УДК 539.1

П. В. Малышев, Д. В. Малышев (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ЛОКАЛЬНО ВОЗМУЩЕННЫХ РАВНОВЕСНЫХ ФУНКЦИЯХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

We construct a new class of locally perturbed equilibrium distribution functions for which local (in time) solutions of the BBGKY equations can be extended onto the entire time axis.

Побудовано новий клас локально збурених рівноважних функцій розподілу, для яких локальні (за часом) розв'язки рівнянь ББГКІ можна продовжити на всю часову вісь.

1. В неравновесной статистической механике локально возмущенные равновесные функции распределения принято использовать при необходимости продолжения решений задачи Коши для цепочки уравнений ББГКИ, построенных на конечном промежутке времени, на всю временную ось.

При этом удается показать, что для функций распределения такого вида решение уравнений ББГКИ в некоторый момент времени, находящийся на конечном ненулевом расстоянии от начального момента времени, обладает „теми же свойствами", что и начальные данные, и, следовательно, вновь может быть использовано для продолжения решения на следующий отрезок времени ненулевой длины и т. д. При бесконечнократном повторении этой процедуры решение продолжается на всю временную ось.

В настоящей статье мы непосредственно не касаемся проблемы построения решений цепочки уравнений ББГКИ и отсылаем читателя к монографиям [1 – 3], где этот вопрос изложен весьма подробно, а также к работе [4], где локальные возмущения равновесных функций распределения впервые введены в том виде, который широко используется как в монографиях [1 – 3] и последующих работах их авторов, так и в настоящей работе.

2. Введем определение локально возмущенных равновесных функций распределения (ЛВРФР). Пусть $x=(q,p)$, где $x = (q^1, \ldots, q^\nu) \in \mathbb{R}^\nu$ и $p = (p^1, \ldots$ $\ldots, p^\nu) \in \mathbb{R}^\nu$ — координата и импульс частицы в ν-мерном евклидовом пространстве соответственно. Гамильтониан классической системы S идентичных частиц массы m, взаимодействие которых описывается парным потенциалом взаимодействия $\Phi(|q|) \in C^2$, определяется так:

$$H_s(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{i=1}^{s} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i<j=1}^{s} \Phi(|q_i - q_j|) + \sum_{i=1}^{s} h(q_i), \tag{1}$$

где $h(q_i)$ — потенциал внешнего поля. В дальнейшем будем считать, что парный потенциал взаимодействия удовлетворяет условиям устойчивости

$$\sum_{i<j=1}^{n} \Phi(|q_i - q_j|) \geq -Bn, \qquad B > 0, \tag{2}$$

и регулярности

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} \left| e^{-\beta\Phi(|q|)} - 1 \right| dq = C_1(\beta) < \infty. \tag{3}$$

На потенциал внешнего поля наложим условие неотрицательности, т. е. положим

$$h(q_i) \geq 0 \qquad \forall\, q_i \in \mathbb{R}^\nu,$$

и регулярности, т. е.

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} \left| e^{-\beta h(q)} - 1 \right| dq \;<\; C_1(\beta) \;<\; \infty. \tag{3'}$$

Введем следующие обозначения:

$$W_s(p_1, \ldots, p_s) = \sum_{i=1}^{s} \frac{p_i^2}{2m} \quad \text{и} \quad U_s(q_1, \ldots, q_s) \equiv \sum_{i<j=1}^{s} \Phi(|q_i - q_j|).$$

Для описания равновесных состояний бесконечных систем случайного числа частиц в рамках большого канонического ансамбля (БКА) вначале введем последовательность функций Больцмана

$$\Psi_\Lambda = \{1, \Psi_{\Lambda,1}(x_1), \Psi_{\Lambda,2}(x_1, x_2), \ldots, \Psi_{\Lambda,s}(x_1, \ldots, x_s), \ldots\},$$

где

$$\Psi_{\Lambda,s}(x_1, \ldots, x_s) = \exp\{-\beta H_s^\Lambda(x_1, \ldots, x_s) + \beta\mu s\},$$

$\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$ — область, занимаемая системой частиц, β — обратная температура и μ — химический потенциал.

