УДК 517.944

И. И. Скрыпник (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РЕГУЛЯРНОСТИ ГРАНИЧНОЙ ТОЧКИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИЗМЕРИМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

We prove a necessary condition of the regularity of a point on cylindrical boundary for solutions of second order quasilinear parabolic equations of the divergent form whose coefficients superlinearly growth relative to derivatives with respect to spatial variables. This condition coincide with sufficient condition proved earlier by the author. Thus, we establish a criterion of the regularity of boundary point similar to the well-known Wiener criterion for the Laplace equation.

Доведено необхідну умову регулярності точки на циліндричній границі для розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь другого порядку дивергентної форми, коефіцієнти яких мають надлінійний ріст відносно похідних за просторовими змінними. Ця умова збігається з достатньою умовою, доведеною раніше автором. Тим самим отримано критерій регулярності граничної точки, аналогічний відомому критерію Вінера для рівняння Лапласа.

1. Введение. Будем рассматривать поведение решения нелинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, u_x) = a_0(x, t, u, u_x) \tag{1.1}$$

вблизи цилиндрической границы области $\Omega_T \equiv \Omega \times (0, T)$.

Предположим, что $a_i(x, t, u, q)$, $i = 0, \ldots, N$, $(x, t) \in \Omega_T$, $u \in R^1$, $q \in R^N$, удовлетворяют условию Каратеодори и выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{N} [\, a_i(x, t, u, q') - a_i(x, t, u, q'')\,](q' - q'') > 0 \quad \text{при} \quad q' \neq q'', \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(x, t, u, q) q_i \geq K_1 |q|^p, \qquad p > 2, \tag{1.3}$$

$$|a_i(x, t, u, q)| \leq K_2(|q| + |u|)^{p-1} + h_i(x, t), \qquad i = 0, \ldots, N. \tag{1.4}$$

Кроме того, предполагаем, что для функций $h_i(x, t)$ выполнены следующие условия:

$$h_i(x, t) \geq 0, \quad i = 0, \ldots, N, \quad h_0(x, t) + [\, \overline{h}(x, t)\,]^{p/(p-1)} \in L_r(0, T; L_q(\Omega)), \tag{1.5}$$

$$\overline{h}(x, t) = 1 + \sum_{i=1}^{N} h_i(x, t), \qquad \frac{N}{p}\frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1, \qquad q, r \geq 1.$$

В случае $p = 2$ гельдеровость решений уравнения (1.1) внутри Ω_T и вблизи гладкой границы области доказана О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой [1]. Регулярность граничной точки в случае $p = 2$ исследована в работах В. Цимера [2] и И. В. Скрыпника [3], где получены соответственно достаточное и необходимое условие регулярности.

Внутренняя гельдеровость решений уравнения (1.1) при $p > 2$ была получена Е. Ди Бенедетто [4], достаточное условие регулярности граничной точки в случае $p > 2$ — автором [5].

Цель данной работы — получить необходимое условие регулярности граничной точки для уравнения (1.1) при $p > 2$. При этом развит метод доказательства необходимого условия регулярности граничной точки, основанный на подходе, предложенном для эллиптического случая в [6].

В дальнейшем предполагаем, что $u \in V_{2,p}(\Omega_T) \equiv C(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$. Под решением уравнения (1.1) понимаем функцию $u(x, t) \in V_{2,p}(\Omega_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_\Omega u(x,t)\varphi(x,t)\Big|_{t_1}^{t_2} -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left\{ u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^N a_i(x,t,u,u_x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - a_0(x,t,u,u_x)\varphi \right\} dx\,dt = 0, \qquad (1.6)$$

справедливому для любых $t_1, t_2 \in (0, T)$ и произвольной функции $\varphi(x, t) \in L_p(0, T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)) \cap C(0, T; L_r(\Omega))$ такой, что $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} \in L_p(\Omega_T)$.

Будем говорить, что $(x_0, t_0) \in S_T = \partial\Omega \times (0, T)$ — регулярная граничная точка уравнения (1.1), если для произвольного решения $u(x, t) \in V_{2,p}(\Omega_T)$ этого уравнения, удовлетворяющего условию

$$\varphi(x,t)[u(x,t) - f(x,t)] \in L_p(0, T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)) \qquad (1.7)$$

с некоторыми функциями $\varphi(x, t)$, $f(x, t)$ такими, что $\varphi(x, t) \in C^1(R^{N+1})$, $f(x, t) \in C(\overline{\Omega}_T) \cap V_{2,p}(\Omega_T)$, $\varphi(x, t) \equiv 1$ в некоторой окрестности точки (x_0, t_0), выполнено равенство

$$\lim_{r\to 0}\{\operatorname{ess\,sup}[u(x,t): (x,t) \in \Omega_T \cap B_r(x_0,t_0)]\} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\{\operatorname{ess\,inf}[u(x,t): (x,t) \in \Omega_T \cap B_r(x_0,t_0)]\} = f(x_0, t_0). \qquad (1.8)$$

Здесь $B_r(x_0, t_0)$ — шар в R^{N+1} с центром в точке (x_0, t_0) и радиуса r.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Предположим, что выполнены условия* (1.2) – (1.5) *и* $2 < p < N$. *Для того чтобы точка* $(x_0, t_0) \in S_T$ *была регулярной для уравнения* (1.1), *необходимо, чтобы*

$$\int_0^1 \left\{ \frac{C_p(B(x_0,r)\setminus\Omega)}{r^{N-p}} \right\}^{1/(p-1)} \frac{dr}{r} = \infty. \qquad (1.9)$$

Здесь $C_p(E)$ — *p-емкость множества* $E \subset R^N$, $B(x_0, r) = \{x \in R^N : |x - x_0| < r\}$.

Отметим, что из работы [5] и теоремы 1.1 следует, что условие (1.9) необходимо и достаточно для регулярности граничной точки $(x_0, t_0) \in S_T$.

2. Вспомогательные утверждения. Будем доказывать нерегулярность граничной точки $(x_0, t_0) \in S_T$ при условии, что

$$\int_0^1 \left\{ \frac{C_p(B(x_0,r)\setminus\Omega)}{r^{N-p}} \right\}^{1/(p-1)} \frac{dr}{r} < \infty, \qquad (2.1)$$

где $B(x_0, r)$ — шар радиуса r с центром в x_0.

Методом Мозера легко устанавливается локальная ограниченность вблизи (x_0, t_0) решения уравнения (1.1), удовлетворяющего условию (1.7). Поэтому далее, не ограничивая общности, можем считать, что $u(x, t) \in L_\infty(\Omega_T)$.

В этом пункте $u(x, t)$ — произвольное ограниченное решение уравнения (1.1) в Ω_T из пространства $V_p(\Omega_T)$, обозначим

$$M = \operatorname{ess\,sup}\{|u(x,t)|: (x,t) \in \Omega_T\}.$$

Пусть δ, R — произвольные положительные числа, такие, что $\left(t_0 - R^p/\delta^{p-2}, t_0 + R^p/\delta^{p-2}\right) \subset (0, T)$, $R < 1$, обозначим

$$B = B(x_0, R), \qquad Q \equiv B \times \left(t_0 - \frac{R^p}{\delta^{p-2}}, t_0 + \frac{R^p}{\delta^{p-2}}\right).$$

Будем считать, что функции $\xi(x)$, $\eta(x)$, $\zeta(x)$ определены в $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяют условиям:

1) $\xi(x), \eta(x) \in W_p^1(B)$, $\xi(x)\zeta(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$;

2) $0 \le \xi(x) \le 1$, $\xi(x) = 1$ в $B(x_0, R/2)$, $\xi(x) = 0$ вне $B(x_0, R)$, $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| \le \frac{4}{R}$;

3) $\zeta(x) = 0$ вне Ω, $0 \le \zeta(x) \le 1$, $\int\limits_B |\nabla(\xi(x)\zeta(x))|^p dx \le CR^{N-p}$;

4) $0 \le \eta(x) \le 1$, $[1-\eta(x)][1-\zeta(x)] \equiv 0$.

