УДК 517.929.7

Н. З. Дильная, А. Н. Ронто (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

We establish efficient conditions sufficient for the unique solvability of certain classes of Cauchy problems for systems of linear functional differential equations. The conditions obtained are optimal in a certain sense.

Отримано ефективні умови, достатні для однозначної розв'язності деяких класів задач Коші для системи лінійних функціонально-диференціальних рівнянь. Знайдені умови є в певному розумінні оптимальними.

1. Введение. Целью настоящей работы является установление новых эффективных условий, достаточных для однозначной разрешимости задачи Коши для некоторых классов многомерных систем линейных функционально-дифференциальных уравнений.

Предположения основных теорем используют свойства решений различных функционально-дифференциальных неравенств и по виду близки к некоторым условиям, установленным в [1, 2]. Приводятся также эффективные „коэффициентные" условия разрешимости задачи Коши для некоторых конкретных классов функционально-дифференциальных уравнений.

Результаты настоящей статьи являются в определенном смысле оптимальными, что подтверждается соответствующими примерами.

Доказательство основной теоремы 1 п. 4 основано на применении теоремы 3 из [3], которая, в свою очередь, установлена с использованием метода пробных функций, восходящего к М. Г. Крейну [4] и успешно применяемого для оценки спектра широких классов линейных операторов, оставляющих инвариантным некоторый конус банахова пространства (см., например, [5]).

2. Обозначения. В работе используются следующие обозначения:

1) $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$;

2) $\|x\| := \max_{1\le k\le n}|x_k|$ для $x = (x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$;

3) $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство непрерывных функций $[a, b] \to \to \mathbb{R}^n$, норма в котором задана формулой

$$C([a, b], \mathbb{R}^n) \ni u \;\mapsto\; \max_{s\in[a,b]}\|u(s)\|;$$

4) $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$ — подпространство пространства $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, состоящее из функций y, удовлетворяющих условию $y(\tau) = 0$, где τ — некоторая фиксированная точка из $[a, b]$;

5) $L([a, b], \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство интегрируемых по Лебегу вектор-функций $u: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$L([a,b],\mathbb{R}^n) \ni \; u \; \mapsto \; \int_a^b \|u(s)\| ds;$$

б) соотношение $x \leq_{\bar{\sigma}} y$ для

$$\bar{\sigma} := \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

и $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^n$, по определению, означает, что выполнены неравенства

$$\sigma_j[y_j - x_j] \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Аналогично, соотношение $x <_{\bar{\sigma}} y$ является сокращенной записью того факта, что

$$\sigma_j[y_j - x_j] > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Подобным образом определяются знаки „$\geq_{\bar{\sigma}}$" и „$>_{\bar{\sigma}}$". При $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_n = 1$ нижний индекс „$\bar{\sigma}$" при знаках неравенства опускается.

Компоненты векторов всюду обозначаются присоединением к названиям переменных соответствующих нижних индексов.

3. Постановка задачи и определения. Рассматривается линейная однородная задача Коши

$$u'(t) = (lu)(t), \quad t \in [a,b], \tag{2}$$

$$u(\tau) = 0, \tag{3}$$

где $l\colon C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L([a,b],\mathbb{R}^n)$ — некоторый непрерывный линейный оператор, а τ — заданная точка из промежутка $[a,b]$.

Как обычно (см., например, [6]), речь идет об абсолютно непрерывных решениях задачи (2), (3).

Определение 1. *Решением задачи Коши* (2), (3) *называется абсолютно непрерывная функция* $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *со свойством* (3), *удовлетворяющая соотношению* (2) *при почти всех* t *из* $[a,b]$.

Относительно линейного оператора l в уравнении (2) всюду в этой работе предполагаем, что при некотором фиксированном векторе (1) с компонентами $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} \subset \{-1, 1\}$ он является $(\bar{\sigma}, \tau)$-положительным в следующем смысле.

Определение 2. *Будем говорить, что оператор* $l\colon C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L([a,b],\mathbb{R}^n)$ *является* $(\bar{\sigma},\tau)$*-положительным, если из справедливости для всех* $t \in [a,b]$ *соотношения*

$$u(t) \geq_{\bar{\sigma}} 0 \tag{4}$$

следует, что при почти всех t *из* $[a,b]$ *имеет место неравенство*

$$(lu)(t)\operatorname{sign}(t-\tau) \geq_{\bar{\sigma}} 0.$$

Иными словами, $(\bar{\sigma}, \tau)$-положительность оператора l означает, что из соотношений

$$\sigma_k u_k(t) \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in [a, b],$$

следует, что при почти всех $t \in [a, b]$ выполняются неравенства

$$\sigma_k (l_k u)(t) \operatorname{sign}(t - \tau) \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $l_k\colon C([a, b], \mathbb{R}^n) \to L([a, b], \mathbb{R})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — компоненты оператора $l\colon C([a, b], \mathbb{R}^n) \to L([a, b], \mathbb{R}^n)$.

***Замечание* 1.** Легко видеть, что в одномерном случае (т. е. когда $n = 1$) определение 2 (σ, τ)-положительности оператора $l\colon C([a, b], \mathbb{R}^n) \to L([a, b], \mathbb{R})$ не зависит от выбора числа $\sigma \in \{-1, 1\}$. Свойство, описываемое этим определением, в указанном случае, очевидно, означает изотонность оператора l относительно стандартных, поточечных частичных упорядочений пространств $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ и $L([a, b], \mathbb{R})$.

Наряду с линейной однородной задачей (2), (3) будем рассматривать соответствующую неоднородную задачу

$$u'(t) = (lu)(t) + f(t), \quad t \in [a, b], \tag{5}$$

$$u(\tau) = c, \tag{6}$$

в которой $c \in \mathbb{R}^n$, а f принадлежит $L([a, b], \mathbb{R}^n)$.