Последовательность функций распределения, описывающая равновесное состояние системы частиц в области Λ в рамках БКА, вводится следующим образом:

$$F_\Lambda = \{1, F_{\Lambda,1}(x_1), \ldots, F_{\Lambda,s}(x_1, \ldots, x_s), \ldots\}, \tag{4}$$

где

$$F_{\Lambda,s}(x_1, \ldots, x_s) = \frac{1}{\Xi(\Lambda)}\Bigg[\Psi_{\Lambda,s}(x_1, \ldots, x_s) \;+$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda^n} dx_1 \ldots dx_n \, \Psi_{\Lambda,s+n}(x_1, \ldots, x_{s+n})\Bigg], \tag{5}$$

а

$$\Xi(\Lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda^n} dx_1 \ldots dx_n \, \Psi_{\Lambda,n}(x_1, \ldots, x_n) \tag{6}$$

— большая статистическая сумма.

Введем также формально последовательность функций распределения, описывающую равновесное состояние бесконечной системы частиц во всем пространстве $\mathbb{R}^\nu$:

$$F = (1, F_1(x_1), \ldots, F_s(x_1, \ldots, x_s), \ldots), \tag{4'}$$

где

$$F_s(x_1, \ldots, x_s) = \frac{1}{\Xi}\left[\Psi_s(x_1, \ldots, x_s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^\nu} dx_1 \ldots dx_n \Psi_{s+n}(x_1, \ldots, x_{s+n})\right], \tag{5'}$$

$$\Psi_n(x_1, \ldots, x_n) \equiv \Psi_{\mathbb{R}^\nu, n}(x_1, \ldots, x_n)$$

и

$$\Xi = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^{\nu n}} dx_1 \ldots dx_n \, \Psi_n(x_1, \ldots, x_n). \tag{6'}$$

Известно [1 – 3], что если потенциал взаимодействия $\Phi(|q|)$ удовлетворяет условиям устойчивости (2) и регулярности (3), то последовательности функций распределения (4), (4′), которые можно рассматривать как решения соответствующих уравнений Кирквуда – Зальцбурга, существуют при малых активностях (плотностях) $z = e^{\beta\mu}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{\nu/2}$, и, более того, последовательность функций распределения (4) сходится (в некотором смысле; см. [1 – 3]) к последовательности функций (4′) в термодинамическом пределе, когда объем $V(\Lambda)$ и среднее число частиц в системе $\langle N\rangle$ неограниченно возрастают, а средняя плотность частиц $\langle N\rangle / V(\Lambda)$ (или активность) остается постоянной. Таким образом, последовательность функций распределения (4′) следует понимать как термодинамический предел последовательности (4) в указанном выше смысле.

Отметим, что для системы частиц с твердой сердцевиной, радиус которой $a > 0$, достаточно потребовать, чтобы потенциал взаимодействия $\Phi(|q|)$ был дважды непрерывно дифференцируем при $|q| > a$ и финитен.

Для последовательности функций Больцмана и, следовательно, для последовательности равновесных функций распределения (4) последовательность ЛВРФР вводится так:

$$\Psi_\Lambda \delta\Psi_\Lambda = \{1, \Psi_{\Lambda,1}(x_1)\delta\Psi_{\Lambda,1}(x_1), \ldots, \Psi_{\Lambda,s}(x_1, \ldots, x_s)\,\delta\Psi_{\Lambda,s}(x_1, \ldots, x_s), \ldots\}, \tag{7}$$

где функции $\delta\Psi_{\Lambda,s}$ определяют локальные возмущения равновесных функций Больцмана (для последовательности (4′) ЛВРФР вводятся аналогично).