Определим $\theta(t)$ так, чтобы выполнялись условия

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in \left(t_0 - \dfrac{4R^p}{9\delta^{p-2}}, t_0 + \dfrac{4R^p}{9\delta^{p-2}}\right); \\ 0 & \text{при } t \notin \left(t_0 - \dfrac{R^p}{\delta^{p-2}}, t_0 + \dfrac{R^p}{\delta^{p-2}}\right), \end{cases}$$

$$0 \le \theta(t) \le 1, \qquad \operatorname{sign}(t - t_0)\frac{d\theta}{dt} \le 0, \qquad \left|\frac{d\theta}{dt}\right| \le \frac{8\delta^{p-2}}{R^p}, \qquad \theta(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1).$$

Обозначим

$$\omega(x) = \xi(x)\zeta(x), \qquad \sigma(x) = \xi(x)\zeta(x)\eta(x).$$

Пусть $0 < l < M$, определим

$$L = Q \cap \Omega_T \cap \{u > l\}, \qquad L(\tau) = \{(x,t) \in L: t = \tau\},$$

$$E = L \cap \{\eta(x) < 1\}, \qquad F = L \cap \{\eta(x) = 1\}.$$

Отметим также, что определенное выше решение уравнения (1.1) удовлетворяет интегральному тождеству (см. [1])

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \left\{\frac{\partial}{\partial t}[u(x,t)]_h \varphi(x,t) + \sum_{i=1}^N [a_i(x,t,u,u_x)]_h \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \right.$$

$$\left. - [a_0(x,t,u,u_x)]_h \varphi(x,t)\right\} dx\,dt = 0 \tag{2.2}$$

при произвольной функции $\varphi(x,t) \in C(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_p(0, T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))$ и произвольном h таком, что $0 < h < t_1 < t_2 < T - h$. Здесь

$$[u(x,t)]_h = u_h(x,t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(x,\tau)\,d\tau.$$

Далее будем понимать под известными параметрами $M,\ N,\ p,\ K_1,\ K_2,\ q,\ r$ нормы функций $h_0(x,t)$, $[\bar h(x,t)]^{p/(p-1)}$ в пространстве $L_r(0,T;L_q(\Omega))$.

Зафиксируем число λ, определенное равенством

$$\lambda = \min\left\{\frac{2}{p+1}, \frac{1}{p-1}, 2(p-2), \frac{1}{N}\right\}. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. *Пусть k — положительное число, удовлетворяющее неравенству $k>p$. Тогда при любом $\gamma\in(0,1]$ справедлива оценка*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\int_{L(t)\cap\{(u-l)/\delta\ge\gamma\}}[w(x,t)]^{\rho(\lambda)}\omega^k(x)\theta^k(t)\,dx\ +$$

$$+\ \delta^{p-2}\iint_L\left|\frac{\partial w(x,\tau)}{\partial x}\right|^p\omega^k(x)\theta^k(t)\,dx\,d\tau\ \le$$

$$\le\ C(\gamma)\frac{\delta^{p-2}}{R^p}\iint_E\left[\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{1-\lambda/2}\left(\frac{u-l}{\delta}\right)^{\lambda}\right]^{p-1}\omega^{k-p}(x)\theta^{k-1}(t)\,dx\,dt\ +$$

$$+\ C(\gamma)\left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta^{p-1}}\right)R^p\int_B|\nabla\sigma|^p\,dx\ +\ C(\gamma)R^{N+\alpha}\left[\frac{1}{\delta^{\beta_1}}+\frac{1}{\delta^{\beta_2}}\right], \tag{2.4}$$

где постоянная $C(\gamma)$ зависит лишь от известных параметров и $k,\ \gamma$,

$$w(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{при } u(x,t)\le l;\\ \dfrac{1}{\delta}\displaystyle\int_l^{u(x,t)}\left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1/p+\lambda/2p}\left(\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda/p}ds & \text{при } u(x,t)>l,\end{cases} \tag{2.5}$$

$$\alpha = (p-1)\left(1-\frac{1}{r}-\frac{N}{pq}\right),\qquad \beta_1 = p-1-\frac{p-2}{r},$$

$$\beta_2 = (p-1)\left(1-\frac{p-2}{rp}\right),\qquad \rho(\lambda) = \frac{2p}{2p-2-\lambda}.$$

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (2.2) функцию

$$\varphi(x,t) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } [u(x,t)]_h\le l;\\ \displaystyle\int_l^{[u(x,t)]_h}\left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\lambda/2}\left(\varepsilon+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda}ds\,\omega^k(x)\theta^k(t) & \text{при } [u(x,t)]_h>l.\end{cases}$$

Отметим, что

$$\int_l^{[u(x,t)]_h}\left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\lambda/2}\left(\varepsilon+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda}ds\ \le\ C_1\delta.$$

В ходе доказательства теоремы 2.1 через C_i обозначаются постоянные, зависящие лишь от тех параметров, что и $C(\gamma)$ в (2.4). Используя неравенства (1.3), (1.4) и переходя к пределу при $h\to 0$, $\varepsilon\to 0$, получаем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int\limits_{L(t)} \left\{ \int\limits_{l}^{u(x,t)} \int\limits_{l}^{v} \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\lambda/2} \left(\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda} ds\, dv \right\} \theta^k(t)\omega^k(x)\,dx \ +$$

$$+ \iint\limits_{L} \left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{-1+\lambda/2} \left(\frac{u-l}{\delta}\right)^{-\lambda} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \omega^k(x)\theta^k(t)\,dx\,dt \ \le$$

$$\le C_2 \iint\limits_{L} \int\limits_{l}^{u(x,t)} \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\lambda/2} \left(\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda} ds |\nabla u|^{p-1} \theta^k(t) \times$$

$$\times \left\{\omega^k(x) + \omega^{k-1}(x)|\nabla \omega|\right\} dx\,dt \ +$$

$$+ C_2 \iint\limits_{L} \int\limits_{l}^{u(x,t)} \int\limits_{l}^{v} \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\lambda/2} \left(\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda} ds\,dv\, \omega^k(x)\theta^{k-1}(t)\left|\frac{d\theta}{dt}\right| dx\,dt \ +$$

$$+ C_2 \iint\limits_{L} \int\limits_{l}^{u(x,t)} \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\lambda/2} \left(\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda} ds\, \theta^k(t) \times$$

$$\times \left\{\overline{h}_0(x,t)\omega^k(x) + \omega^{k-1}(x)\overline{h}(x,t)|\nabla \omega|\right\} dx\,dt. \tag{2.6}$$

Здесь $\overline{h}_0(x,t) = 1 + h_0(x,t)$. При $u > l + \delta\gamma$ имеем

$$\int\limits_{l}^{u} \int\limits_{l}^{v} \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\lambda/2} \left(\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda} ds\,dv \ = \ \int\limits_{l}^{u} \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\lambda/2} \left(\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda} (u-s)\,ds \ \ge$$

$$\ge \int\limits_{l}^{(u+l)/2} \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\lambda/2} \left(\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda} (u-s)\,ds \ \ge$$

$$\ge \frac{u-l}{2} \int\limits_{l}^{(u+l)/2} \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\lambda/2} \left(\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda} ds \ =$$

$$= \frac{u-l}{2}\delta \int\limits_{0}^{(u-l)/2\delta} (1+s)^{-1+\lambda/2} s^{-\lambda}\,ds \ \ge \ \frac{u-l}{2}\delta \int\limits_{0}^{\gamma/2} (1+s)^{-1+\lambda/2} s^{-\lambda}\,ds \ \ge$$

$$\ge C_3(\gamma)\delta(u-l), \tag{2.7}$$

$$w(x,t) \ = \ \frac{1}{\delta}\int\limits_{l}^{u} \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1/p+\lambda/2p} \left(\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda/p} ds \ \le$$

$$\le \frac{1}{\delta}\int\limits_{l}^{u} \left(\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1/p-\lambda/2p} ds \ \le \ C_4 \left(\frac{u-l}{\delta}\right)^{1-1/p-\lambda/2p} \tag{2.8}$$

При $u > l$

$$\int\limits_{l}^{u} \int\limits_{l}^{v} \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\lambda/2} \left(\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda} ds\,dv \ \le \ C_5\delta(u-l), \tag{2.9}$$

поэтому, используя (2.7) – (2.9), из (2.6) получаем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int\limits_{L(t)} w^{\rho(\lambda)}(x,t)\omega^k(x)\theta^k(t)\,dx \ + \ \delta^{p-2} \iint\limits_{L} |\nabla w|^p \omega^k(x)\theta^k(t)\,dx\,dt \ \le$$

$$\leq C_6 \delta^{-1} \iint\limits_L |\nabla u|^{p-1} \theta^k(t) \Big[\omega^{k-1}(x) |\nabla \omega| + \omega^k(x) \Big] dx\, dt \; +$$

$$+ \; C_6 \delta^{-1} \iint\limits_L \theta^k(t) \Big[\overline{h}(x,t) \omega^{k-1}(x) |\nabla \omega| + \overline{h}_0(x,t) \omega^k(x) \Big] dx\, dt \; +$$

$$+ \; C_6 \frac{\delta^{p-3}}{R^p} \iint\limits_L (u - l) \omega^k(x) \theta^{k-1}(t)\, dx\, dt. \tag{2.10}$$

Интегралы в правой части неравенства (2.10) представим в виде суммы интегралов по E и F с учетом того, что $L = E \cup F$.