4. Основная теорема. Зададим произвольное $y_0 \in C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$ и построим последовательность функций

$$\{y_k \mid k \geq 0\}, \tag{7}$$

определяемую рекуррентным соотношением

$$y_k(t) := \int_\tau^t (l y_{k-1})(s)\, ds, \quad t \in [a, b], \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что линейный оператор l в уравнении* (2) $(\bar{\sigma}, \tau)$*-положителен. Пусть найдутся такие абсолютно непрерывная вектор-функция $y_0\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условиям*

$$y_0(\tau) = 0 \tag{9}$$

и

$$y_0(t) >_{\bar{\sigma}} 0, \quad t \in [a, b] \setminus \{\tau\}, \tag{10}$$

а также некоторые натуральное m, вещественное $\rho \in (1, +\infty)$ и неотрицательные числа $\{\beta_\nu\}_{\nu=0}^m$, $\beta_0 > 0$, при которых для почти всех t из промежутка $[a, b]$ определенные формулой (8) *функции $y_1, y_2, \ldots, y_m$ удовлетворяют неравенству*

$$\left[\beta_0 y_0'(t)+\rho\sum_{\nu=0}^{m-1}(\beta_{\nu+1}-\beta_\nu)\rho^\nu(ly_\nu)(t)-\rho^{m+1}\beta_m(ly_m)(t)\right]\operatorname{sign}(t-\tau)\ \geq_{\bar\sigma}\ ($$

Тогда неоднородная задача Коши (5), (6) *однозначно раз... ... вольных векторе* $c \in \mathbb{R}^n$ *и функции* $f \in L([a, b], \mathbb{R}^n)$. *Единст... задачи* (5), (6) *представимо в виде равномерно сходящегося на* $[a, b]$ *функц... онального ряда*

$$u(t) = \tilde f(t) + \int_\tau^t (l\tilde f)(s)ds + \int_\tau^t l\left(\int_\tau^\cdot (l\tilde f)(\xi)d\xi\right)(s)ds + \ldots, \quad t \in [a, b],$$

где, по определению,

$$\tilde f(t) := c + \int_\tau^t f(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

Кроме того, если для вектора c *и вектор-функции* f *при всех* t *из* $[a$ *... выполнено неравенство*

$$\int_\tau^t f(s)ds \ \geq_{\bar\sigma}\ -c,$$

то единственное решение (12) *задачи* (5), (6) *в каждой точке* t ... *удовлетворяет условию* (4).

Напомним, что всюду в работе используется обозначение 6 ... мер, условие (14), иными словами, означает, что при всех t из $[a$ ... 2, … , n имеют место неравенства

$$\sigma_k\left[c_k + \int_\tau^t f_k(s)ds\right] \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Замечание 2. Легко видеть, что для справедливости свойст... венного решения задачи Коши (5), (6) в условиях теоремы 1, в частн... точно выполнения соотношений

$$c \ \geq_{\bar\sigma}\ 0$$

и

$$f(t)\operatorname{sign}(t-\tau) \ \geq_{\bar\sigma}\ 0 \quad \text{для п. в.} \quad t \in [a, b].$$

Замечание 3. Принимая во внимание определение (8) последоват... (7), условие (11) можно представить в виде

$$\left[\beta_0 y_0'(t)+\rho\sum_{\nu=0}^{m-1}(\beta_{\nu+1}-\beta_\nu)\rho^\nu y_{\nu+1}'(t)-\rho^{m+1}\beta_m y_{m+1}'(t)\right]\operatorname{sign}(t-\tau)\ \geq_{\bar\sigma}\ 0, \quad t$$

Из теоремы 1, в частности, вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что линейный оператор* l *в уравне... является* $(\bar\sigma, \tau)$*-положительным. Пусть, кроме того, найдутся так... ственные* $\alpha \in (0, 1)$, $\rho \in (1, +\infty)$, *целые неотрицательные числа* k *а также абсолютно непрерывная функция* $y_0 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *со свойств...*

…(10), *при которых для почти всех* t *из промежутка* $[a, b]$ *выполнены неравенства*

$$\left[y_0'(t) - \frac{\rho^{k+1}}{1-\alpha} l\left(\rho^r y_{k+r} - \alpha y_k\right)(t)\right] \operatorname{sign}(t-\tau) \ \geq_{\bar{\sigma}} \ 0. \tag{15}$$

Тогда задача (2), (3) *имеет лишь тривиальное решение, а соответствующая неоднородная задача* (5), (6) *при произвольных векторе* $c \in \mathbb{R}^n$ *и функции* $f \in L([a, b], \mathbb{R}^n)$ *имеет единственное решение, которое, кроме того, представимо в виде равномерно сходящегося функционального ряда* (12).

Если же для c *и* f *в уравнении* (5) *при всех* t *из* $[a, b]$ *выполнено неравенство* (14), *то единственное решение* (12) *задачи* (5), (6) *удовлетворяет условию* (4).

***Замечание* 4.** Из формулы (8) ясно, что условие (11) выполнено тогда и только тогда, когда производные функций y_0, y_{k+1} и y_{k+r+1} связаны соотношением

$$\left[y_0'(t) - \frac{\rho^{k+1}}{1-\alpha}\left(\rho^r y_{k+r+1}'(t) - \alpha y_{k+1}'(t)\right)\right] \operatorname{sign}(t-\tau) \ \geq_{\bar{\sigma}} \ 0, \quad t \in [a, b].$$

***Замечание* 5.** Условие (15) неулучшаемо в том смысле, что его, вообще говоря, нельзя заменить условием вида

$$\left[(1-\alpha) y_0'(t) - l(y_{k+r} - \alpha y_k)(t)\right] \operatorname{sign}(t-\tau) \ \geq_{\bar{\sigma}} \ 0, \quad t \in [a, b], \tag{16}$$

где $\alpha \in (0, 1]$. Этот факт подтверждается, в частности, приводимым ниже примером 1.

***Пример* 1.** Рассмотрим однородную задачу Коши (3) для скалярного функционально-дифференциального уравнения вида

$$u'(t) = \frac{\operatorname{sign}(t-\tau)}{|\theta-\tau|} u(\theta), \qquad t \in [a, b], \tag{17}$$

в котором θ — некоторая заданная точка из $[a, b] \setminus \{\tau\}$.

Зафиксируем некоторую произвольную абсолютно непрерывную функцию $y_0 \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям

$$y_0(\tau) = 0, \qquad y_0(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, b] \setminus \{\tau\}, \tag{18}$$

и построим соответствующие функции $y_1, y_2, \ldots$, определяемые формулой (8), в которой линейный оператор $l \colon C([a, b], \mathbb{R}) \to L([a, b], \mathbb{R})$ задан соотношением

$$C([a, b], \mathbb{R}) \ni u(\cdot) \ \mapsto \ lu := \frac{\operatorname{sign}(\cdot - \tau)}{|\theta-\tau|} u(\theta). \tag{19}$$

Этот оператор, очевидно, $(1, \tau)$-положителен в смысле определения 2.

