{\beta\pi}{2}$ і $\psi_2(t) = \psi(t) \sin\dfrac{\beta\pi}{2}$, — в [2] (теорема IX.1
Зазначимо, що у відповідних твердженнях для періодичного випадку
місць величин $\left|\ln(\eta(\psi_1, \sigma) - \sigma)\right|$ у рівностях (8) і (9) стоїть велич
$\ln^+(\eta(\psi_1, \sigma) - \sigma)$, де $\ln^+ t = \max\{0, \ln t\}$. Тому рівності (8) і (9) дають розв'
так званої задачі Колмогорова – Нікольського (див., наприклад, [1, с. 198]
тому випадку, коли

$$\lim_{t \to \infty} (\eta(t) - t) = 0,$$

як це відбувається, наприклад, коли $\psi_1(t) = e^{-t^r}$ при $r > 1$. Доведення те
ми 2 проводиться аналогічно до доведення теореми V.10.2 і спирається на
ми IX.12.1 і IX.12.2 роботи [2] (в яких покладаємо $\beta = 0$ і $\beta = 1$).

Далі розглянемо питання про одночасне наближення $\overline{\psi}$-інтегралів фун із класів S_∞ та H_ω. Нехай $\overline{\psi}=\{\overline{\psi}^{(1)},\overline{\psi}^{(2)},\ldots,\overline{\psi}^{(m)}\}$, де $\overline{\psi}^{(i)}=\{\psi_1^{(i)},\psi_2^{(i)}\}$, $i=\overline{1,m}$, — пари функцій, такі, що $\psi_1^{(i)}\in\mathfrak{A}$, $\psi_2^{(i)}\in\mathfrak{A}'$. Нехай, далі, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — довільний вектор із дійсними координатами, а $\mathfrak{N}$ — клас S_∞, або клас H_ω. В якості величин, що характеризують одночасне наближення m $\overline{\psi}$-інтегралів $\mathcal{I}^{\overline{\psi}^{(i)}}(\varphi;\cdot)$, $i=\overline{1,m}$, функцій $\varphi\in\mathfrak{N}$ розглядаються величини

$$\Sigma_{\sigma,m}(\varphi,x,\overline{\psi},c) = \sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{\left|\psi^{(i)}(\sigma)\right|}\left(\mathcal{I}^{\overline{\psi}^{(i)}}\varphi(x)-F_\sigma\left(\mathcal{I}^{\overline{\psi}^{(i)}}\varphi,x\right)\right),$$

де $F_\sigma(\cdot,\cdot) = F_{\sigma c}(\cdot,\cdot)$ і $c=\sigma-1$. Задача полягає у встановленні асимптотичних рівностей для величин

$$\Sigma_{\sigma,m}(\mathfrak{N},\overline{\psi},c) = \Sigma_{\sigma,m}(\mathfrak{N},x,\overline{\psi},c) = \sup_{\varphi\in\mathfrak{N}}\left\|\Sigma_{\sigma,m}(\varphi,x,\overline{\psi},c)\right\|_C,$$

де $\|\cdot\|_C$ — норма у просторі C неперервних функцій. Справджується така теорема.

Теорема 3. *Нехай* $\overline{\psi}=\{\overline{\psi}^{(i)}\}_{i=1}^{m}$ — *множина пар* $\overline{\psi}^{(i)}=\left(\psi_1^{(i)},\psi_2^{(i)}\right)$ *така, що* $\psi_1^{(i)}\in\mathfrak{A}_0$, $\psi_2^{(i)}\in\mathfrak{A}'_0$, *і* $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — *довільний набір з* m *дійсних чисел. Тоді при* $\sigma\to\infty$ *виконуються асимптотичні рівності*

$$\Sigma_{\sigma,m}(S_\infty,\overline{\psi},c) = \frac{2}{\pi}\left|\sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{\left|\psi^{(i)}(\sigma)\right|}\int_\sigma^\infty\frac{\psi_2^{(i)}(t)}{t}\,dt\right| + \frac{4}{\pi^2}R_m\ln\sigma + O(1),$$

$$\Sigma_{\sigma,m}(H_\omega,\overline{\psi},c) = \theta_\omega\left(\frac{1}{\pi}\int_0^1\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\left|\sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{\left|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)\right|}\int_1^\infty\psi_2^{(i)}(\sigma v)\sin vt\,dv\right|dt + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{\pi^2}R_m\ln\sigma\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\,dt\right) + O(1)\,\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