Оценим вначале интегралы по E с учетом того, что при этом $\zeta(x) = 1$ и $\omega(x) = \xi(x)$:

$$\delta^{-1} \iint\limits_E |\nabla u|^{p-1} \theta^k(t) \Big[\omega^{k-1}(x) |\nabla \omega| + \omega^k(x) \Big] dx\, dt \; \leq$$

$$\leq \; C_7 \frac{\delta^{-1}}{R} \iint\limits_E |\nabla u|^{p-1} \omega^{k-1}(x) \theta^k(t)\, dx\, dt \; \leq$$

$$\leq \; C_8 \frac{\varepsilon}{\delta^2} \iint\limits_E \left(1 + \frac{u-l}{\delta}\right)^{-1+\lambda/2} \left(\frac{u-l}{\delta}\right)^{-\lambda} |\nabla u|^p \omega^k(x) \theta^k(t)\, dx\, dt \; +$$

$$+ \; C_8 \frac{\varepsilon^{-(p-1)} \delta^{p-2}}{R^p} \iint\limits_E \left[\left(1 + \frac{u-l}{\delta}\right)^{1-\lambda/2} \left(\frac{u-l}{\delta}\right)^{\lambda} \right]^{p-1} \omega^{k-p}(x) \theta^k(t)\, dx\, dt \; \leq$$

$$\leq \; C_8\, \varepsilon\, \delta^{p-2} \iint\limits_L |\nabla w|^p \omega^k(x) \theta^k(t)\, dx\, dt \; +$$

$$+ \; C_8 \frac{\varepsilon^{-(p-1)} \delta^{p-2}}{R^p} \iint\limits_E \left[\left(1 + \frac{u-l}{\delta}\right)^{1-\lambda/2} \left(\frac{u-l}{\delta}\right)^{\lambda} \right]^{p-1} \omega^{k-p}(x) \theta^k(t)\, dx\, dt. \tag{2.11}$$

Здесь мы воспользовались неравенством Юнга с произвольным $\varepsilon > 0$.

Далее, в силу выбора λ имеем

$$\frac{\delta^{p-3}}{R^p} \iint\limits_E (u-l) \omega^k(x) \theta^{k-1}(t)\, dx\, dt \; \leq$$

$$\leq \; \frac{\delta^{p-2}}{R^p} \iint\limits_E \left[\left(1 + \frac{u-l}{\delta}\right)^{1-\lambda/2} \left(\frac{u-l}{\delta}\right)^{\lambda} \right]^{p-1} \omega^k(x) \theta^{k-1}(t)\, dx\, dt, \tag{2.12}$$

$$\delta^{-1} \iint\limits_E \theta^k(t) \Big[\overline{h}(x,t) \omega^{k-1}(x) |\nabla \omega| + \overline{h}_0(x,t) \omega^k(x) \Big] dx\, dt \; \leq$$

$$\leq \; C_8 R^{N+\alpha} \left(\frac{1}{\delta^{\beta_1}} + \frac{1}{\delta^{\beta_2}} \right). \tag{2.13}$$

Подставим теперь в интегральное тождество (2.2) функцию

$$\varphi(x,t) = (u_h(x,t) - l)_+ \sigma^k(x) \theta^k(t), \quad \text{где} \quad (u_h(x,t) - l)_+ = \max\,[u_h(x,t) - l, 0].$$

Используя неравенства (1.3), (1.4), получаем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int\limits_{L(t)} (u-l)^2 \sigma^k(x) \theta^k(t)\, dx \; + \; \iint\limits_L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \sigma^k(x) \theta^k(t)\, dx\, dt \; \leq$$

$$\le C_9 \iint\limits_L (u-l)|\nabla u|^{p-1}\sigma^{k-1}(x)\theta^k(t)\{|\nabla\sigma|+\sigma\}\,dx\,dt \;+$$
$$+ \; C_9 \iint\limits_L (u-l)^2\sigma^k(x)\theta^{k-1}(t)\left|\frac{d\theta}{dt}\right| dx\,dt \;+$$
$$+ \; C_9 \iint\limits_L (u-l)\sigma^{k-1}(x)\theta^k(t)\left\{\overline{h}(x,t)|\nabla\sigma|+\overline{h}_0(x,t)\sigma\right\}dx\,dt. \qquad (2.14)$$

Отсюда, применяя неравенства Юнга и Пуанкаре, находим

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int\limits_{L(t)} (u-l)^2\sigma^k(x)\theta^k(t)\,dx \;+\; \iint\limits_L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \sigma^k(x)\theta^k(t)\,dx\,dt \;\le$$
$$\le \; C_{10}\left(\frac{R^p}{\delta^{p-2}}+R^p\right)\int\limits_B \left|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right|^p dx \;+\; C_{10}\frac{R^{N+\alpha}}{\delta^{\beta_1-1}}. \qquad (2.15)$$

Поскольку $\omega=\sigma$ на F, используя (2.15), имеем

$$\delta^{-1}\iint\limits_F |\nabla u|^{p-1}\theta^k(t)\left[\omega^{k-1}(x)|\nabla\omega|+\omega^k(x)\right]dx\,dt \;\le$$
$$\le \; \delta^{-1}\iint\limits_F \left\{|\nabla u|^p\sigma^k(x)\theta^k(t)+\left(|\nabla\sigma|^p+\sigma^p\right)\sigma^{k-p}(x)\theta^k(t)\right\}dx\,dt \;\le$$
$$\le \; C_{11}R^p\left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta^{p-1}}\right)\int\limits_B |\nabla\sigma|^p\,dx \;+\; C_{11}\frac{R^{N+\alpha}}{\delta^{\beta_1}}. \qquad (2.16)$$

Непосредственно из неравенства Пуанкаре следует аналогичная оценка для интегралов, получающихся из двух последних интегралов в (2.10) заменой области интегрирования L на F.

Из неравенств (2.10) – (2.16) и соответствующего выбора ε получаем неравенство (2.4).

Лемма 2.1. *Справедлива оценка*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int\limits_{L(t)} (u-l)\sigma^p(x)\theta^p(t)\,dx \;\le$$
$$\le \; C_{12}R^p\int\limits_B |\nabla\sigma|^p\,dx\left(1+\frac{1}{\delta^{p-2}}\right) \;+\; C_{12}\frac{R^{N+\alpha}}{\delta^{\beta_1-1}}. \qquad (2.17)$$

Доказательство. Неравенство (2.17) получаем при подстановке в интегральное тождество (2.2) функции

$$\varphi(x,t) = \frac{(u_h-l)_+}{u_h-l+\varepsilon}\sigma^k(x)\theta^k(t), \qquad \varepsilon>0.$$

При этом используем неравенство (2.15).

Пусть $R_0\in(0,1)$ и $\{R_j\}$, $j=1,2,\ldots,$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условию $R_j\in\left[\frac{3R_0}{2^{j+2}},\frac{R_0}{2^j}\right]$. Обозначим $B_j=B(x_0,R_j)$ при $j=0,1,2,\ldots$. Выберем последовательность функций $\{\xi_j(x)\}$ так, что $\xi_j(x)=0$ вне B_j, $\xi_j(x)=1$ в B_{j+1}, $\left|\frac{\partial\xi_j}{\partial x}\right|\le\frac{2^{j+3}}{R_0}$, $0\le\xi_j(x)\le 1$ при $x\in B_j$, $\xi_j(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Определим функции $g_j(x)\in C_0^\infty(B(x_0,1))$ так, что $g_j(x)=1$ на $B_j\setminus\Omega$ и

$$\int\limits_{B(x_0,1)} \left|\nabla g_j\right|^p dx \le C_0 C_p(B_j \setminus \Omega) + R_j^N. \tag{2.18}$$

Пусть $g'_j(x) = \min\left\{1, \left[g_j(x)\right]_+\right\}$. Определим также последовательности функций $\eta_j(x)$, $\zeta_j(x)$, $\omega_j(x)$, $\sigma_j(x)$, $\theta_j(t)$:

$$\eta_j(x) = \min\left\{1, 3g'_j + 3g'_{j-1}\right\}, \quad \zeta_j(x) = \min\left\{1, \left[2 - 3g'_j\right]_+\right\}, \tag{2.19}$$

$$\omega_j(x) = \xi_j(x)\zeta_j(x), \quad \sigma_j(x) = \xi_j(x)\zeta_j(x)\eta_j(x), \tag{2.20}$$

$$\theta_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in \left(t_0 - \dfrac{4R_j^p}{9\delta_j^{p-2}}, t_0 + \dfrac{4R_j^p}{9\delta_j^{p-2}}\right); \\ 0 & \text{при } t \notin \left(t_0 - \dfrac{R_j^p}{\delta_j^{p-2}}, t_0 + \dfrac{R_j^p}{\delta_j^{p-2}}\right), \end{cases}$$

$$\frac{d\theta_j}{dt}\operatorname{sign}(t - t_0) \le 0, \quad \left|\frac{d\theta_j}{dt}\right| \le \frac{8\delta_j^{p-2}}{R_j^p}, \quad 0 \le \theta_j(t) \le 1, \quad \theta_j(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1),$$

и множеств Q_j, L_j, E_j, F_j:

$$Q_j \equiv B_j \times \left(t_0 - \frac{R_j^p}{\delta_j^{p-2}}, t_0 + \frac{R_j^p}{\delta_j^{p-2}}\right), \quad L_j = Q_j \cap \Omega_T \cap \{u > l_j\},$$

$$E_j = L_j \cap \{\eta_j(x) < 1\}, \quad F_j = L_j \cap \{\eta_j(x) = 1\}.$$

Укажем выбор последовательностей δ_j, l_j. Положим $l_0 = 0$ и предположим, что $l_1, \ldots, l_j$ и $\delta_0, \ldots, \delta_{j-1}$ выбраны. Покажем выбор l_{j+1}, δ_j.