Функции $\delta\Psi_\Lambda(x_1, \ldots, x_s)$, $s \geq 1$, должны удовлетворять следующим условиям [4]:

$$\delta\Psi_{\Lambda,s}(x_1, \ldots, x_s) \geq 0, \tag{8}$$

$$\sup_{x_1,\ldots,x_s} |\delta\Psi_{\Lambda,s}(x_1, \ldots, x_s)| \leq C, \quad s \geq 1. \tag{9}$$

Кроме того, должен существовать конечный предел отношения возмущенной и невозмущенной статистических сумм, т. е. [4]

$$\lim_{V(\Lambda)\to\infty} \frac{\Xi(\Lambda)}{\Xi_p(\Lambda)} = \lim_{V(\Lambda)\to\infty} C_1(V) = C_1 < \infty, \tag{10}$$

где $V(\Lambda)$ — объем области Λ, а

$$\Xi_p(\Lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda^n} dx_1 \ldots dx_n\, \delta\Psi_{\Lambda,n}(x_1, \ldots, x_n)\Psi_{\Lambda,n}(x_1, \ldots, x_n) \tag{11}$$

— возмущенная большая статистическая сумма.

Выполнение требования (10) фактически означает, что в термодинамическом пределе возмущенная и невозмущенная статистические суммы совпадают с точностью до постоянной, а основные термодинамические величины, например давление, которые выражаются через логарифм статистической суммы и имеют физический смысл только с точностью до произвольной постоянной (точки отсчета), вообще совпадают.

Проверка условия (10) составляет основную трудность, которую необходимо преодолеть при построении конкретных примеров ЛВРФР, имеющих физический смысл. Так, в настоящее время известен лишь один пример ЛВРФР, построенный впервые в [4] и представляющий собой фактически бесконечно малое возмущение равновесных функций, а именно

$$\delta\Psi_{\Lambda,s}(x_1,\dots,x_s) = \exp\left\{-\beta\sum_{i=1}^{s} h(q_i)\right\},$$

где $h(q_i) \geq 0$ — бесконечно малое возмущение, такое, что представление $\delta\Psi_s = 1-\beta\sum_{i=1}^{s} h(q_i)$ можно рассматривать как точное.

3. В настоящей работе построен значительно более широкий класс ЛВРФР, индуцируемый внешними возмущающими полями, действие которых описывается так называемыми регулярными потенциалами взаимодействия.

Напомним, что мы рассматриваем устойчивые и регулярные потенциалы взаимодействия, и введем последовательность возмущенных функций Больцмана, задаваемых гамильтонианом (1), т. е.

$$\delta\Psi_\Lambda\Psi_\Lambda = \left\{1, \exp\left[-\beta\left(\frac{p_1^2}{2}+h_\Lambda(q_1)\right)\right], \dots, \exp\left\{-\beta\left[W_s^\Lambda(p_1,\dots,p_s) + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + U_s^\Lambda(q_1,\dots,q_s)+\sum_{i=1}^{s} h_\Lambda(q_i)\right]\right\}, \dots\right\}. \tag{12}$$

Функции $h_\Lambda(q_i)$ представляют собой возмущающее поле, т. е. фактически

$$\Psi_{\Lambda,s}(x_1,\dots,x_s) = \exp\{-\beta W_s^\Lambda(p_1,\dots,p_s)+U_s^\Lambda(q_1,\dots,q_s)\}$$

и

$$\delta\Psi_{\Lambda,s}(x_1,\dots,x_s) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{s} h_\Lambda(q_i)\right\}.$$

Здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что h_Λ — регулярный неотрицательный потенциал взаимодействия, удовлетворяющий условию (3′). При этом выполнение условий (8) и (9), наложенных на ЛВРФР, очевидно (отметим, что для систем частиц с твердой сердцевиной $(a>0)$ условие неотрицательности потенциала $h(q)$ может быть заменено условием его ограниченности снизу и финитности).

