УДК 517.925.3

М. О. Перестюк, О.С. Чернікова (Київ нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ДО ПИТАННЯ ПРО СТІЙКІСТЬ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОЖИН СИСТЕМ ІМПУЛЬСНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We introduce the notion of stability of integral set of impulsive differential system of the general form (with unfixed times of impulse perturbation). We establish sufficient conditions of the stability of integral set.

Вводиться поняття стійкості інтегральної множини імпульсної диференціальної системи загального вигляду (з нефіксованими моментами часу імпульсного збурення). Встановлюються достатні умови стійкості інтегральної множини.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \neq t_i(x),$$
$$\Delta x\big|_{t=t_i(x)} = I_i(x), \tag{1}$$

де $x \in R^n$, $t \in R_+$, $f(t,x)$, $I_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, — неперервні вектор-функції, функції $t_i(x)$ неперервні і такі, що $0 < t_1(x) < t_2(x) < \ldots$, і $t_i(x) \to \infty$, коли $i \to \infty$ рівномірно по $x \in R^n$. Вважатимемо, що для довільної точки $(t_0, x_0) \in$ $\in R_+ \times R^n$ при $t \geq t_0$ існує єдиний розв'язок $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системи (1) і будь-яка інтегральна крива зустрічає кожну з поверхонь $t = t_i(x)$ лише один раз, тобто відсутнє явище биття розв'язків по поверхнях $t = t_i(x)$. Достатні умови відсутності цього явища в імпульсних системах наведено в [1, 2].

Нагадаємо, що довільний розв'язок $x(t, t_0, x_0)$ системи (1) — це кусково-неперервна функція з точками розриву θ_i^x, $\theta_i^x = t_i(x(\theta_i^x))$, $i = 1, 2, \ldots$: $x(\theta_i^x, t_0, x_0) = x(\theta_i^x - 0, t_0, x_0)$, $x(\theta_i^x + 0, t_0, x_0) = x(\theta_i^x, t_0, x_0) + I_i(x(\theta_i^x, t_0, x_0))$.

Множину $M \subset R_+ \times R^n$ називатимемо інтегральною множиною системи (1), якщо для довільної точки $(t_0, x_0) \in M$ точка $(t, x(t, t_0, x_0)) \in M$ для всіх $t \geq t_0$. При цьому разом із точкою $(t_0, x_0) \in M$, що знаходиться на поверхні розриву $(t_0 = t_i(x_0))$, множина M містить точку $(t_0, x_0 + I_i(x_0))$.

Позначимо через Λ_i, $i = 1, 2, \ldots$, множини точок розриву інтегральних кривих системи (1), що належать інтегральній множині M, тобто для кожного $i =$ $= 1, 2, \ldots$ Λ_i — множина розв'язків рівняння $\tau = t_i(x(\tau))$, $(\tau, x(\tau)) \in M$. Якщо інтегральною множиною є, наприклад, множина точок $\{(t,x)\colon t \in R_+,$ $x = x(t, 0, x_0)\}$, тобто інтегральна множина утворена одним розв'язком системи (1), то при наших припущеннях щодо властивостей розв'язків системи (1) кожна з множин Λ_i складається лише з однієї точки: $\Lambda_i = \{\theta_i^x\}$. Також у випадку, коли $t_i(x) = \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots$, множини Λ_i є одноелементними: $\Lambda_i = \{\tau_i\}$.

Нехай $M(t) = \{x \in R^n\colon (t,x) \in M\}$ — переріз множини M. Якщо $t = \theta_i \in \Lambda_i$, $(\theta_i, x) \in M$ і $\theta_i = t_i(x)$, то, як зазначалося вище, поряд із точкою (θ_i, x) множина M містить і точку $(\theta_i, x + I_i(x))$, отже, і переріз $M(\theta_i)$ містить обидві точки: x і $x + I_i(x)$. Для $\theta_i \in \Lambda_i$ будемо розрізняти дві підмножини перерізу: $M_i(\theta_i)$ і $M_{i+1}(\theta_i)$. Належність точки $x \in R^n$ до $M_i(\theta_i)$ або $M_{i+1}(\theta_i)$ визначимо таким чином. Нехай $\Omega_i = \{(t,x)\colon t \in R_+ \times R^n,\ t_{i-1}(x) < t \leq t_i(x)\}$, $i = 1, 2, \ldots$, $t_0(x) \equiv 0$. Якщо $(\theta_i, x) \in M \bigcap \Omega_i$, то $x \in M_i(\theta_i)$; якщо $(\theta_i, x) \in M \bigcap \Omega_{i+1}$, або (θ_i, x) є граничною точкою множини $M \bigcap \Omega_{i+1}$, то $x \in M_{i+1}(\theta_i)$; $M(\theta_i) =$

$= M_i(\theta_i) \bigcup M_{i+1}(\theta_i)$, $\theta_i \in \Lambda_i$. Множини $M_i(\theta_i)$ і $M_{i+1}(\theta_i)$ можуть мати непорожній перетин.