Обозначим

$$C(t_0) = \left\{\frac{1}{\min(t_0, T - t_0)}\right\}^{1/(p-2)}$$

и зафиксируем положительное число κ. Конкретные условия выбора κ, зависящего лишь от известных параметров, будут указаны ниже. Возможны два случая:

1) существует число l, удовлетворяющее условиям

$$l > l_j + C(t_0) R_j^{p/(p-2)}, \quad A_j(l) = \kappa, \tag{2.21}$$

где

$$A_j(l) = \frac{(l - l_j)^{p-2}}{R_j^{N+p}} \iint\limits_{L_j} \left(\frac{u - l_j}{l - l_j}\right)^{(1+\lambda/2)(p-1)} \xi_j^{k-p}(x)\zeta_j^{k-p}(x)\theta_j^{k-1}(t)\,dx\,dt +$$

$$+ \operatorname*{ess\,sup}_t \frac{1}{R_j^N} \int\limits_{L_j(t) \cap \{u > l\}} \frac{u - l_j}{l - l_j} \xi_j^k(x)\zeta_j^k(x)\theta_j^k(t)\,dx; \tag{2.22}$$

2) не существует числа l, удовлетворяющего условиям (2.21).

В первом случае выбираем l_{j+1} таким, чтобы при $l = l_{j+1}$ выполнялись условия (2.21). Во втором случае определяем l_{j+1} равенством

$$l_{j+1} = l_j + C(t_0) R_j^{p/(p-2)}. \tag{2.23}$$

В обоих случаях полагаем

$$\delta_j = l_{j+1} - l_j. \tag{2.24}$$

Теорема 2.2. *Предположим, что выполнены условия* (1.3) – (1.5), (2.1). *Тогда существуют* $R_0 \in (0, 1)$, *положительные числа* k, κ *и последовательность* $\{R_j\}$ *такие, что* $R_j \in \left[\frac{3R_0}{2^{j+2}}, \frac{R_0}{2^j}\right]$ *и при всех* j *выполнено неравенство*

$$\delta_j \le \frac{1}{2}\delta_{j-1} + C(t_0)\,R_j^{p/(p-2)} + C_{13}R_j^{\alpha/(p-1)} + C_{13}\left\{\frac{C_p\big(B_{j-1}\setminus\Omega\big)}{R_j^{N-p}}\right\}^{1/(p-1)} \tag{2.25}$$

с постоянной C_{13}, *зависящей лишь от известных параметров.*

Доказательство. Зафиксируем $j \ge 1$ и будем считать, что

$$\delta_j > \frac{1}{2}\delta_{j-1}, \quad \delta_j > C(t_0)\,R_j^{p/(p-2)}, \tag{2.26}$$

так как в противном случае оценка (2.25) тривиальна.

Второе неравенство в (2.26) означает, что $l = l_{j+1}$ удовлетворяет условиям (2.21). Оценим слагаемые в правой части (2.22) при $l = l_{j+1}$. Представим L_j в виде

$$L_j = L_j' \cup L_j'',$$

где

$$L_j' = L_j \cap \left\{\frac{u - l_j}{\delta_j} < \gamma\right\}, \qquad L_j'' = L_j \cap \left\{\frac{u - l_j}{\delta_j} \ge \gamma\right\}$$

с некоторым $\gamma \in (0, 1)$. Имеем

$$\frac{\delta_j^{p-2}}{R_j^{N+p}} \iint\limits_{L_j} \left(\frac{u - l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda/2)(p-1)} \xi_j^{k-p}(x)\zeta_j^{k-p}(x)\theta_j^{k-1}(t)\,dx\,dt \le$$

$$\le \gamma^{(1+\lambda/2)(p-1)} \frac{\delta_j^{p-2}}{R_j^{N+p}} \left\{\operatorname{mes} E_j + \iint\limits_{F_j} \sigma_j^{k-p}(x)\theta_j^{k-1}(t)\,dx\,dt\right\} +$$

$$+ \frac{\delta_j^{p-2}}{R_j^{N+p}} \iint\limits_{L_j''} \left(\frac{u - l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda/2)(p-1)} \xi_j^{k-p}(x)\zeta_j^{k-p}(x)\theta_j^{k-1}(t)\,dx\,dt. \tag{2.27}$$

По построению $\zeta_{j-1}(x) = 1$, $\xi_{j-1}(x) = 1$ и $\theta_{j-1}(t) = 1$ на E_j, поэтому

$$\operatorname{mes} E_j \le \iint\limits_{E_j} \frac{u - l_{j-1}}{\delta_{j-1}} \xi_{j-1}^k(x)\zeta_{j-1}^k(x)\theta_{j-1}^k(t)\,dx\,dt \le$$

$$\le \frac{2R_j^p}{\delta_j^{p-2}} \operatorname*{ess\,sup}_t \int\limits_{E_j(t)} \frac{u - l_{j-1}}{\delta_{j-1}} \xi_{j-1}^k(x)\zeta_{j-1}^k(x)\theta_{j-1}^k(t)\,dx \le$$

$$\le \frac{2R_j^p}{\delta_j^{p-2}} \operatorname*{ess\,sup}_t \int\limits_{L_{j-1}(t)\cap\{u > l_j\}} \frac{u - l_{j-1}}{\delta_{j-1}} \xi_{j-1}^k(x)\zeta_{j-1}^k(x)\theta_{j-1}^k(t)\,dx \le$$

$$\le \frac{3^{N+1} R_j^{p+N}}{\delta_j^{p-2}}\kappa. \tag{2.28}$$

При оценке последнего интеграла использовано неравенство $A(l_{j-1}) \le \kappa$, следующее из определения последовательности $\{l_j\}$.

Определим $w_j(x, t)$ равенством (2.5) при $l = l_j$, $\delta = \delta_j$. Тогда на L_j'' выполнена оценка

$$w_j(x, t) \ge C_{14}(\gamma)\left(\frac{u - l_j}{\delta_j}\right)^{1-1/p-\lambda/2p}.$$

Далее в доказательстве теоремы 2.2 постоянные, зависящие лишь от известных параметров, обозначаем через C_i. Зависимость их от дополнительных параметров ε, γ указываем в виде $C_i(\varepsilon)$, $C_i(\gamma)$ и т. д.