де

$$R_m = R_m(\overline{\psi},c) = \sqrt{A_m^2+B_m^2}, \tag{11}$$

$$A_m = A_m(\overline{\psi},c) = \sum_{i=1}^{m}c_i\cos\gamma_\sigma^{(i)}, \qquad B_m = B_m(\overline{\psi},c) = \sum_{i=1}^{m}c_i\sin\gamma_\sigma^{(i)}$$

і

$$\gamma_\sigma^{(i)} = \operatorname{arctg}\frac{\psi_2^{(i)}(\sigma)}{\psi_1^{(i)}(\sigma)},$$

$\theta_\omega\in\left[\frac{2}{3};1\right]$, *причому* $\theta_\omega=1$, *якщо* $\omega(t)$ — *опуклий модуль неперервності,* $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені по* σ.

Враховуючи співвідношення (4) і (5), із цієї теореми одержуємо такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай* $\overline{\psi}=\{\overline{\psi}^{(i)}\}_{i=1}^{m}$ — *множина пар* $\overline{\psi}^{(i)}=\left(\psi_1^{(i)},\psi_2^{(i)}\right)$ *така, що* $\psi_1^{(i)}\in\mathfrak{A}_0$, $\psi_2^{(i)}\in\mathfrak{A}_C$, *і* $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — *довільний набір з* m *дійсних чисел. Тоді при* $\sigma\to\infty$ *виконуються асимптотичні рівності*

$$\Sigma_{\sigma,m}(S_\infty, \overline{\psi}, c) = \frac{4}{\pi^2} R_m \ln\sigma + O(1),$$

$$\Sigma_{\sigma,m}(H_\omega, \overline{\psi}, c) = \frac{2\theta_\omega}{\pi^2} e_\sigma(\omega) R_m \ln\sigma + O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

де R_m *визначається рівністю* (11), $e_\sigma(\omega)$ — *рівністю* (6), *величини* θ_ω *і* $O(1)$ — *такі ж, як і в теоремі* 3.

Теорему 3 в дещо інших термінах у прийнятих у даній роботі позначеннях у випадках, коли $\psi_1^{(i)}(t) = \psi^{(i)}(t)\cos\frac{\beta_i\pi}{2}$, $\psi_2^{(i)}(t) = \psi^{(i)}(t)\sin\frac{\beta_i\pi}{2}$ при $\psi^{(i)} \in \mathfrak{A}_0$ і $\beta_i = 0$, встановлено в роботі [9] (див. також [10]).

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 1. – 427 с.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 2. – 468 с.
3. *Степанец А. И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Докл. АН СССР. – 1988. – **303**, № 1. – С. 50 – 53.
4. *Степанец А. И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 2. – С. 198 – 209.
5. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Там же. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102 – 112.
6. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Там же. – № 2. – С. 210 – 222.
7. *Степанец А. И.* Приближение в пространствах локально интегрируемых функций // Там же. – 1994. – **46**, № 5. – С. 597 – 625.
8. *Stepanets A. I., Wang Kunyang, Zhang Xirong.* Approximation of locally integrable function on the rial line // Там же. – 1999. – **51**, № 11. – С. 1549 – 1561.
9. *Степанец А. И., Дрозд В. В.* Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье в равномерной метрике // Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье. – Киев, 1989. – 59 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.17).
10. *Дрозд В. В.* Совместное приближение функций и их производных операторами Фурье // Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 55 – 67.

Одержано 23.02.2004