Поскольку, как легко проверить, формула (8) в данном случае имеет вид

$$y_k(t) = \left|\frac{t-\tau}{\theta-\tau}\right| y_{k-1}(\theta), \quad t \in [a, b],$$

очевидно, что при всех $k \geq 0$

$$y_k(t) = \left|\frac{t-\tau}{\theta-\tau}\right| y_0(\theta), \quad t \in [a, b]. \tag{20}$$

Зададим теперь какие-либо $\alpha \in (0, 1]$, $k \geq 0$, $r \geq 1$ и рассмотрим выражение в квадратных скобках

$$\Delta(t) := (1-\alpha)\, y_0'(t) - l(y_{k+r} - \alpha y_k)(t) \tag{21}$$

из левой части соотношения (16). Согласно (19) и (20), имеем

$$\Delta(t) = (1-\alpha)\left[y_0'(t) - \frac{\operatorname{sign}(t-\tau)}{\theta-\tau} y_0(\theta)\right], \quad t \in [a, b], \tag{22}$$

независимо от значений k, r и α. Таким образом, условие (16) в рассматриваемом случае равносильно выполнению неравенства

$$y_0'(t) - \frac{\operatorname{sign}(t-\tau)}{\theta-\tau} y_0(\theta) \geq 0, \quad t \in [a, b], \tag{23}$$

с некоторой абсолютно непрерывной функцией $y_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$, для которой имеет место свойство (18).

Заметим теперь, что условие (23) выполнено в виде равенства при

$$y_0(t) = \lambda\left|\frac{t-\tau}{\theta-\tau}\right|, \quad t \in [a, b], \tag{24}$$

где λ — произвольная положительная постоянная. Справедливость для такой функции y_0 условий (18) при этом очевидна. Легко, однако, убедиться в том, что любая функция вида (24) является нетривиальным решением однородной задачи Коши (17), (3).

Таким образом, мы показали, что условие (16), вообще говоря, не является достаточным для единственности тривиального решения однородной задачи (2), (3), и, следовательно, ослабленная форма (16) условия (15) уже не гарантирует однозначной разрешимости неоднородной задачи (5), (6) при произвольных c и f.

Замечание 6. Как видно из доказательства теоремы 2 работы [3], с помощью которой в пп. 6.1, 6.2 устанавливаются основные теоремы 1 и 2 настоящей работы, в условиях последних спектральный радиус линейного оператора

$$C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n) \ni u \;\mapsto\; \int_\tau^{\cdot} (lu)(s)\, ds$$

в пространстве[1] $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$ меньше единицы. Отсюда, в частности, следует равномерная сходимость последовательности функций (7) к функции, тождественно равной нулю, т. е. к единственному решению однородной задачи Коши (2), (3).

Любопытно отметить, что основные полученные здесь условия, достаточные для единственности тривиального решения упомянутой однородной задачи, формулируются в терминах именно тех функций (7), близость которых к нулю и следует, как замечено выше, из утверждающей части теорем.

5. Приложения. Приведем ряд следствий из сформулированных выше утверждений.

5.1. Задача Коши для систем линейных уравнений. Из теорем 1 и 2 вытекает ряд более конкретных условий, достаточных для отсутствия нетривиальных решений у однородной задачи Коши (2), (3).

[1] См. п. 2, обозначение 4.

Как и в п. 4, зафиксируем некоторые $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \subset \{-1, 1\}$.

***Следствие* 1.** *Пусть l в (2) и (5) $(\bar{\sigma}, \tau)$-положителен. Предположим, что найдутся удовлетворяющая условиям (9) и (10) абсолютно непрерывная функция $y_0 \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, неотрицательные постоянные α, β и γ, а также некоторое $\rho \in (1, +\infty)$, при которых соответствующие y_0 функции y_1, y_{m-1}, y_m и y_{m+1} для почти всех t из промежутка $[a, b]$ удовлетворяют неравенству*

$$\left[\frac{1}{\rho} y_0'(t) + (\alpha - 1)\, y_1'(t) + (\beta - \alpha)\rho^{m-2} y_{m-1}'(t) + (\gamma - \beta)\rho^{m-1} y_m'(t) - \gamma\rho^m y_{m+1}'(t)\right] \times$$

$$\times\ \operatorname{sign}(t - \tau)\ \geq_{\bar{\sigma}}\ 0. \tag{25}$$

Тогда относительно однородной и неоднородной задач Коши (2), (3) *и* (5), (6) *справедливо заключение теоремы* 1.

Напомним, что функции $y_1, y_2, \ldots$ определяются по заданной функции y_0 с помощью рекуррентной формулы (8).

***Следствие* 2.** *Пусть оператор l в уравнениях* (2) *и* (5) $(\bar{\sigma}, \tau)$-*положителен. Предположим, кроме того, что существуют такие абсолютно непрерывная функция $y_0 \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ со свойствами* (9) *и* (10), *натуральное m и вещественные ρ и β, $\rho > 1$, $\beta \geq 0$, для которых при почти всех t из промежутка $[a, b]$ выполнено неравенство*

$$\left[\frac{1}{\rho^m} y_0'(t) + (\beta - 1)(l y_{m-1})(t) - \rho\beta (l y_m)(t)\right] \operatorname{sign}(t - \tau)\ \geq_{\bar{\sigma}}\ 0, \quad t \in [a, b]. \tag{26}$$

Тогда справедливо заключение теоремы 1.

***Замечание* 7.** Согласно равенству (8), условие (26) равносильно выполнению для производных функций y_0, y_m и y_{m+1} соотношения

$$\left[\frac{1}{\rho^m} y_0'(t) + (\beta - 1)\, y_m'(t) + \rho\beta\, y_{m+1}'(t)\right] \operatorname{sign}(t - \tau)\ \geq_{\bar{\sigma}}\ 0, \quad t \in [a, b].$$

***Следствие* 3.** *Предположим, что l в* (2) *и* (5) $(\bar{\sigma}, \tau)$-*положителен и, кроме того, найдутся абсолютно непрерывная функция $y_0 \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ со свойствами* (9) *и* (10), *натуральное m и вещественное ρ, $\rho > 1$, такие, что при почти всех t из промежутка $[a, b]$ выполнено неравенство*

$$\left[y_0'(t) - \rho^m (l y_{m-1})(t)\right] \operatorname{sign}(t - \tau)\ \geq_{\bar{\sigma}}\ 0, \quad t \in [a, b]. \tag{27}$$

Тогда относительно однородной и неоднородной задач Коши (2), (3) *и* (5), (6) *справедливо заключение теоремы* 1.

***Следствие* 4.** *Предположим, что в уравнениях* (2) *и* (5) *оператор l является $(\bar{\sigma}, \tau)$-положительным и, кроме того, существуют такие $\rho \in (1, +\infty)$, $\alpha \in (0, 1)$, целые $k \geq 0$, $r \geq 1$ и $q \geq 1$, а также некоторое $d \in \mathbb{R}^n$, $d >_{\bar{\sigma}} 0$, для которых выполнено условие*

$$l(\rho^r y_{k+r} - \alpha y_k)(t) \operatorname{sign}(t - \tau)\ \leq_{\bar{\sigma}}\ \frac{q(1 - \alpha)}{\rho^{k+1}} |t - \tau|^{q-1} d, \quad t \in [a, b], \tag{28}$$

при $y_0(t) := |t - \tau|^q d$, $t \in [a, b]$.