Определим q равенством

$$\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{\lambda}{2p}\right)q = \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)(p-1). \tag{2.29}$$

Тогда второй интеграл в правой части (2.27) оценивается так:

$$\iint\limits_{L_j''}\left(\frac{u - l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda/2)(p-1)} \xi_j^{k-p}(x)\zeta_j^{k-p}(x)\theta_j^{k-1}(t)\,dx\,dt \le$$

$$\le C_{15}(\gamma)\iint\limits_{L_j''} w_j^q(x, t)\xi_j^{k-p}(x)\zeta_j^{k-p}(x)\theta_j^{k-1}(t)\,dx\,dt \le$$

$$\le \varepsilon C_{16}(\gamma)\iint\limits_{L_j''} w_j^{\rho(\lambda)}(x, t)\left[\xi_j(x)\zeta_j(x)\theta_j(t)\right]^p dx\,dt +$$

$$+ C_{17}(\varepsilon)\iint\limits_{L_j''} w_j^{(q-\rho(\lambda))z+\rho(\lambda)}(x, t)\left[\xi_j(x)\zeta_j(x)\theta_j(t)\right]^{(k-2p)z+p} dx\,dt. \tag{2.30}$$

Здесь ε — произвольное число из интервала $(0, 1)$, $z > 1$ и находится из условия

$$(q - \rho(\lambda))z + \rho(\lambda) = \overline{q} = p\frac{N + \rho(\lambda)}{N}.$$

Условие на λ обеспечивает возможность нужного выбора z. Далее имеем

$$\iint\limits_{L_j''} w_j^{\rho(\lambda)}(x, t)\left[\xi_j(x)\zeta_j(x)\theta_j(t)\right]^p dx\,dt \le$$

$$\le C_{18}(\gamma)\left\{\iint\limits_{F_j \cap \left\{\frac{u-l_j}{\delta_j} \ge \gamma\right\}} \frac{u - l_j}{\delta_j}\sigma_j^p(x)\theta_j^p(t)\,dx\,dt + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{E_j \cap \left\{\frac{u-l_j}{\delta_j} \ge \gamma\right\}} \frac{u - l_j}{\delta_j}\left[\xi_j(x)\zeta_j(x)\theta_j(t)\right]^p dx\,dt\right\}. \tag{2.31}$$

Использовав равенства $\xi_{j-1}(x) = \zeta_{j-1}(x) = 1$, $\theta_{j-1}(t) = 1$ на E_j, (2.26) и неравенство $A_{j-1}(l_j) \le \kappa$, оценим последний интеграл:

$$\iint\limits_{E_j \cap \left\{\frac{u-l_j}{\delta_j} \geq \gamma\right\}} \frac{u-l_j}{\delta_j}\left[\xi_j(x)\zeta_j(x)\theta_j(t)\right]^p dx\,dt \leq$$

$$\leq \frac{2R_j^p}{\delta_j^{p-2}} \operatorname*{ess\,sup}_t \int\limits_{L_{j-1}(t)\cap\{u>l_j\}} \frac{u-l_{j-1}}{\delta_{j-1}}\left[\xi_{j-1}(x)\zeta_{j-1}(x)\theta_{j-1}(t)\right]^k dx \leq \frac{2R_j^p R_{j-1}^N \kappa}{\delta_j^{p-2}}.$$

Из (2.31), (2.17), используя полученное неравенство, имеем

$$\iint\limits_{L_j''} w_j^{\rho(\lambda)}(x,t)\left[\xi_j(x)\zeta_j(x)\theta_j(t)\right]^p dx\,dt \leq$$

$$\leq C_{19}(\gamma)\frac{R_j^{p+N}}{\delta_j^{p-2}}\left\{\kappa + \frac{1}{R_j^{N-p}}\int\limits_{B_j}\left|\nabla\sigma_j\right|^p dx\left(\frac{1}{\delta_j}+\frac{1}{\delta_j^{p-1}}\right) + \frac{R_j^\alpha}{\delta_j^{\beta_1}}\right\}. \tag{2.32}$$

Далее оценим второй интеграл в правой части (2.30):

$$\iint\limits_{L_j''} w_j^{(q-\rho(\lambda))z+\rho(\lambda)}(x,t)\left[\xi_j(x)\zeta_j(x)\theta_j(t)\right]^{(k-2p)z+p} dx\,dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_0-\frac{R_j^p}{\delta_j^{p-2}}}^{t_0+\frac{R_j^p}{\delta_j^{p-2}}} \left\{\int\limits_{L_j''(t)} w_j^{\rho(\lambda)}(x,t)\left[\omega_j(x)\theta_j(t)\right]^p dx\right\}^{p/N} \times$$

$$\times \left\{\int\limits_{L_j''(t)} w_j^{Np/(N-p)}(x,t)\left[\omega_j(x)\theta_j(t)\right]^{N(k-2p)z/(N-p)+p} dx\right\}^{(N-p)/N} dt \leq$$

$$\leq \left\{\operatorname*{ess\,sup}_t \int\limits_{L_j''(t)} w_j^{\rho(\lambda)}(x,t)\left[\omega_j(x)\theta_j(t)\right]^p dx\right\}^{p/N} \times$$

$$\times \iint\limits_{L_j}\left|\frac{\partial}{\partial x}\left\{w_j(x,t)\left[\omega_j(x)\theta_j(t)\right]^{(N(k-2p)z/(N-p)+p)(N-p)/Np}\right\}\right|^p dx\,dt. \tag{2.33}$$

Подчиним k условию

$$(k-2p)z + \frac{N-p}{N}p > k + p. \tag{2.34}$$

Первый сомножитель в правой части (2.33) оценивается аналогично неравенствам (2.31), (2.32).

В силу теоремы 2.1, определения l_{j+1} и оценки (2.28) второй сомножитель в правой части (2.33) оценивается следующим образом:

$$\iint\limits_{L_j}\left|\frac{\partial}{\partial x}\left\{w_j(x,t)\left[\omega_j(x)\theta_j(t)\right]^{(N(k-2p)z/(N-p)+p)(N-p)p/N}\right\}\right|^p dx\,dt \leq$$

$$\leq C_{20}\iint\limits_{L}\left|\frac{\partial w_j(x,t)}{\partial x}\right|^p\left[\omega_j(x)\theta_j(t)\right]^{(k-2p)z+(N-p)p/N} dx\,dt +$$

$$+\ C_{20}\iint\limits_{L}\left|w_j(x,t)\right|^p\left|\frac{\partial\omega_j(x)}{\partial x}\right|^p\left[\omega_j(x)\theta_j(t)\right]^{(k-2p)z+(N-p)p/N-p}dx\,dt\ \le$$

$$\le\ C_{21}(\gamma)\frac{1}{R_j^p}\iint\limits_{E_j}\left(1+\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda/2)(p-1)}\left[\omega_j(x)\theta_j(t)\right]^{(k-2p)z+(N-p)p/N-p}dx\,dt\ +$$

$$+\ C_{21}(\gamma)\left(\frac{1}{\delta_j^{p-1}}+\frac{1}{\delta_j^{2p-3}}\right)R_j^p\int\limits_{B_j}\left|\nabla\sigma_j\right|^p dx\ +\ C_{21}(\gamma)\,R_j^{N+\alpha}\left[\frac{1}{\delta_j^{\beta_1+p-2}}+\frac{1}{\delta_j^{\beta_2+p-2}}\right]\ \le$$

$$\le\ C_{22}(\gamma)\frac{R_j^N\kappa}{\delta_j^{p-2}}\ +\ C_{22}(\gamma)\left(\frac{1}{\delta_j^{p-1}}+\frac{1}{\delta_j^{2p-3}}\right)R_j^p\int\limits_{B_j}\left|\nabla\sigma_j\right|^p dx\ +$$

$$+\ C_{22}(\gamma)\,R_j^{N+\alpha}\left[\frac{1}{\delta_j^{\beta_1+p-2}}+\frac{1}{\delta_j^{\beta_2+p-2}}\right].\qquad(2.35)$$

Теперь из оценок (2.27) – (2.35) получаем

$$\frac{\delta_j^{p-2}}{R_j^{N+p}}\iint\limits_{L_j}\left(\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda/2)(p-1)}\xi_j^{k-p}(x)\zeta_j^{k-p}(x)\theta_j^{k-1}(t)\,dx\,dt\ \le$$

$$\le\ C_{23}\left\{\gamma^{(1+\lambda/2)(p-1)}+C_{24}(\gamma)\varepsilon\right\}\kappa\ +\ C_{24}(\gamma)\frac{1}{R_j^{N-p}}\int\limits_{B_j}\left|\nabla\sigma_j\right|^p dx\left(1+\frac{1}{\delta_j^{p-1}}\right)+$$

$$+\ C_{24}(\gamma)\frac{R_j^{\alpha}}{\delta_j^{\beta_1}}\ +$$

$$+\ C_{25}(\varepsilon,\gamma)\left\{\kappa+\frac{1}{R_j^{N-p}}\left(\frac{1}{\delta_j}+\frac{1}{\delta_j^{p-1}}\right)\int\limits_{B_j}\left|\nabla\sigma_j\right|^p dx+R_j^{\alpha}\left[\frac{1}{\delta_j^{\beta_1}}+\frac{1}{\delta_j^{\beta_2}}\right]\right\}^{1+p/N}.\qquad(2.36)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (2.22). В силу теоремы 2.1 имеем

$$\operatorname*{ess\,sup}_t\frac{1}{R_j^N}\int\limits_{L_j(t)\cap(u>l_{j+1})}\frac{u-l_j}{\delta_j}\xi_j^k(x)\zeta_j^k(x)\theta_j^k(t)\,dx\ \le$$

$$\le\ C_{26}\frac{\delta_j^{p-2}}{R_j^{N+p}}\iint\limits_{E_j}\left[\left(1+\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{1-\lambda/2}\left(\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{\lambda}\right]^{p-1}\xi_j^{k-p}(x)\zeta_j^{k-p}(x)\theta_j^{k-1}(t)\,dx\,dt\ +$$

$$+\ C_{26}\left(\frac{1}{\delta_j}+\frac{1}{\delta_j^{p-1}}\right)\frac{1}{R_j^{N-p}}\int\limits_{B_j}\left|\nabla\sigma_j\right|^p dx\ +\ C_{26}\,R_j^{\alpha}\left[\frac{1}{\delta_j^{\beta_1}}+\frac{1}{\delta_j^{\beta_2}}\right].\qquad(2.37)$$