Запишем функции распределения и большую статистическую сумму, задаваемую гамильтонианом (1), рассматриваемым как возмущение равновесного гамильтониана $H_\Lambda^e = W_\Lambda^e + U_\Lambda^e$. При этом выполним интегрирование по импульсным переменным и перейдем к функциям распределения, заданным в конфигурационном пространстве, т. е. зависящим только от координат частиц (см., например, [1–3]). Соответствующую последовательность функций распределения обозначим следующим образом:

$$\tilde{F}_\Lambda = (\tilde{F}_0, \tilde{F}_{\Lambda,1}(q_1), \dots, \tilde{F}_{\Lambda,s}(q_1,\dots,q_s), \dots), \tag{13}$$

где

$$\tilde{F}_0 = 1,$$

$$\tilde{F}_{\Lambda,1}(q_1) = \frac{1}{\Xi_\Lambda}\left\{ze^{-\beta h(q_1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n!}\int_{\Lambda^n} dq_2\dots dq_{n+1}\exp\left\{-\beta\left[U_{n+1}^\Lambda(q_1,\dots,q_{n+1})+\sum_{i=1}^{n+1}h_\Lambda(q_i)\right]\right\}\right\};$$

....

$$\tilde{F}_{\Lambda,s}(q_1,\ldots,q_s) = \frac{1}{\Xi_p}\left(z^s \exp\left(-\beta\left[\sum_{i=1}^{s} h_\Lambda(q_i) + U_s^\Lambda(q_1,\ldots,q_s)\right]\right) +\right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{s+n}}{n!}\int_{\Lambda^n} dq_{s+1}\ldots dq_{s+n}\exp\left\{-\beta\left[U_{s+n}^\Lambda(q_1,\ldots,q_{s+n}) + \sum_{i=1}^{s+n} h_\Lambda(q_i)\right]\right\}\right),$$

....

При $h > 0$ последовательность функций распределения (13) существует при тех же условиях, что и последовательность (4).

Чтобы получить равновесные функции распределения относительно невозмущенного гамильтониана, необходимо в выражении (13) положить $h(q_i) \equiv 0$.

Выражение для возмущенной статистической суммы имеет следующий вид (положив $h_\Lambda \equiv 0$, мы естественно получим статистическую сумму для невозмущенного потенциала взаимодействия):

$$\Xi_p^{\cdot}(\Lambda) = 1 + \int_\Lambda dq_1 e^{-\beta h(q_1)} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int dq_1\ldots dq_n \exp\left\{-\beta\left[U_n^\Lambda(q_1,\ldots,q_n) + \sum_{i=1}^{n} h(q_i)\right]\right\}. \qquad (14)$$

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема. *Предположим, что последовательность функций распределения* F_Λ (4) *задается устойчивым* (2) *и регулярным* (3) *потенциалом взаимодействия* $\Phi(|q|)$ *и принадлежит пространству* E_ξ *(см.* [1–3]) *с нормой*

$$\|F\| = \sup_s \sup_{q_1,\ldots,q_s\in\mathbb{R}^\nu} |F_s(q_1,\ldots,q_s)|\,\xi^{-s},$$

где $\xi > 0$, *а потенциал внешнего поля* $h(q) \geq 0$ *таков, что выполняются условие регулярности* (3′) *и условие*

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} dq\left|e^{\beta h(q)} - 1\right| \equiv C_2(\beta) < \infty. \qquad (15)$$

Тогда последовательность функций распределения $\tilde{F}_\Lambda$ (13), *задаваемая гамильтонианом* (1), *является последовательностью ЛВРФР относительно последовательности функций распределения* (4), *задаваемой равновесным гамильтонианом* (1), *в котором* $h(q) \equiv 0$.

В свою очередь, последовательность функций распределения, задаваемая гамильтонианом без внешнего поля и рассматриваемая в качестве возмущенной относительно последовательности функций распределения, задаваемой гамильтонианом (1), *удовлетворяет условию* (10).

Замечание. Отметим (см. [1–3]), что как равновесные, так и возмущенные функции распределения существуют при малых активностях, т. е. при $|z| \leq$ $\leq C_1^{-1}(\beta)e^{-2\beta B-1}$ (при этом $\xi = C^{-1}(\beta)$). В настоящей работе это условие в явном виде не используется, но мы везде предполагаем его выполнение.