Тогда относительно однородной и неоднородной задач Коши (2), (3) (6) *справедливо заключение теоремы* 1.

***Следствие* 5.** *Пусть оператор* l $(\bar{\sigma}, \tau)$*-положителен и с... кие вещественное* $\gamma \in (0, 1)$ *и целые* $k \geq 0$, $r \geq 1$, *для которых неравенство*

$$y_{k+r}(t) \leq_{\bar{\sigma}} \gamma y_k(t), \quad t \in [a, b],$$

где $y_0 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — *некоторая фиксированная абсолютн... функция, удовлетворяющая условиям* (9), (10) *и* ...

$$y_0'(t) \operatorname{sign}(t - \tau) \geq_{\bar{\sigma}} 0, \quad t \in [a, b].$$

Тогда для однородной и неоднородной задач (2), (3) *и* (5), (6) *заключение теоремы* 1.

Условиям (9) и (30), выполнение которых для „начального при... предполагается в следствии 5, удовлетворяет, напри...

$$y_0(t) = |t - \tau|^q d, \quad t \in [a, b],$$

где d — постоянный n-мерный вектор, удовлетворяющий услови... q — некоторое натуральное число.

***Следствие* 6.** *Пусть оператор* l *в уравнениях* (2) *и* (5) $(\bar{\sigma}$ ... *лен и, кроме того, существует некоторая удовлетворяющ...*

$$y(\tau) = 0, \quad y(t) >_{\bar{\sigma}} 0, \quad t \in$$

и

$$y'(t) \operatorname{sign}(t - \tau) \geq_{\bar{\sigma}} 0, \quad t \in [a, b],$$

абсолютно непрерывная функция $y : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, *для которой при... постоянной* $\gamma \in (0, 1)$ *выполнено неравенство*

$$\int_{\tau}^{t} (ly)(s) ds \leq_{\bar{\sigma}} \gamma y(t), \quad t \in [a, b].$$

Тогда относительно задач Коши (2), (3) и (5), (6) *справедливо за... теоремы* 1.

Приведем еще некоторые утверждения об однозначной разрешимост... Коши (5), (6) в том наиболее часто встречающемся в конкретных зада... чае, когда функционально-дифференциальное уравнение (5) имеет вид

$$u'(t) = \sum_{\nu=0}^{N} P_\nu(t) u(\omega_\nu(t)) + f(t), \quad t \in [a, b],$$

где функции $\omega_\nu : [a, b] \to [a, b]$, $\nu = 0, 1, \ldots, N$, измеримы, а $P_\nu :$ ... $\to GL_n(\mathbb{R})$, $\nu = 0, 1, \ldots, N$, и $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ имеют суммируемые комп...

***Следствие* 7.** *Пусть* $\omega_\nu : [a, b] \to [a, b]$, $\nu = 0, 1, \ldots$, ... *суммируемые матрицы-функции* $P_\nu : [a, b] \to GL_n(\mathbb{R})$, $\nu = 0, 1, \ldots$ ... *некоторого вектора* (1) *с компонентами* $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \subset \{-1, 1\}$ ... *воряют условию*

$$\sum_{\nu=0}^{N} P_\nu(t)\bar{\sigma}\,\mathrm{sign}(t-\tau) \geq_{\bar{\sigma}} 0 \quad \text{при п. в.} \quad t \in [a, b]. \tag{33}$$

Кроме того, предположим, что при некоторых постоянной $\gamma \in (0, 1)$ *и* n*-мерном векторе* d, *удовлетворяющем условию*

$$d >_{\bar{\sigma}} 0, \tag{34}$$

почти везде на $[a, b]$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{\nu=0}^{N} P_\nu(t) \sum_{j=0}^{N} \int_{\tau}^{\omega_\nu(t)} P_j(s)\,d\left|\omega_j(s)-\tau\right|^q ds \cdot \mathrm{sign}(t-\tau) \leq_{\bar{\sigma}} \gamma q\left|t-\tau\right|^{q-1} d, \; t \in [a, b]. \tag{35}$$

Тогда неоднородная задача Коши (32), (6) *однозначно разрешима при произвольных* $f \in L([a, b], \mathbb{R}^n)$ *и* $c \in \mathbb{R}^n$. *Кроме того, при вектор-функции* f *и векторе* c, *для которых имеет место неравенство* (14), *единственное решение* $u(\cdot)$ *задачи* (32), (6) *удовлетворяет условию* (4).

Следствие 8. *Предположим, что измеримые* $\omega_\nu : [a, b] \to [a, b]$, $\nu = 0, 1, \ldots, N$, *и суммируемые* $P_\nu : [a, b] \to GL_n(\mathbb{R})$, $\nu = 0, 1, \ldots, N$, *функции удовлетворяют условию* (33) *с некоторым вектором* $\bar{\sigma} \in \{-1, 1\}^n$ *и, кроме того, при некоторых постоянных* $q \in \mathbb{N}$, $\gamma \in (0, 1)$ *и удовлетворяющем условию* (34) *векторе* d *почти всюду на* $[a, b]$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{\nu=0}^{N} P_\nu(t)\left|\omega_\nu(s)-\tau\right|^q \mathrm{sign}(t-\tau)\,d \leq_{\bar{\sigma}} \gamma q\left|t-\tau\right|^{q-1} d, \quad t \in [a, b].$$

Тогда неоднородная задача Коши (32), (6) *однозначно разрешима при произвольных* $f \in L([a, b], \mathbb{R}^n)$ *и* $c \in \mathbb{R}^n$. *Более того, из справедливости для* f *и* c *условия* (14) *следует, что единственное решение* $u(\cdot)$ *задачи* (32), (6) *удовлетворяет неравенству* (4).

5.2. ***Разрешимость задачи Коши для скалярных уравнений.*** Приведем некоторые утверждения об однозначной разрешимости задачи Коши для скалярных уравнений (2) и (5), т. е. в случае, когда $n = 1$.

Следствие 9. *Предположим, что в уравнениях* (2) *и* (5) *оператор* l *является* (σ, τ)*-положительным при некотором фиксированном* $\sigma \in \{-1, 1\}$ *и, кроме того, существуют* $\rho \in (1, +\infty)$, $\alpha \in (0, 1)$ *и целые* $k \geq 0$, $r \geq 1$, $q \geq 1$, *для которых выполнено условие*

$$\frac{q(1-\alpha)}{\rho^{k+1}}\left|t-\tau\right|^{q-1} \geq \sigma l(\rho^r y_{k+r} - \alpha y_k)(t)\,\mathrm{sign}(t-\tau); \quad t \in [a, b], \tag{36}$$

при $y_0(t) := \sigma\left|t-\tau\right|^q$, $t \in [a, b]$.