Представив $E_j = E_j' \cup E_j''$, $E_j' = E_j \cap \{ u - l_j < \gamma\delta_j \}$, $E_j'' = E_j \cap \{ u - l_j \ge \gamma\delta_j \}$, оценим первый интеграл в правой части (2.37):

$$\iint\limits_{E_j} \left[\left(1 + \frac{u - l_j}{\delta_j}\right)^{1-\lambda/2} \left(\frac{u - l_j}{\delta_j}\right)^{\lambda} \right]^{p-1} \xi_j^{k-p}(x)\zeta_j^{k-p}(x)\theta_j^{k-1}(t)\,dx\,dt \le$$

$$\le C_{27}\gamma^{\lambda(p-1)} \operatorname{mes} E_j +$$

$$+ C_{27}\gamma^{(\lambda/2-1)(p-1)} \iint\limits_{E_j''} \left(\frac{u - l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda/2)(p-1)} \xi_j^{k-p}(x)\zeta_j^{k-p}(x)\theta_j^{k-1}(t)\,dx\,dt. \quad (2.38)$$

Оценки для обоих слагаемых в правой части (2.38) получены в (2.28) и (2.36). Таким образом, из равенства $A_j(l_{j+1}) = \kappa$ и оценок (2.28), (2.36), (2.38) имеем

$$\kappa \le C_{28}\left[\gamma^{(1+\lambda/2)(p-1)} + \gamma^{\lambda(p-1)} + C_{29}(\gamma)\varepsilon \right]\kappa + C_{30}(\varepsilon, \gamma)\kappa^{1+p/N} +$$

$$+ C_{30}(\varepsilon, \gamma)\frac{1}{R_j^{N-p}} \int\limits_{B_j} |\nabla\sigma_j|^p\,dx \left(1 + \frac{1}{\delta_j^{p-1}}\right) + C_{28} R_j^{\alpha}\left[\frac{1}{\delta_j^{\beta_1}} + \frac{1}{\delta_j^{\beta_2}}\right] +$$

$$+ C_{30}(\varepsilon, \gamma)\left\{ \frac{1}{R_j^{N-p}}\left(\frac{1}{\delta_j} + \frac{1}{\delta_j^{p-1}}\right) \int\limits_{B_j} |\nabla\sigma_j|^p\,dx + R_j^{\alpha}\left[\frac{1}{\delta_j^{\beta_1}} + \frac{1}{\delta_j^{\beta_2}}\right] \right\}^{1+p/N}. \quad (2.39)$$

Далее, выбираем γ из условия

$$\gamma^{\lambda(p-1)} + \gamma^{(1+\lambda/2)(p-1)} = \frac{1}{4(C_{28}+1)}, \quad (2.40)$$

ε из равенства

$$\varepsilon = \frac{1}{4(C_{28}+1)C_{29}(\gamma)} \quad (2.41)$$

и κ из условия

$$C_{30}(\varepsilon, \gamma)\kappa^{p/N} = \frac{1}{4}. \quad (2.42)$$

С учетом выбора γ, ε, κ из (2.39) имеем

$$\kappa \le C_{31}\frac{1}{R_j^{N-p}} \int\limits_{B_j} |\nabla\sigma_j|^p\,dx \left(1 + \frac{1}{\delta_j^{p-1}}\right) + C_{31} R_j^{\alpha}\left[1 + \frac{1}{\delta_j^{p-1}}\right] +$$

$$+ C_{31}\left\{ \frac{1}{R_j^{N-p}}\left(1 + \frac{1}{\delta_j^{p-1}}\right) \int\limits_{B_j} |\nabla\sigma_j|^p\,dx + R_j^{\alpha}\left[1 + \frac{1}{\delta_j^{p-1}}\right] \right\}^{1+p/N}. \quad (2.43)$$

Из (2.18) следует

$$\int\limits_{B_j} |\nabla\sigma_j|^p\,dx \le C_{32}\left\{ C_p\left(B_j \setminus \Omega\right) + C_p\left(B_{j-1} \setminus \Omega\right) + R_j^N \right\}. \quad (2.44)$$

Далее воспользуемся предположением (2.1). Для любого числа m можно выбрать $R_0 = R_0(m) \in (0, 1/m)$ так, чтобы

$$\int_{0}^{R_0(m)} \left\{ \frac{C_p(B(x_0, r)\setminus\Omega)}{r^{N-p}} \right\}^{1/(p-1)} \frac{dr}{r} < \frac{1}{m}. \tag{2.45}$$

Из неравенства (2.45) имеем

$$\int_{R_j'(m)}^{R_j''(m)} \left\{ \frac{C_p(B(x_0, r)\setminus\Omega)}{r^{N-p}} \right\}^{1/(p-1)} \frac{dr}{r} < \frac{1}{m},$$

где $R_j'(m) = 3R_0(m)/2^{j+2}$, $R_j''(m) = R_0(m)/2^j$ и, следовательно, можно выбирать $R_j = R_j(m) \in \left[R_j'(m), R_j''(m)\right]$ так, чтобы

$$\left[\frac{C_p(B_j \setminus\Omega)}{R_j^{N-p}} \right]^{1/(p-1)} \ln\frac{4}{3} \le \int_{R_j'(m)}^{R_j''(m)} \left\{ \frac{C_p(B(x_0, r)\setminus\Omega)}{r^{N-p}} \right\}^{1/(p-1)} \frac{dr}{r} < \frac{1}{m}. \tag{2.46}$$

Теперь из (2.44), (2.46) следует возможность выбора m такого, чтобы выполнялось неравенство

$$C_{31}\left\{ \frac{1}{R_j^{N-p}} \int_{B_j} \left|\nabla\sigma_j\right|^p dx + R_j^{\alpha} + 2^{p/N}\left[\frac{1}{R_j^{N-p}} \int_{B_j} \left|\nabla\sigma_j\right|^p dx + R_j^{\alpha} \right]^{1+p/N} \right\} <$$

$$< \frac{\kappa}{2}.$$

Окончательно из (2.43) и последнего неравенства получаем, что верна хотя бы одна из оценок

$$\frac{1}{\delta_j^{p-1}}\left(\frac{1}{R_j^{N-p}} \int_{B_j} \left|\nabla\sigma_j\right|^p dx + R_j^{\alpha} \right) \ge \left(\frac{\kappa}{4C_{31}}\right)^{N/(N+p)},$$

$$\frac{1}{\delta_j^{p-1}}\left[\frac{1}{R_j^{N-p}} \int_{B_j} \left|\nabla\sigma_j\right|^p dx + R_j^{\alpha} \right] \ge \frac{\kappa}{4C_{31}}. \tag{2.47}$$

Последние неравенства приводят к оценке

$$\delta_j \le C_{33}\left\{ \frac{1}{R_j^{N-p}} \int_{B_j} \left|\nabla\sigma_j\right|^p dx + R_j^{\alpha} \right\}^{1/(p-1)}. \tag{2.48}$$

Теперь оценка (2.25) следует из (2.44), (2.48) и доказательство теоремы 2.2 завершено.

Теорема 2.3. *Предположим, что выполнены условия* (1.3) – (1.5), (2.1). *Тогда выполняется неравенство*

$$\bar{l} \equiv \varliminf_{j\to\infty} l_j \le K_3\left\{ \left[\frac{1}{R_0^N} \operatorname*{ess\,sup}_t \int_{\Omega} u_+(x, T)\,dx \right]^{1/((1+\lambda/2)(p-1))} + \right.$$

$$\left. + R_0^{\alpha/(p-1)} + \int_0^{2R_0} \left(\frac{C_p(B(x_0, r)\setminus\Omega)}{r^{N-p}} \right)^{1/(p-1)} \frac{dr}{r} \right\} \tag{2.49}$$

с числом R_0, *определенным в теореме* 2.2, *и постоянной* K_3, *зависящей лишь от известных параметров и* t_0.