Доказательство. Выполнение условий (8) и (9) очевидно. Проверим справедливость условия (10). Для этого необходимо рассмотреть выражение $\dfrac{\Xi_p(\Lambda)}{\Xi(\Lambda)}$ и исследовать его предельные свойства при $V(\Lambda) \to \infty$. С этой целью введем в рассмотрение функции $\varphi_i \equiv \varphi(q_i) = e^{-\beta h(q_i)} - 1$ и представим каждую функцию $e^{-\beta h(q_i)}$ в виде

$$e^{-\beta h(q_i)} \equiv (e^{-\beta h(q_i)} - 1) + 1 = 1 + \varphi_i.$$

В результате получим

$$\frac{\Xi_p}{\Xi} = \frac{1}{\Xi}\Bigg(1 + z\int\limits_{\Lambda} dq_1 + z\int\limits_{\Lambda} dq\varphi(q) + \frac{z^2}{2}\int dq_1\, dq_2 e^{-\beta U_2(q_1,\, q_2)} \times$$

$$\times\,(1+\varphi(q_1))(1+\varphi(q_2)) + \ldots + \frac{z^n}{n!}\int\limits_{\Lambda^n} dq_1 \ldots dq_n e^{-\beta U_n(q_1,\ldots,\, q_n)}(1+\varphi_1)\ldots(1+\varphi_n) + \ldots\Bigg). \tag{16}$$

Перемножим выражения, стоящие в скобках в каждом из членов, и сгруппируем члены, соответствующие невозмущенной статистической сумме, невозмущенной одночастичной функции распределения, двухчастичной и т. д. (в данных выкладках мы существенно используем тот факт, что функции распределения инвариантны относительно перестановок своих аргументов):

$$\frac{\Xi_p(\Lambda)}{\Xi(\Lambda)} = \frac{1}{\Xi}\Bigg(1 + zV(\Lambda) + z\int\limits_{\Lambda} dq_1\varphi(q_1) + \frac{z^2}{2}\int dq_1\, dq_2 e^{-\beta U_2(q_1,\ldots,q_n)} +$$

$$+\; z^2\int\limits_{\Lambda} dq_1\varphi(q_1)\int\limits_{\Lambda} dq_2 e^{-\beta U_2(q_1,q_2)} + \frac{z^2}{2}\int dq_1\, dq_2\varphi(q_1)\varphi(q_2)e^{-\beta U_2(q_1,\ldots,q_n)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{z^n}{n!}\int\limits_{\Lambda^n} dq_1 \ldots dq_n e^{-\beta U_n(q_1,\ldots,q_n)} + \frac{z^n}{(n-1)!}\int\limits_{\Lambda} dq_1\varphi(q_1)\int dq_2 \ldots dq_n e^{-\beta U_n(q_1,\ldots,q_n)} +$$

$$+\; \frac{z^n}{2(n-2)!}\int\limits_{\Lambda^2} dq_1\, dq_2\varphi_1\varphi_2 \int\limits_{\Lambda^{n-2}} dq_3 \ldots dq_n e^{-\beta U_n(q_1,\ldots,q_n)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{z^n}{k!(n-k)!}\int\limits_{\Lambda^k} dq_1 \ldots dq_k\varphi_1 \ldots \varphi_k \int\limits_{\Lambda^{n-k}} dq_{k+1} \ldots dq_n e^{-\beta U_n(q_1,\ldots,q_n)} + \ldots\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{\Xi}\Bigg[\Bigg(1 + zV(\Lambda) + \frac{z^2}{2!}\int\limits_{\Lambda^2} dq_1\, dq_2 e^{-\beta U_2(q_1,q_2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{z^n}{n!}\int\limits_{\Lambda^n} dq_1 \ldots dq_n e^{-\beta U_n(q_1,\ldots,q_n)} + \ldots\Bigg) + z\int\limits_{\Lambda} dq_1\varphi(q_1)\Bigg[1 +$$