Тогда неоднородная задача Коши (5), (6) *однозначно разрешима для произвольных* $c \in \mathbb{R}$ *и* $f \in L([a, b], \mathbb{R})$, *причем единственное решение задачи* (5), (6) *представимо в виде равномерно сходящегося на* $[a, b]$ *функционального ряда* (12), *где функция* $\tilde{f}$ *определена равенством* (13). *Кроме того, если функция* f *и вектор* c *в* (5), (6) *при некотором* $\sigma \in \{-1, 1\}$ *удовлетворяют условию*

$$\sigma\left[c + \int_{\tau}^{t} f(s)\,ds\right] \geq 0, \quad t \in [a, b], \tag{37}$$

то для единственного решения $u(\cdot)$ *этой задачи имеет место соотноше*

$$\sigma u(t) \geq 0, \quad t \in [a, b].$$

***Следствие* 10.** *Предположим, что оператор* l *в скалярно* ... (σ, τ)*-положителен для некоторого* $\sigma \in \{-1, 1\}$ *и, кроме то* ... *постоянные* $\rho \in (1, +\infty)$ *и* $\alpha \in (0, 1)$, *при которых функция*

$$w := l(|\cdot - \tau|)$$

удовлетворяет интегральному неравенству

$$\left[\sigma l\left(\int_{\tau}^{\cdot} w(s)\,ds\right)(t) - \frac{\alpha}{\rho} w(t)\right] \operatorname{sign}(t-\tau) \leq \frac{1-\alpha}{\rho^2}, \quad t \in [$$

Тогда справедливо заключение следствия 9.

***Замечание* 8.** Условие (39), очевидно, означае

$$[a, b] \ni t \mapsto z(t) := \int_{\tau}^{t}$$

является решением дифференциального неравенства

$$\left[\sigma (lz)(t) - \frac{\alpha}{\rho} z'(t)\right] \operatorname{sign}(t-\tau) \leq \frac{1-\alpha}{\rho^2}$$

Для скалярного функционально-дифференциального

$$u'(t) = \sum_{\nu=0}^{N} r_{\nu}(t)\, u(\omega_{\nu}(t)) + f(t), \quad t \in [a, b],$$

где $f \in L([a, b], \mathbb{R})$, функции $\omega_{\nu} : [a, b] \to [a, b]$, $\nu = 0, 1, \ldots$ а $r_{\nu} : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\nu = 0, 1, \ldots, N$, суммируемы, из изложенного ют, в частности, следующие утверждения.

***Следствие* 11.** *Предположим, что при некоторых постоянн* *и* $q \in \mathbb{N}$ *для почти всех* t *из промежутка* $[a, b]$ *выполнены*

$$\sum_{\nu=0}^{N} r_{\nu}(t) \operatorname{sign}(t-\tau) \geq 0$$

и

$$\gamma q |t-\tau|^{q-1} \geq \operatorname{sign}(t-\tau) \sum_{\nu=0}^{N} r_{\nu}(t) \sum_{j=0}^{N} \int_{\tau}^{\omega_{\nu}(t)} r_j(s) \left|\omega_j(s) - \tau\right|^q ds$$

Тогда имеет место заключение следствия 9.

***Следствие* 12.** *Пусть суммируемые функции* $r_{\nu} : [a, b] \to \mathbb{R}$ 1, …, N, *в уравнении* (40) *удовлетворяют условиям* (41) *и, кроме т* *которых* $\gamma \in (0, 1)$ *и* $q \in \mathbb{N}$ *для почти всех* t *из промежутка* $[a,$ *место неравенство*

$$\gamma|t-\tau|^q \geq \sum_{\nu=0}^{N} \int_{\tau}^{t} |\omega_\nu(s)-\tau|^q r_\nu(s)\,ds. \tag{43}$$

Тогда справедливо заключение следствия 9.

Приведем еще одно простое условие существования и единственности решения неоднородной задачи Коши (6) для скалярного функционально-дифференциального уравнения

$$u'(t) = r(t)u(\omega(t)) + f(t), \quad t \in [a, b], \tag{44}$$

в котором функция $\omega: [a, b] \to [a, b]$ измерима, а $r: [a, b] \to \mathbb{R}$ и $f: [a, b] \to \to \mathbb{R}$ суммируемы.

***Следствие* 13.** *Предположим, что выполнено неравенство*

$$r(t)\operatorname{sign}(t-\tau) \geq 0, \quad t \in [a, b], \tag{45}$$

и, кроме того, найдутся такие постоянные $q \in \mathbb{N}$ *и* $\gamma \in (0, 1)$, *что*

$$q\gamma|t-\tau|^{q-1} \geq |\omega(t)-\tau|^q r(t)\operatorname{sign}(t-\tau), \quad t \in [a, b]. \tag{46}$$

Тогда при произвольных вещественном c *и суммируемой функции* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *задача Коши* (44), (6) *однозначно разрешима. В частности, однородная задача* (2), (3) *имеет лишь тривиальное решение. Более того, в случае, когда* f *и* c *при каком-либо* $\sigma \in \{-1, 1\}$ *удовлетворяют условию* (37), *для единственного решения неоднородной задачи* (44), (6) *при этом значении* σ *имеет место соотношение* (38).

***Замечание* 9.** В случае, когда функция $\omega: [a, b] \to [a, b]$ не обращается в нуль ни на каком множестве положительной меры, условие (46), очевидно, можно представить в виде

$$r(t)\operatorname{sign}(t-\tau) \leq q\gamma\frac{|t-\tau|^{q-1}}{|\omega(t)-\tau|^q} \quad \text{для п. в.} \quad t \in [a, b].$$

***Пример* 2.** Рассмотрим скалярное функционально-дифференциальное уравнение (44) в предположении, что функция $\omega: [a, b] \to [a, b]$ при почти всех t из $[a, b]$ удовлетворяет неравенствам

$$0 < |\omega(t)-\tau| \leq \delta, \tag{47}$$

где δ — некоторая не зависящая от t положительная[2] постоянная. Условие (47) означает, что значения функции ω почти везде на $[a, b]$ отличны от τ и, кроме того, заключены в замыкании δ-окрестности точки τ.

Ввиду (47) можно указать следующее условие однозначной разрешимости начальной задачи для уравнения (44).