Припустимо, що при кожному $t \in R_+$ переріз $M(t)$ множини M не порожній і міститься у компактній множині $Q \subset R^n$ (у подальшому вважатимемо, що множина $Q_{\varepsilon_0} = \{x \in R^n : \rho(x, Q) < \varepsilon_0\}$, $\varepsilon_0 > 0$, міститься у множині $B_h = \{x \in R^n : \| x \| \leq h\}$ для деякого $h > 0$).

У випадку, коли система (1) є системою з фіксованою послідовністю $\{\tau_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, моментів часу імпульсної дії, лише для точок цієї послідовності розрізняються дві розглянуті підмножини перерізу інтегральної множини M. Точка $x \in M_{i+1}(\tau_i)$, якщо $(\tau_i, x) \in M$ і (τ_i, x) є граничною точкою множини $\Omega_{i+1} \bigcap M$; якщо ж $(\tau_i, x) \in M \bigcap \Omega_i$, то $x \in M_i(\tau_i)$.

Будемо говорити, що розв'язок $y(t)$ системи (1) належить ε-околу інтегральної множини M при $t \geq t_0$, якщо можна вказати послідовність $\{\theta_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, $\theta_i \in \Lambda_i$, таку, що для точок розриву θ_i^y розв'язку $y(t)$ справджується нерівність $\left|\theta_i^y - \theta_i\right| < \varepsilon$, і $\rho(y(t, t_0, y_0), M(t)) < \varepsilon$ при $t \geq t_0$, $t \notin \bigcup_{i=1}^{\infty}(\theta_i - \varepsilon, \theta_i + \varepsilon)$ (через $\rho(y, M(t))$ позначено відстань від точки y до множини $M(t)$).

З кожною точкою $(t_0, y_0) \in R_+ \times R^n$ пов'яжемо множину $M_{y_0}(t_0)$ таким чином:

$$M_{y_0}(t_0) = \begin{cases} M(t_0), & \text{якщо } t_0 \notin \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Lambda_i; \\ M_i(t_0), & \text{якщо } t_0 \in \Lambda_i, \ (t_0, y_0) \in \Omega_i; \\ M_{i+1}(t_0), & \text{якщо } t_0 \in \Lambda_i, \ (t_0, y_0) \in \Omega_{i+1}. \end{cases}$$

Інтегральну множину M системи (1) назвемо стійкою, якщо для довільних $\varepsilon > 0$ і $t_0 \in R_+$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, що при $\rho(y_0, M_{y_0}(t_0)) < \delta$ розв'язок $y(t, t_0, y_0)$ при $t \geq t_0$ належить ε-околу множини M (при цьому вважається, що $t_0 \neq \theta_i^y$).

Стійку інтегральну множину M системи (1) назвемо асимптотично стійкою, якщо існує таке число $\delta_0 > 0$, що для довільного розв'язку $y(t) = y(t, t_0, y_0)$ системи (1), для якого $\rho(y_0, M_{y_0}(t_0)) < \delta_0$, справджується гранична рівність $\lim\limits_{t \to \infty} \rho(y(t), M(t)) = 0$.

Зауважимо, що стійкість множин для деяких класів імпульсних диференціальних систем досліджувалась в окремих роботах (див., наприклад, [3, 4]). Проте означення понять стійкості (асимптотичної, рівномірної тощо) множин, прийняті в цих роботах згідно з наведеними відповідними означеннями в [5], не придатні для інтегральних множин систем диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням у загальному випадку (з нефіксованими моментами часу імпульсної дії). У цьому неважко переконатися, наприклад, проаналізувавши випадок, коли інтегральна множина системи вигляду (1) утворена одним розривним розв'язком. Введені в даній роботі поняття стійкості інтегральної множини узагальнюють поняття стійкості довільного (у загальному випадку — нетривіального розривного) розв'язку системи (1) [1].