$$+\; \int\limits_{\Lambda} dq_2 e^{-\beta U_2(q_1,q_2)} + \frac{z}{2}\int\limits_{\Lambda^2} dq_2\, dq_3 e^{-\beta U_3(q_1,\ldots q_3)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{z^{n-2}}{(n-1)!}\int\limits_{\Lambda^{n-1}} dq_2 \ldots dq_n e^{-\beta U_n(q_1,\ldots,q_n)} + \ldots\Bigg] +$$

$$+\; \frac{z^2}{2}\int\limits_{\Lambda^2} dq_1\, dq_2\varphi_1\varphi_2\Bigg[e^{-\beta U_2(q_1,q_2)} + z\int\limits_{\Lambda} dq_3 e^{-\beta U_3(q_1,\ldots q_3)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{z^{n-2}}{(n-2)!}\int\limits_{\Lambda^{n-2}} dq_3 \ldots dq_n e^{-\beta U_n(q_1,\ldots,q_n)} + \ldots\Bigg] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{z^k}{k!}\int dq_1 \ldots dq_k\varphi_1 \ldots \varphi_k\Bigg[e^{-\beta U_k(q_1,\ldots,\, q_k)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \int\limits_{\Lambda^{n-k}} dx_1 \ldots dx_{n-k} e^{-\beta U_n(q_1,\ldots,q_n)} + \ldots \Bigg] + \ldots \Bigg].$$

Далее имеем

$$\frac{\Xi_p(\Lambda)}{\Xi(\Lambda)} = \frac{1}{\Xi(\Lambda)} \Bigg(\Xi(\Lambda) + \Xi(\Lambda) \int\limits_{\Lambda} dq \varphi(q) F_{\Lambda,1}(q) +$$

$$+ \frac{\Xi(\Lambda)}{2!} \int\limits_{\Lambda^2} dq_1\, dq_2 \varphi_1 \varphi_2 F_{\Lambda,2}(q_1, q_2) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Xi(\Lambda)}{n!} \int\limits_{\Lambda^n} dq_1 \ldots dq_n \varphi_1 \ldots \varphi_n F_{\Lambda,n}(q_1, \ldots, q_n) + \ldots \Bigg) =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{\Lambda^n} dq_1 \ldots dq_n \varphi(q_1) \ldots \varphi(q_n) F_{\Lambda,n}(q_1, \ldots, q_n),$$

где $F_{\Lambda,n}(q_1, \ldots, q_n)$ — функции распределения по конфигурационным переменным, определяемые гамильтонианом $H_{\Lambda}^{e} = W_{\Lambda}^{e} + U_{\Lambda}^{e}$.

Для последовательностей функций распределения, принадлежащих пространству E_{ξ}, имеем

$$\left| F_{\Lambda,s}(q_1, \ldots, q_s) \right| \leq \xi^s \| F \|$$

для любых $(q_1, \ldots, q_s) \in \mathbb{R}^{\nu}$ и $s \geq 1$, где $\| F \|$ не зависит от Λ. В результате получаем

$$\left| \frac{\Xi_p(\Lambda)}{\Xi(\Lambda)} \right| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{\Lambda^n} dq_1 \ldots dq_n |\varphi_1| \ldots |\varphi_n| \left| F_{\Lambda,n}(q_1, \ldots, q_n) \right| \leq$$

$$\leq 1 + \| F \| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \left(\int dq |\varphi(q)| \right)^n = 1 + \| F \| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n C_1(\beta)^n}{n!} \leq 1 + \| F \| e^{\xi C_1(\beta)}, \quad (17)$$

т. е. указанное выше отношение статистических сумм ограничено сверху постоянной, не зависящей от объема.

Отметим, что фактически нам необходимо оценить не отношение Ξ_p / Ξ, а обратную величину Ξ / Ξ_p.

При этом, в силу того, что последовательности функций распределения F_{Λ} (4) и $\tilde{F}_{\Lambda}$ (13) существуют при тех же ограничениях на потенциалы Φ и h и активность z, мы можем использовать те же выкладки, считая гамильтониан (1) невозмущенным, а гамильтониан H_{Λ}^{e} его возмущением внешним полем $-\sum_{i=1}^{n} h_{\Lambda}(q_i)$ (т. е. тем же полем, что и в (1), но с противоположным знаком).