***Следствие* 14.** *Пусть при некотором положительном* δ *для функции* $\omega: [a, b] \to [a, b]$ *в уравнении* (44) *имеет место неравенство* (47). *Тогда выполнения при некотором* $q \in \mathbb{N}$ *условия*

---

[2] Случаю $\delta = 0$ соответствует простейшая задача Коши

$$u'(t) = r(t)c + f(t), \quad t \in [a, b],$$
$$u(\tau) = c,$$

однозначная разрешимость которой при всех c и f очевидна.

$$0 \le r(t)\operatorname{sign}(t-\tau) \le \frac{\gamma q}{\delta^q}|t-\tau|^{q-1}, \quad t \in [a, b], \tag{48}$$

достаточно для существования и единственности решения неоднородной задачи Коши (44), (6) *при произвольных* $c \in \mathbb{R}$ *и* $f \in L([a, b], \mathbb{R})$. *Это же условие гарантирует, что из выполнения при каком-либо* $\sigma \in \{-1, 1\}$ *для* f *и* c *условия* (37) *следует справедливость неравенства* (38) *для решения упомянутой задачи.*

Доказательство. Действительно, из выполнения почти всюду на $[a, b]$ неравенства (47) вытекает, что, также при почти всех t из $[a, b]$,

$$|\omega(t) - \tau|^q \le \delta^q.$$

Отсюда, в частности, следует, что при выполнении условия (48) имеет место оценка

$$r(t)\operatorname{sign}(t-\tau) \le q\gamma \frac{|t-\tau|^{q-1}}{|\omega(t)-\tau|^q}, \quad t \in [a, b],$$

или, что то же самое (см. условие (47) и замечание 9),

$$\gamma q|t-\tau|^{q-1} - r(t)|\omega(t)-\tau|^q \operatorname{sign}(t-\tau) \ge 0, \quad t \in [a, b].$$

Поскольку последнее из полученных неравенств совпадает с условием (46), к рассматриваемой задаче можно применить следствие 13, откуда и вытекает доказываемое утверждение.

6. Доказательства утверждений пп. 4, 5. При доказательстве теоремы 1 нам потребуется следующее утверждение об однозначной разрешимости однородной задачи (2), (3), установленное в работе [3].

Теорема 3. *Пусть линейный оператор* l *в уравнении* (2) *при некотором* $\bar\sigma \in \{-1, 1\}^n$ *является* $(\bar\sigma, \tau)$*-положительным. Допустим также, что найдутся такие число* $\rho \in (1, +\infty)$ *и абсолютно непрерывная функция*[3] $y \in C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$, *для которых*

$$y(t) >_{\bar\sigma} 0, \quad t \in [a, b]\setminus\{\tau\}, \tag{49}$$

и, кроме того, при почти всех t *из* $[a, b]$ *выполнено дифференциальное неравенство*

$$[y'(t) - \rho(ly)(t)]\operatorname{sign}(t-\tau) \ge_{\bar\sigma} 0. \tag{50}$$

Тогда начальная задача (2), (3) *имеет лишь тривиальное решение, а соответствующая неоднородная задача* (5), (6) *имеет единственное решение* $u(\cdot)$ *при произвольных векторе* $c \in \mathbb{R}^n$ *и функции* $f \in L([a, b], \mathbb{R}^n)$. *Кроме того, это решение представимо в виде равномерно сходящегося ряда* (12).

Если же вектор c *и функция* f *удовлетворяют условию* (14), *то упомянутое решение* $u(\cdot)$ *обладает свойством* (4).

Нам понадобится также следующая простая лемма.

Лемма 1. *Предположим, что некоторая непрерывная функция* $y_0 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условию*

$$y_0(t) \ge_{\bar\sigma} 0, \quad t \in [a, b], \tag{51}$$

[3] См. обозначение 4 в п. 2.

а линейный оператор $l\colon C([a,b],\mathbb{R}^n)\to L([a,b],\mathbb{R}^n)$ *является* $(\bar\sigma,\tau)$*-положительным. Тогда при каждом натуральном* k *значения соответствующей функции* (8) *также содержатся в конусе* $\sigma_1\mathbb{R}_+\times\sigma_2\mathbb{R}_+\times\ldots\times\sigma_n\mathbb{R}_+$:

$$y_k(t)\ \geq_{\bar\sigma}\ 0,\quad t\in[a,b]. \tag{52}$$

Доказательство. Согласно (8), имеем

$$y_1(t)=\int\limits_\tau^t(ly_0)(s)\,ds,\quad t\in[a,b].$$

Из условия (51), в силу $(\bar\sigma,\tau)$-положительности оператора l, вытекает

$$(ly_0)(t)\operatorname{sign}(t-\tau)\geq 0,\quad t\in[a,b],$$

откуда непосредственно следует неотрицательность функции (52) в смысле отношения $\leq_{\bar\sigma}$:

$$y_1(t)\ \geq_{\bar\sigma}\ 0,\quad t\in[a,b].$$

Применяя метод математической индукции, легко показать, что условие (52) выполнено при всех $k\geq 1$.

Лемма доказана.

***6.1. Доказательство теоремы* 1.** Для того чтобы установить требуемое утверждение, удобно воспользоваться приведенной выше теоремой 3. Покажем, как именно это можно сделать.

Рассуждая по аналогии с изложенным в [1] [4], введем в рассмотрение функцию y вида

$$y(t)=\beta_0y_0(t)+\beta_1\rho y_1(t)+\ldots+\beta_m\rho^m y_m(t),\qquad t\in[a,b]. \tag{53}$$

Напомним, что функции $y_1,y_2,\ldots$ построены по заданной в условии теоремы функции y_0 согласно формуле (8).

Из леммы 1 следует, что в принятых условиях при всех $k\geq 1$ выполнено соотношение (52). Поэтому выражение (53), задающее функцию y, можно записать в виде

$$y(t)=\beta_0y_0(t)+z(t),\quad t\in[a,b], \tag{54}$$

где $z\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ неотрицательна по конусу $\sigma_1\mathbb{R}_+\times\sigma_2\mathbb{R}_+\times\ldots\times\sigma_n\mathbb{R}_+$, т. е.

$$z(t)\ \geq_{\bar\sigma}\ 0,\qquad t\in[a,b].$$

Учитывая, что y_0 удовлетворяет условию (51), на основании (54) заключаем, что для функции y имеет место соотношение (49). Кроме того, из (8) и (53) очевидно, что функция y абсолютно непрерывна, поскольку, по предположению, y_0 обладает этим свойством.

Рассмотрим теперь суммируемую функцию

$$w:=y'-\rho ly. \tag{55}$$

[4] При доказательстве относящейся к скалярному случаю теоремы 1.1 в [1] используется функция, которая в наших обозначениях имеет вид

$$(1-\alpha)\sum_{j=0}^{k}y_j+\sum_{j=k+1}^{k+r}y_j,$$

причем $y_0(t)=1$ для всех $t\in[a,b]$.