Доказательство. Используя теорему 2.2, для любого $j \ge 1$ получаем

$$\sum_{j=1}^{J}\delta_j \le \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{j-1}\delta_j + C(t_0)\sum_{j=1}^{J}R_j^{p/(p-2)} +$$

$$+ C_{13}\sum_{j=1}^{J}R_j^{\alpha/(p-1)} + C_{13}\sum_{j=1}^{J}\left\{\frac{C_p\left(B_{j-1}\setminus\Omega\right)}{R_j^{N-p}}\right\}^{1/(p-1)}. \tag{2.50}$$

Отсюда и из (2.46) имеем

$$l_J \le C_{34}\left\{\delta_0 + R_0^{\alpha/(p-1)} + \int_0^{R_0}\left(\frac{C_p(B(x_0,r)\setminus\Omega)}{r^{N-p}}\right)^{1/(p-1)}\frac{dr}{r}\right\}. \tag{2.51}$$

Оценим теперь δ_0. В случае, если l_1 определено равенством (2.23), (2.49) непосредственно следует из (2.51).

Если же l_1 определяется равенством $A(l_1)=\kappa$, то выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\frac{\delta_0^{p-2}}{R_j^{N+p}}\iint_{L_0}\left(\frac{u}{\delta_0}\right)^{(1+\lambda/2)(p-1)}dx\,dt \ge \frac{\kappa}{2}, \tag{2.52}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\frac{1}{R_0^N}\int_{L_0(t)}\frac{u_+}{\delta_0}dx \ge \frac{\kappa}{2}. \tag{2.53}$$

Отсюда, используя ограниченность $u(x,t)$, получаем оценку

$$\delta_0 \le C_{35}\left\{\frac{1}{R_0^N}\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\int_{\Omega}u_+(x,t)\,dx\right\}^{1/((1+\lambda/2)(p-1))}, \tag{2.54}$$

что и доказывает (2.49).

***Замечание* 2.1.** Выбор последовательности $\{l_j\}$ зависит от выбора R_0, так что и $\bar{l}$ зависит от R_0. Из доказательства теорем 2.2, 2.3 следует, что оценка (2.49) остается справедливой при замене R_0 на произвольное число $R_0' \in (0, R_0]$.

3. Доказательство теоремы 1.1. Определим для произвольного ограниченного множества $E\subset R^{N+1}$ параболическую p-емкость $\Gamma_p(E)$ равенством

$$\Gamma_p(E) = \inf_{\mathfrak{M}(E)}\left\{\operatorname*{ess\,sup}_{t}\int_{R^N}|u(x,t)|^p\,dx + \iint_{R^{N+1}}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^p dx\,dt\right\}, \tag{3.1}$$

где

$$\mathfrak{M}(E) = \left\{u(x,t)\in C\left(R^1, L_p(R^N)\right)\cap L_p\left(R^1, W_p^1(R^N)\right):\ u(x,t)\ge 1 \text{ при } (x,t)\in E\right\}.$$

Теорема 3.1. *Предположим, что выполнены условия* (1.3) – (1.5), (2.1). *Тогда для произвольного решения* $u(x,t)\in V_{2,p}(\Omega_T)$ *уравнения* (1.1) *выполняется неравенство*

$$\inf\left\{l\colon \int_0^1\frac{\Gamma_p(\overline{Q}_r\cap\{u>l\})}{r^{N+1}}dr<\infty\right\} \le \bar{l}, \tag{3.2}$$

где $\bar{l}$ *определено в* (2.49), $Q_r = [\,B(x_0,r)\cap\Omega\,]\times(t_0-r^p, t_0+r^p)$.

Доказательство. Докажем неравенство

$$\int_0^1 \frac{\Gamma_p(\{u > \bar{l} + \varepsilon\} \cap Q_r)}{r^{N+1}} dr < \infty \tag{3.3}$$

дла любого $\varepsilon \in (0, 1)$.

Определим функцию $w_\varepsilon(x, t)$

$$w_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} \displaystyle\int_{\bar{l}+\varepsilon}^{u(x,t)} \left(\frac{s - \bar{l}}{\varepsilon} \right)^{-1/p+\lambda/2p} \left(\frac{s - \bar{l} - \varepsilon}{\varepsilon} \right)^{-\lambda/p} ds & \text{при } u > \bar{l} + \varepsilon; \\ 0 & \text{при } u \le \bar{l} + \varepsilon. \end{cases} \tag{3.4}$$

При $u(x, t) > \bar{l} + 2\varepsilon$ имеем

$$w_\varepsilon(x, t) \ge \frac{2^{1-1/p-\lambda/2p} - 1}{1 - 1/p - \lambda/2p} = \mu. \tag{3.5}$$

Пусть $\{R_j\}$ — последовательность, определенная в теореме 2.2, и B_j, $\xi_j(x)$, $\zeta_j(x)$, $\eta_j(x)$ — множество и функции, определенные в п. 2.

Определим функции $\overline{\theta}_j(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, удовлетворяющие условиям $\overline{\theta}_j(t) = 1$ при $|t - t_0| \le 4R_j^p / 9\varepsilon^{p-2}$, $\overline{\theta}_j(t) = 0$ при $|t - t_0| \ge R_j^p / \varepsilon^{p-2}$, $0 \le \overline{\theta}_j(t) \le 1$, $\operatorname{sign}\left(d\overline{\theta}_j(t) / dt\right)(t - t_0) \le 0$, $\left|d\overline{\theta}_j(t) / dt\right| \le 8\varepsilon^{p-2} / R_j^p$, $\overline{\theta}_j(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$. Обозначим

$$Q'_{j+1} = \left\{ B_{j+1} \cap \Omega \right\} \times (t_0 - R_{j+1}^p, t_0 + R_{j+1}^p),$$

$$Q''_{j+1} = Q'_{j+1} \setminus G_{j+1},$$

$$G_{j+1} = \left\{ x \in B_{j+1} \cap \Omega : g_j(x) > \frac{1}{3} \right\} \times (t_0 - R_{j+1}^p, t_0 + R_{j+1}^p).$$

В силу определения $\Gamma_p(E)$ и выбора $g_j(x)$ имеем

$$\Gamma_p(G_{j+1}) \le C_{36} R_j^p \left[C_p\left(B_j \setminus \Omega\right) + R_j^N \right]. \tag{3.6}$$

Далее при $\varepsilon^{p-2} \le 4/9$

$$\Gamma_p\left(Q''_{j+1} \cap \{u > \bar{l} + 2\varepsilon\}\right) \le \frac{1}{\mu^p} \left\{ \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int_{R^N} \left[w_\varepsilon \zeta_j^{k/p}(x) \xi_j^{k/p}(x) \overline{\theta}_j^{k/p}(t) \right]^p dx + \right.$$

$$\left. + \iint_{R^{N+1}} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(w_\varepsilon \xi_j^{k/p}(x) \zeta_j^{k/p}(x) \overline{\theta}_j^{k/p}(t) \right) \right|^p dx\, dt \right\}. \tag{3.7}$$

Используем теорему 2.1, при этом предполагаем j таковым, что выполнено неравенство

$$\frac{R_j^p}{\varepsilon^{p-2}} \le \min\{t_0, T - t_0\}. \tag{3.8}$$

Тогда справедлива оценка

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int_{\overline{L}_j(t) \cap \{u \ge \bar{l} + 2\varepsilon\}} \xi_j^k(x) \zeta_j^k(x) \overline{\theta}_j^k(t) |w_\varepsilon(x, t)|^{\rho(\lambda)} dx +$$

$$+ \varepsilon^{p-2} \iint_{\overline{L}_j} |\nabla w_\varepsilon(x, t)|^p \xi_j^k(x) \zeta_j^k(x) \overline{\theta}_j^k(t)\, dx\, dt \le$$

$$\leq C_{36}\frac{\varepsilon^{p-2}}{R_j^p}\iint\limits_{\overline{E}_j}\left[\left(1+\frac{u-\bar{l}-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{1-\lambda/2}\left(\frac{u-\bar{l}-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\lambda}\right]^{p-1}\times$$

$$\times\,\xi_j^{k-p}(x)\zeta_j^{k-p}(x)\overline{\theta}_j^{k-1}(t)\,dx\,dt\;+$$

$$+\;C_{36}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\right)R_j^p\int\limits_{B_j}\left|\nabla\sigma_j\right|^p dx\;+\;C_{36}\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}R_j^{N+\alpha}. \qquad (3.9)$$

Здесь

$$\overline{L}_j\;=\;\overline{Q}_j\cap\Omega_T\cap\{u>\bar{l}+\varepsilon\},\qquad \overline{Q}_j\;=\;B_j\times\left(t_0-\frac{R_j^p}{\varepsilon^{p-2}},t_0+\frac{R_j^p}{\varepsilon^{p-2}}\right),$$

$$\overline{E}_j\;=\;\overline{L}_j\cap\{\eta_j(x)<1\},\qquad \sigma_j(x)\;=\;\xi_j(x)\zeta_j(x)\eta_j(x).$$

Кроме того, предполагаем, что $j\geq J(\varepsilon)$ таково, что выполнено неравенство

$$\delta_j\;\leq\;\varepsilon. \qquad (3.10)$$

Такое $J(\varepsilon)$ существует в силу сходимости ряда $\sum_{j=1}^{\infty}\delta_j$, следующей из теоремы 2.3.