В этом случае полученный результат остается в силе, если условие регулярности (3) заменить условием (15), требующим достаточно быстрого убывания потенциала $h(q)$ на бесконечности.

Таким образом, мы требуем, чтобы потенциал внешнего поля удовлетворял условию регулярности (3) и условию (15). Объединяя эти условия, получаем

$$\max\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^\nu} dq\left|e^{-\beta h(q)}-1\right|,\ \int\limits_{\mathbb{R}^\nu} dq\left|e^{\beta h(q)}-1\right|\right\} \equiv \max\left(C_1(\beta), C_2(\beta)\right) = \\ = C(\beta) < \infty. \qquad (18)$$

Итак,

$$\frac{\Xi(\Lambda)}{\Xi_p(\Lambda)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{\Lambda^n} dq_1\ldots dq_n\,\tilde{\varphi}(q_1)\ldots\tilde{\varphi}(q_n)\,\tilde{F}_{\Lambda,n}(q_1,\ldots,q_n),$$

где

$$\tilde{\varphi}(q) = e^{\beta h(q)} - 1.$$

Следовательно,

$$\frac{\Xi(\Lambda)}{\Xi_p(\Lambda)} \le 1 + \left\|\tilde{F}\right\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n C_2(\beta)^n}{n!} \le 1 + \left\|\tilde{F}\right\| e^{\xi C_2(\beta)}.$$

Окончательно получаем

$$0 < \frac{1}{1+e^{\xi C(\beta)}\|F\|} = \frac{1}{1+e^{\xi C_1(\beta)}\|F\|} \le \frac{\Xi(\Lambda)}{\Xi_p(\Lambda)} \le \\ \le 1 + e^{\xi C_2(\beta)}\left\|\tilde{F}\right\| \le 1 + e^{\xi C(\beta)}\left\|\tilde{F}\right\| < \infty.$$

Таким образом, искомая последовательность отношений статистических сумм мажорируется сходящимся числовым рядом, т. е. утверждение (10) доказано, а это означает, что внешнее поле, заданное одночастичным потенциалом взаимодействия, удовлетворяющим условию (18), задает ЛВРФР относительно исходного гамильтониана H^e.

Очевидно, что для функций распределения, заданных в бесконечном объеме (4′) как термодинамический предел соответствующих функций распределения, определенных в конечной области, и соответствующих функций распределения, заданных гамильтонианом (1), все выкладки и теорема остаются справедливыми. Более того, нетрудно показать, что если невозмущенные функции распределения допускают переход к термодинамическому пределу, то соответствующий предельный переход можно осуществить и для возмущенных функций распределения.

Для систем частиц с твердой сердцевиной радиуса $a > 0$ условие $h \ge 0$ можно заменить условием ограниченности снизу и финитности.

4. В настоящей работе построен новый класс ЛВРФР, задаваемых возмущающим внешним полем $h(q) \ge 0$, удовлетворяющим условию (18). Это означает, что термодинамические функции, построенные по гамильтониану (1) и гамильтониану H^e, совпадают в термодинамическом пределе, а решения уравнений ББГКИ для таких возмущенных равновесных функций могут быть продолжены на всю временную ось.

1. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В.* Математические основы классической статистической механики. – Киев: Наук. думка, 1985. – 264 с.
2. *Petrina D. Ya., Gerasimenko V. I., Malyshev P. V.* Mathematical foundations of classical statistical mechanics. Continuous systems. – New York, London etc.: Gordon and Breach, 1989. – 356 p.
3. *Petrina D. Ya., Gerasimenko V. I., Malyshev P. V.* Mathematical foundations of classical statistical mechanics. Continuous systems. – 2nd ed. – London, New York: Taylor & Francis, 2002. – 338 p.
4. *Петрина Д. Я.* Математическое описание эволюции бесконечных систем классической статистической физики: Локально возмущенные одномерные системы // Теорет. и мат. физика. – 1979. – **38**, № 2. – С. 230 – 250.

Получено 08.04.2004