Нагадаємо [1, 2], що дослідження стійкості деякого розв'язку системи (1) можна звести до дослідження стійкості тривіального (неперервного) розв'язку деякої допоміжної імпульсної диференціальної системи. Стійкість тривіального розв'язку та деякі інші властивості імпульсних систем виявилося можливим досліджувати за допомогою класичного прямого методу Ляпунова, певним чином модифікованого [6–8]. Результати [6–8] знайшли різноманітні узагальнення і досить широко застосовуються в теорії імпульсних систем. Зокрема, вони застосовні при дослідженні стійкості множин (інваріантних, інтегральних) для імпульсних диференціальних систем. При цьому дослідження стійкості інтегральної множини імпульсної системи загального вигляду у певних випадках можна значно спростити шляхом зведення до дослідження стійкості інтегральної множини деякої системи з фіксованою послідовністю моментів часу імпульсної дії. У останньому ж випадку умови стійкості інтегральної множини легко встановити, беручи до уваги деякі міркування [9–12] та узагальнюючи певним чином одержані раніше [1, 2, 6–8, 13, 14] умови стійкості тривіального розв'язку імпульсної системи.

Припустимо, що функції $f(t,x)$ і $I_i(x)$ задовольняють умови

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| + \| I_i(x) - I_i(y) \| \leq K \| x - y \| \tag{2}$$

рівномірно відносно $t \in R_+$, $i = 1, 2, \ldots$ для всіх $x, y \in R^n$ і

$$\sup_{t \geq 0} \| f(t,0) \| + \sup_{i \geq 1} \| I_i(0) \| = N < +\infty. \tag{3}$$

Припустимо, що для $x \in B_h$ рівняння поверхонь розриву розв'язків системи (1) можна подати у вигляді

$$t = t_i(x) = \tau_i + \tau_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

і виконуються умови

$$\begin{gathered} \tau_{i+1} - \tau_i \geq d > 0, \quad 0 \leq \tau_i(x) \leq l < d, \quad i = 1, 2, \ldots, \\ | \tau_i(x) - \tau_i(y) | \leq l \| x - y \|, \end{gathered} \tag{5}$$

де l — досить мале число.

При таких припущеннях зведемо дослідження стійкості інтегральної множини системи (1) до дослідження стійкості інтегральної множини деякої системи з фіксованою послідовністю моментів часу імпульсного збурення.

Нехай M — інтегральна множина системи (1). Розглянемо множину $\hat{M}$, яка відрізняється від множини M у точках (t, x), що лежать між поверхнями $t = \tau_i$ і $t = t_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, таким чином. Кожна точка $(t^*, x^*) \in M$ така, що $\tau_i < t^* \leq t_i(x^*)$, заміняється точкою $(t^*, \tilde{x}(t^*, \theta_i^x, x(\theta_i^x + 0)))$, де $\tilde{x}(t)$ —розв'язок системи $d\tilde{x}(t)/dt = f(t, \tilde{x})$ з початковою умовою $\tilde{x}(\theta_i^x) = x(\theta_i^x + 0) = x(\theta_i^x + 0, t^*, x^*)$ (через θ_i^x позначено момент часу зустрічі інтегральної кривої $\{t, x(t, t^*, x^*)\}$, $t \geq t^*$, системи (1) з поверхнею $t = t_i(x)$).

Нехай $x(t)$ — розв'язок системи (1) з початковою умовою $x(\tau_i) = x$. Введемо до розгляду функцію $G_i(x) = \int_{\theta_i^x}^{\tau_i} f(\tau, \tilde{x}(\tau)) d\tau + I_i(x(\theta_i^x)) + \int_{\tau_i}^{\theta_i^x} f(\tau, x(\tau)) d\tau$.

Виходячи з побудови множини $\hat{M}$, неважко переконатися у справедливості наступного твердження.

Лема 1. *Якщо M — інтегральна множина системи* (1), *то множина $\hat{M}$ є інтегральною множиною системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу*

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x |_{t = \tau_i} = G_i(x). \end{gathered} \tag{6}$$

За допомогою нерівності Гронуолла – Беллмана з урахуванням умов (2) – (5) легко встановити справедливість такого твердження.

Лема 2. *Нехай* $x \in B_h$. *Тоді для розв'язку* $x(t)$ *справджується нерівність*

$$\| x(t) \| \leq H, \qquad t \in [\tau_i, \tau_i + l],$$

де $H = \left\{(1+K)(h+Nl)e^{Kl} + N(1+l)\right\}e^{Kl}$.