Согласно (8) и (53), для функции w имеем

$$w = \beta_0 y_0' + \beta_1\rho y_1' + \ldots + \beta_m \rho^m y_m' - \rho l(\beta_0 y_0 + \beta_1 \rho y_1 + \ldots + \beta_m \rho^m y_m). \qquad (56)$$

Из способа построения функций (7) ясно, что при всех $k \geq 1$

$$y_k' = l y_{k-1}.$$

Следовательно, тождество (56) можно записать в виде

$$w = \beta_0 y_0' + \rho l(\beta_1 y_0) + \ldots + \rho^m l(\beta_m y_{m-1}) -$$

$$- \rho l(\beta_0 y_0) - \rho^2 l(\beta_1 y_1) - \ldots - \rho^{m+1} l(\beta_m y_m).$$

Последнее равенство, очевидно, эквивалентно соотношению

$$w = \beta_0 y_0' + \rho l[(\beta_1 - \beta_0) y_0 + (\beta_2 - \beta_1)\rho y_1 + (\beta_3 - \beta_2)\rho^2 y_2 + \ldots$$

$$\ldots + (\beta_m - \beta_{m-1})\rho^{m-1} y_{m-1} - \beta_m \rho^m y_m].$$

Таким образом, имеем равенство

$$w = \beta_0 y_0' + \rho l\left(\sum_{\nu=0}^{m-1} (\beta_{\nu+1} - \beta_\nu)\rho^\nu y_\nu\right) - \rho^{m+1}\beta_m l y_m,$$

откуда, в силу условия (11), вытекает соотношение

$$w(t) \geq_{\tilde{\sigma}} 0, \quad t \in [a, b].$$

Последнее неравенство, согласно (55), означает, что заданная формулой (53) функция y является решением дифференциального неравенства (50). Кроме того, как было показано выше, для y справедливо соотношение (49).

Таким образом, построенная по формуле (53) абсолютно непрерывная функция y удовлетворяет условиям теоремы 3. Применение упомянутой теоремы к рассматриваемым задачам Коши (2), (3) и (5), (6) приводит непосредственно к требуемым утверждениям.

Теорема 1 доказана.

***6.2. Доказательство теоремы* 2.** Нетрудно проверить, что неравенство (15) является частным случаем (11), когда

$$\beta_j = 1 - \alpha$$

для $j = 0, 1, 2, \ldots, k$ и

$$\beta_j = 1$$

для $j = k + 1, k + 2, \ldots, k + r$. Поэтому утверждение теоремы 2 следует непосредственно из теоремы 1.

***6.3. Доказательство следствия* 1.** Полагая

$$\beta_j := \begin{cases} 1 & \text{при } j = 0, \\ \alpha & \text{при } j = 1, 2, \ldots, m-2, \\ \beta & \text{при } j = m-1, \\ \gamma & \text{при } j = m, \end{cases}$$

легко убеждаемся, что при выполнении неравенства (25) справедливо условие (11) с указанными выше значениями коэффициентов β_j, $j = 1, 2, \ldots, m$:

$$\Big[y_0'(t) + \rho\big[(\alpha-1)\,y_1'(t) + (\beta-\alpha)\rho^{m-2}y_{m-1}'(t)\; +$$

$$+\;(\gamma-\beta)\rho^{m-1}y_m'(t) - \gamma\rho^m y_{m+1}'(t)\big]\operatorname{sign}(t-\tau) \;\geq\; 0.$$

Таким образом, для получения требуемого утверждения можно воспользоваться теоремой 1.

6.4. Доказательство следствия 2. Определим числа $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ равенством

$$\beta_j \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{при } \; j = 0, 1, \ldots, m-1, \\ \beta & \text{при } \; j = m. \end{cases}$$

Легко проверить, что тогда неравенство (26) совпадет с условием (11) теоремы 1, применение которой и приведет нас к требуемому утверждению.

6.5. Доказательство следствия 3. Положим

$$\beta_j \;:=\; 1, \quad j = 0, 1, \ldots, m.$$

При этих значениях коэффициентов $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ условие (27) совпадает с неравенством (11). Применяя теорему 1, убеждаемся в справедливости следствия 3.

6.6. Доказательство следствия 4. Легко видеть, что соотношение (28), справедливость которого предполагается в условии, можно записать в виде

$$q|t-\tau|^{q-1}d \;-\; \frac{\rho^{k+1}}{1-\alpha}\,l(\rho^r y_{k+r} - \alpha y_k)(t)\operatorname{sign}(t-\tau) \;\geq_{\bar\sigma}\; 0, \quad t \in [a, b],$$

или, что то же самое,

$$\left[q|t-\tau|^{q-1}\operatorname{sign}(t-\tau)d \;-\; \frac{\rho^{k+1}}{1-\alpha}\,l(\rho^r y_{k+r} - \alpha y_k)(t)\right]\operatorname{sign}(t-\tau) \;\geq_{\bar\sigma}\; 0, \quad t \in [a, b].$$

Положим

$$y_0(t) \;:=\; |t-\tau|^q d, \quad t \in [a, b], \tag{57}$$

в рекуррентной формуле (15). Ясно, что так определенная функция y_0 абсолютно непрерывна, и, как легко проверить,

$$y_0'(t) \;=\; \begin{cases} q(t-\tau)^{q-1}d & \text{при } t \geq \tau, \\ (-1)^q q(t-\tau)^{q-1}d & \text{при } t \leq \tau, \end{cases}$$

или, что то же,

$$y_0'(t) \;=\; q|t-\tau|^{q-1}\operatorname{sign}(t-\tau)d, \quad t \in [a, b]. \tag{58}$$

Кроме того, поскольку $d >_{\bar\sigma} 0$, функция (57), очевидно, удовлетворяет условию (10). Учитывая равенство (58), отсюда заключаем, что выполнено условие (15) теоремы 1, применение которой приводит к требуемому результату.

6.7. Доказательство следствия 5. Исходя из заданных $\gamma \in (0, 1)$ и $r \in \in \mathbb{N}$, выберем числа α и ρ так, чтобы имели место соотношения

$$0 < \alpha < 1, \quad \rho > 1, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\rho^r}.$$

Это, очевидно, можно сделать. При таких α и ρ из (29), в силу $(\bar{\sigma}, \tau)$-положительности оператора l в (2) и (5), вытекает неравенство

$$l(\alpha y_k - y_{k+r})(t)\,\mathrm{sign}(t-\tau) \geq_{\bar{\sigma}} 0, \quad t \in [a, b],$$

т. е.

$$l(y_{k+r} - \alpha y_k)(t)\,\mathrm{sign}(t-\tau) \leq_{\bar{\sigma}} 0, \quad t \in [a, b].$$

Отсюда, ввиду (30), следует, что при указанных значениях α и ρ выполняется условие (15).

6.8. Доказательство следствия 6. Легко убедиться, что неравенство (31) представляет собой частный случай (29), когда $k = 0$ и $r = 1$. При этом, согласно (8),

$$y_1(t) = \int_\tau^t (ly)(s)\,ds.$$

Таким образом, требуемое утверждение вытекает из следствия 5.