Оценим интеграл в правой части неравенства (3.9), использовав неравенство $A_j(l_{j+1})\leq\kappa$, следующее из выбора l_{j+1}, где $A_j(l)$ определено в (2.22). Из (2.22) имеем

$$\iint\limits_{L_j}(u-l_j)^{(1+\lambda/2)(p-1)}\,\xi_j^{k-p}(x)\zeta_j^{k-p}(x)\theta_j^{k-1}(t)\,dx\,dt\;\leq$$

$$\leq\;C_{37}\,R_j^{N+p}\,\delta_j^{1+\lambda(p-1)/2}. \qquad (3.11)$$

Из определения множеств L_j, $\overline{L}_j$, функций $\theta_j(t)$, $\overline{\theta}_j(t)$ и неравенства (3.10) получаем следующие вложение и неравенство:

$$\overline{L}_j\subset L_j,\qquad \overline{\theta}_j(t)\;\leq\;\theta_j(t). \qquad (3.12)$$

Наконец, на множестве $\overline{L}_j$ легко проверяется неравенство

$$\left(1+\frac{u-\bar{l}-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{1-\lambda/2}\left(\frac{u-\bar{l}-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\lambda}\;\leq\;C_{38}(\varepsilon)(u-l_j)^{1+\lambda/2}. \qquad (3.13)$$

Используя (3.12), (3.13), из (3.11) получаем

$$\iint\limits_{\overline{L}_j}\left[\left(1+\frac{u-\bar{l}-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{1-\lambda/2}\left(\frac{u-\bar{l}-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\lambda}\right]^{p-1}\xi_j^{k-p}(x)\zeta_j^{k-p}(x)\overline{\theta}_j^{k-1}(t)\,dx\,dt\;\leq$$

$$\leq\;C_{39}(\varepsilon)\,R_j^{N+p}\,\delta_j^{1+\lambda(p-1)/2}. \qquad (3.14)$$

Неравенства (3.7), (3.9), (3.14) приводят к оценке

$$\Gamma_p\left(Q_j''\cap\left\{u>\bar{l}+2\varepsilon\right\}\right)\;\leq$$

$$\leq\;\frac{1}{\mu^p}C_{40}(\varepsilon)\left\{R_j^N\,\delta_j^{1+\lambda(p-1)/2}+R_j^p\,C_p\left(B_{j-1}\setminus\Omega\right)+R_j^{N+\alpha}\right\}. \qquad (3.15)$$

Из определения Γ_p и из (3.6), (3.15) следует

$$\Gamma_p\left(Q_j'\cap\left\{u>\bar{l}+2\varepsilon\right\}\right)\;\leq$$

$$\leq \frac{1}{\mu^p} C_{41}(\varepsilon)\Big\{ R_j^N \delta_j^{1+\lambda(p-1)/2} + R_j^p C_p\big(B_{j-1} \setminus \Omega\big) + R_j^{N+\alpha} \Big\}. \tag{3.16}$$

Тогда из (3.16) получаем

$$\int_0^{R_{J(\varepsilon)}} \frac{\Gamma_p\big(\{u > \bar{l} + 2\varepsilon\} \cap Q_r\big)}{r^{N+1}} dr \leq$$

$$\leq C_{42}(\varepsilon)\left\{ \sum_{j=J(\varepsilon)}^{\infty} \delta_j^{1+\lambda(p-1)/2} + \sum_{j=J(\varepsilon)}^{\infty} \frac{C_p\big(B_j \setminus \Omega\big)}{R_j^{N-p}} + \sum_{j=J(\varepsilon)}^{\infty} R_j^{\alpha} \right\}. \tag{3.17}$$

Правая часть неравенства (3.17) конечна, отсюда следует (3.3), и доказательство теоремы 3.1 завершено.

***Доказательство теоремы* 1.1.** Пусть $f(x) \in C_0^{\infty}(R^N)$, $f(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности точки x_0, $0 \leq f(x) \leq 1$,

$$\int_{R^N} f^2(x)\,dx + \int_{R^N} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^p dx < \varepsilon^2, \tag{3.18}$$

где ε — некоторое число из интервала $(0, 1)$. Пусть $g(t) \in C_0^{\infty}(0, T)$, $g(t) \equiv 1$ при $t \in (t_0/2, (T + t_0)/2)$, $0 \leq g(t) \leq 1$, $|dg(t)/dt| \leq C_{45}(t_0)$.

Можем считать, что носитель функции $f(x)g(t)$ содержится в множестве $\mathcal{D}$ достаточно малой меры так, что

$$\iint_{\mathcal{D}} \big[h_0(x, t) + \bar{h}(x, t) \big] dx\,dt \leq \varepsilon^2.$$

Найдем решение $u(x, t)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, t) = f(x)g(t), \qquad (x, t) \in S_T, \tag{3.19}$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{3.20}$$

Разрешимость задачи (3.1), (3.19), (3.20) устанавливается методами теории монотонных операторов.

Подставив в интегральное тождество (1.6) функцию $\varphi(x, t) = u_h(x, t) - f(x)g(t)$, получим

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int_{\Omega} u^2(x, t)\,dx + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^p\,dx\,dt \leq$$

$$\leq C_{43}(t_0)\left\{ \int_{\Omega} f^2(x)\,dx + \int_{\Omega} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^p dx + \iint_{\mathcal{D}} \big[h_0(x, t) + \bar{h}(x, t) \big] dx\,dt \right\} \leq$$

$$\leq C_{44}(t_0)\varepsilon^2. \tag{3.21}$$

Отсюда, в частности, следует

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int_{\Omega} u_+(x, t)\,dx \leq C_{45}(t_0)\varepsilon. \tag{3.22}$$

Тогда из теоремы 2.3 получаем

$$\bar{l} \leq$$

$$\leq C_{46}(t_0)\left\{ \left[\frac{1}{R_0^N}\varepsilon\right]^{1/(1+\lambda/2)(p-1)} + R_0^{\alpha/(p-1)} + \int_0^{2R_0} \left\{ \frac{C_p(B(x_0, r) \setminus \Omega)}{r^{N-p}} \right\}^{1/(p-1)} \frac{dr}{r} \right\}. \tag{3.23}$$

Используя замечание 2.1, можно считать, что выполнено неравенство

$$C_{46}(t_0)\left\{ R_0^{\alpha/(p-2)} + \int\limits_0^{2R_0} \left[\left\{ \frac{C_p(B(x_0, r)\setminus\Omega)}{r^{N-p}} \right\}^{1/(p-1)} \frac{dr}{r} \right] \right\} \leq \frac{1}{4}. \tag{3.24}$$

Затем выберем ε из условия

$$C_{46}(t_0)\left[\frac{1}{R_0^N}\varepsilon \right]^{1/(1+\lambda/2)(p-1)} = \frac{1}{4}. \tag{3.25}$$

В итоге из (3.23) – (3.25) получим $\bar{l} \leq 1/2$.

Используя теорему 3.1 и условие (2.1), при $l > \bar{l}$ получаем

$$\int\limits_0^1 \frac{\Gamma_p(\overline{Q}_r \cap \{u < l\})}{r^{N+1}} dr = \infty. \tag{3.26}$$

Отсюда и из неравенства Пуанкаре следует оценка

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{mes}(\overline{Q}_r \cap \{u < l\})}{r^{N+p+1}} dr = \infty. \tag{3.27}$$

Полученная выше оценка $\bar{l} \leq 1/2$ позволяет взять в (3.27) $l = 3/4$, что и доказывает необходимое условие регулярности граничной точки (x_0, t_0) для уравнения (1.1).

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
2. *Ziemer W.* Behavior at the boundary of solutions of quasilinear parabolic equations // J. Different. Equat. – 1980. – **35**, № 3. – P. 291–305.
3. *Скрыпник И. В.* Необходимое условие регулярности граничной точки для квазилинейного параболического уравнения // Мат. сб. – 1992. – **183**, № 7. – С. 3–22.
4. *Di Benedetto E.* Degenerate parabolic equations. – New York: Springer, 1993.
5. *Скрыпник И. И.* Регулярность граничной точки для вырождающихся квазилинейных параболических уравнений с измеримыми коэффициентами // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1550–1565.
6. *Kilpeläinen T., Malý J.* The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations // Acta Math. – 1994. – **172**. – P. 137–161.

Получено 09.04.2003