Лема 3 [15]. *Для точок розриву* θ_i^x і θ_i^y *довільних розв'язків* $x(t)$ *і* $y(t)$ *системи* (1) *з початковими умовами* $x(\tau_i) = x$, $y(\tau_i) = y$, $x, y \in B_h$, *справджується співвідношення*

$$\left|\theta_i^x - \theta_i^y\right| \leq \frac{le^{Kl}}{1 - l(N+KH)} \| x - y \| \qquad \left(l < (N + KH)^{-1}\right).$$

Теорема 1. *Інтегральна множина* M *системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією* (1) *стійка, якщо стійкою є інтегральна множина* $\hat{M}$ *системи* (6) *з фіксованою послідовністю моментів часу імпульсної дії.*

Доведення. Нехай інтегральна множина $\hat{M}$ системи (6) стійка. Виберемо і зафіксуємо $t_0 \in R_+$. Спочатку розглянемо випадок, коли $t_0 \notin \bigcup_{i=1}^{\infty}[\tau_i, T_i)$, де $T_i = \sup \Lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Згідно з означенням стійкості інтегральної множини (стосовно інтегральної множини імпульсної диференціальної системи з фіксованою послідовністю моментів часу імпульсної дії) для довільного $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \varepsilon_0)$ існує таке $\delta > 0$, що при $\rho\left(y_0, \hat{M}(t_0)\right) < \delta$ для будь-якого розв'язку $\hat{y}(t, t_0, y_0)$ системи (6) при $t \geq t_0$, $t \neq \tau_i$, виконується нерівність

$$\rho\left(\hat{y}(t, t_0, y_0), \hat{M}(t)\right) < \varepsilon, \tag{7}$$

а також нерівність $\rho\left(\hat{y}(\tau_i, t_0, y_0), \hat{M}_i(\tau_i)\right) < \varepsilon$ $(\tau_i \geq t_0)$. Останнє означає, що при кожному i такому, що $\tau_i \geq t_0$, існує точка $x_i \in \hat{M}_i(\tau_i)$ така, що $\| \hat{y}(\tau_i, t_0, y_0) - x_i \| < \varepsilon$.

Оскільки розв'язок $\hat{y}(t) = \hat{y}(t, t_0, y_0)$ системи (6) збігається з розв'язком $y(t) = y(t, t_0, y_0)$ системи (1) у всіх точках, крім точок множини $\bigcup_{i:\tau_i \geq t_0}(\tau_i, \theta_i^y)$, і множини M і $\hat{M}$ відрізняються одна від одної лише при $t \in \bigcup_{i=1}^{\infty}(\tau_i, T_i)$, де $T_i = \sup \Lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots$, то $\rho(y(t), M(t)) < \varepsilon$ при $t \notin \bigcup_{i:\tau_i \geq t_0}(\tau_i, \gamma_i)$, $\gamma_i = \max(\theta_i^y, T_i)$. Оцінимо відстань $\rho(y(t), M(t))$ при $t \in (\tau_i, \gamma_i)$, припустивши, наприклад, що $\gamma_i = T_i$. Нехай $x(t)$, $t \geq \tau_i$, — розв'язок системи (1) з початковою умовою $x(\tau_i) = x_i$. Згідно з лемою 3 для моментів часу θ_i^x, θ_i^y, $\theta_i^x \in \Lambda_i$, виконується співвідношення

$$\left|\theta_i^x - \theta_i^y\right| \leq \frac{le^{Kl}}{1 - l(N+KH)} \varepsilon. \tag{8}$$

Не обмежуючи загальності міркувань, припустимо, що $\theta_i^y < \theta_i^x$. Неважко переконатися в тому, що при $\tau_i < t \leq \theta_i^y$ має місце нерівність

$$\| y(t) - x(t) \| \leq \| y(\tau_i) - x(\tau_i) \| e^{K(t - \tau_i)} < \varepsilon e^{K(\theta_i^y - \tau_i)}, \tag{9}$$

а при $\theta_i^x < t \leq T_i$ — нерівність

$$\| y(t) - x(t) \| \le \left[(1+K)\varepsilon e^{Kl} + (2+K)(KH+N)(\theta_i^x - \theta_i^y) \right] e^{K(t-\theta_i^x)}. \qquad (10)$$

Нехай ε_1 — довільне достатньо мале число $(\varepsilon_1 < \varepsilon_0)$ і $\varepsilon < \varepsilon_1 / A$, де

$$A = \max \left\{ e^{2Kl} \left[1 + K + \frac{(2+K)(N+KH)l}{1 - l(N+KH)} \right], \frac{le^{Kl}}{1 - l(N+KH)} \right\}.$$