6.9. Доказательство следствия 7. Достаточно воспользоваться следствием 3 с $m = 2$ и $\rho = 1/\sqrt{\gamma}$.

Применение указанного утверждения возможно ввиду того, что из (35) вытекает (27) с $y_0(t) := |t-\tau|^q d$, $t \in [a, b]$; при этом линейный оператор, заданный выражением в правой части (32), является $(\bar{\sigma}, \tau)$-положительным в смысле определения 2. Последнее упомянутое свойство имеет место в силу следующей леммы.

Лемма 2. *Выполнение для функций* $\omega_\nu : [a, b] \to [a, b]$, $\nu = 0, 1, \ldots, N$, *и* $P_\nu : [a, b] \to GL_n(\mathbb{R})$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, *условия* (33) *гарантирует* $(\bar{\sigma}, \tau)$-*положительность линейного оператора*

$$C([a, b], \mathbb{R}^n) \ni u \;\mapsto\; lu := \sum_{\nu=0}^{N} P_\nu(\cdot)u(\omega_\nu(\cdot)), \quad t \in [a, b]. \tag{59}$$

Доказательство. Пусть функция $u \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию (4). В силу (59), при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$ имеем

$$\sigma_k (l_k u)(t)\,\mathrm{sign}(t-\tau) = \sigma_k \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{N} \sigma_j p_{\nu;kj}(t)\,\mathrm{sign}(t-\tau) \cdot \sigma_j u_j(\omega_\nu(t)), \quad t \in [a, b], \tag{60}$$

где $p_{\nu;kj}$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, означают соответствующие компоненты матриц P_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, n$. Поскольку k-я компонента вектора

$$\sum_{\nu=0}^{N} P_\nu(t)\bar{\sigma}\,\mathrm{sign}(t-\tau)$$

в левой части неравенства (33) при каждом k имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{N} \sigma_j p_{\nu;kj}(t)\,\mathrm{sign}(t-\tau),$$

из (60), в силу (4), получаем, что при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ и почти всех $t \in [a, b]$ имеют место неравенства

$$\sigma_k (l_k u)(t) \operatorname{sign}(t-\tau) \geq 0,$$

т. е.

$$(lu)(t) \operatorname{sign}(t-\tau) \geq_{\bar{\sigma}} 0.$$

Ввиду произвольности u полученное утверждение означает $(\bar{\sigma}, \tau)$-положительность оператора (59).

6.10. Доказательство следствия **8.** Утверждение следствия 8 для функционально-дифференциальных уравнений (5) вида (32) вытекает из следствия 3 при $m = 1$ и $\rho = \gamma^{-1}$.

6.11. Доказательство следствия **9.** Легко видеть, что условие (36) следствия 9 можно представить в виде неравенства (28), если в последнем положить $n = 1$ и $\sigma_1 = \sigma$. Это обстоятельство позволяет воспользоваться следствием 4.

6.12. Доказательство следствия **10.** Требуемый результат вытекает непосредственно из следствия 9 при

$$k = 0, \quad r = 1, \quad q = 1.$$

6.13. Доказательство следствия **11.** Из условия (41), в силу приведенной в п. 6.9 леммы 2 и замечания 1 из п. 3, вытекает, что линейный оператор

$$C([a, b], \mathbb{R}^n) \ni u \mapsto \sum_{\nu=0}^{N} r_\nu(\cdot) u(\omega_\nu(\cdot)) \tag{61}$$

является (σ, τ)-положительным в смысле определения 2 при любом $\sigma \in \{-1, 1\}$. Легко видеть, что неравенство (42), справедливость которого предполагается в формулировке доказываемого утверждения, можно представить в виде (35) при $n = 1$ и $\sigma_1 = \sigma$. Следствие 11, таким образом, вытекает из следствия 7.

6.14. Доказательство следствия **12.** Принимая во внимание соотношение (43), свойство $(1, \tau)$-положительности ассоциированного с уравнением (40) оператора (61) (см. доказательство следствия 11) и формулу (58) для производной функции (57), нетрудно установить, что требуемое утверждение вытекает из следствия 6.

6.15. Доказательство следствия **13.** Пусть выполнено условие (46):

$$\gamma q |t-\tau|^{q-1} - |\omega(t)-\tau|^q r(t) \operatorname{sign}(t-\tau) \geq 0, \quad t \in [a, b],$$

или, что то же самое,

$$\left[\gamma q |t-\tau|^{q-1} \operatorname{sign}(t-\tau) - |\omega(t)-\tau|^q r(t)\right] \operatorname{sign}(t-\tau) \geq 0, \quad t \in [a, b]. \tag{62}$$

Применим к функции в левой части соотношения (62) следующую легко доказываемую лемму.

Лемма 3. *Если* $\tau \in [a, b]$, *а суммируемая функция* $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *такова, что*

$$g(t) \operatorname{sign}(t-\tau) \geq 0, \quad t \in [a, b],$$

то

$$\int_\tau^t g(s)\,ds \geq 0, \quad t \in [a, b].$$

В силу леммы 3 интегрирование обеих частей (62) в пределах от τ до некоторого произвольного t приводит к соотношению

$$\gamma q \int_{\tau}^{t} |s-\tau|^{q-1} \operatorname{sign}(s-\tau)\, ds - \int_{\tau}^{t} |\omega(s)-\tau|^{q} r(s)\, ds \geq 0, \quad t \in [a, b]. \tag{63}$$

Учитывая формулу (58) для производной функции

$$[a, b] \ni t \mapsto |t-\tau|^{q},$$

неравенство (63) можем записать в виде

$$\gamma |t-\tau|^{q} - \int_{\tau}^{t} |\omega(s)-\tau|^{q} r(s)\, ds \geq 0, \quad t \in [a, b].$$

Последнее неравенство, очевидно, является частным случаем условия (43), когда сумма состоит из одного слагаемого. Ясно также, что (45) является частным случаем (41).

Таким образом, мы показали, что в принятых условиях можно воспользоваться следствием 12, из которого и вытекает требуемое утверждение.

1. *Bravyi E., Hakl R., Lomtatidze A.* Optimal conditions for unique solvability of the Cauchy problem for first order linear functional differential equations // Czech. Math. J. – 2002. – **52(127)**, № 3. – P. 513 – 530.
2. *Hakl R., Lomtatidze A., Půža B.* On nonnegative solutions of first order scalar functional differential equations // Mem. Different. Equat. Math. Phys. – 2001. – **23**. – P. 51 – 84.
3. *Ронто А. Н.* Точные условия разрешимости задачи Коши для систем линейных функционально-дифференциальных уравнений первого порядка, задаваемых $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-положительными операторами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 11. – С. 1541 – 1568.
4. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, № 1(23). – С. 3 – 95.
5. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
6. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.

Получено 24.07.2003