Із стійкості інтегральної множини $\hat{M}$ для системи (6) та нерівностей (7) – (10) випливає, що для довільного розв'язку $y(t, t_0, y_0)$ системи (1), який задовольняє нерівність $\rho(y_0, M(t_0)) < \delta$, справджується нерівність $\rho(y(t, t_0, y_0), M(t)) < < \varepsilon_1$ при $t \ge t_0$, $t \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} (\theta_i - \varepsilon_1, \theta_i + \varepsilon_1)$, де θ_i — деяка точка множини Λ_i, $i = 1, 2, \ldots$, тобто випливає стійкість інтегральної множини M системи (1).

Якщо ж $t_0 \in \bigcup_{i=1}^{\infty} [\tau_i, T_i)$, то неважко переконатися в тому, що при $\rho(y_0, M_{y_0}(t_0)) < \delta_1$, де $\delta_1 < \delta / A$, виконується нерівність $\rho(y(t, t_0, y_0), M(t)) < \delta$ для всіх $t \in [t_0, \tau_i + l]$, крім, можливо, точок деякого проміжку $(\alpha_i^{y_0}, \beta_i^{y_0})$, довжина якого не перевищує δ. Враховуючи це та умову стійкості множини $\hat{M}$ для системи (6), робимо висновок про стійкість інтегральної множини M системи (1).

Справедливе також таке твердження.

Теорема 2. *Інтегральна множина M системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією* (1) *асимптотично стійка, якщо асимптотично стійкою є інтегральна множина $\hat{M}$ системи* (6) *з фіксованою послідовністю моментів часу імпульсної дії.*

Наведемо достатні умови стійкості (асимптотичної стійкості) інтегральної множини імпульсної диференціальної системи з фіксованою послідовністю моментів часу імпульсної дії

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \qquad t \ne \tau_i,$$
$$\Delta x \big|_{t=\tau_i} = J_i(x), \qquad (11)$$

де $x \in R^n$, $t \in R_+$, $i = 1, 2, \ldots$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$, $\tau_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Ці умови неважко встановити, застосовуючи, як зазначалося вище, ряд результатів і методів робіт [6 – 9, 13, 14, 16].

Як і раніше, вважаємо, що для системи (11) виконуються умови існування та єдиності розв'язків і будь-який розв'язок $x(t, t_0, x_0)$ системи (11) визначений на інтервалі $[t_0, +\infty)$.

Нехай M — інтегральна множина системи (11). Як і вище, припустимо, що при кожному $t \in R_+$ переріз $M(t)$ множини M не порожній і міститься у компактній множині $Q \subset R^n$; $Q_{\varepsilon_0} \subseteq B_h$.

Розглянемо [9 – 12] неперервно диференційовну функцію $V(t, x)$, визначену в області $Z = \{(t, x) \colon t \in R_+, x \in Q_{\varepsilon_0}\}$, яка задовольняє такі властивості:

$$V(t, x) = 0, \quad (t, x) \in M, \qquad V(t, x) > 0, \quad (t, x) \notin M, \qquad (12)$$

$$V(t, x) \ge a(\rho(x, M(t))), \qquad (13)$$

де $a(s)$, $s \ge 0$, — неперервна зростаюча функція, $a(0) = 0$.

Припустимо, що існує таке $\mu > 0$, $0 < \mu < \varepsilon_0$, що при $x \in Q_\mu$ буде $x + + J_i(x) \in Q_{\varepsilon_0}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Теорема 3. *Якщо для системи* (11) *в області* Z *існує неперервно диференційовна функція* $V(t,x)$, *яка задовольняє умови* (12), (13) *і умови*

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \langle \operatorname{grad}_x V(t,x), F(t,x) \rangle \le 0, \tag{14}$$

$$V(\tau_i, x + J_i(x)) \le V(\tau_i, x), \quad i = 1, 2, \dots, \tag{15}$$

то множина M *є стійкою інтегральною множиною системи* (11).

У справедливості теореми легко переконатися, поєднуючи міркування, наприклад, [12] та [6].

У випадках, коли послідовність $\{\tau_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, задовольняє умову

$$\tau_{i+1} - \tau_i \ge \theta, \quad \theta > 0, \tag{16}$$

або умову

$$\tau_{i+1} - \tau_i \le \theta_1, \quad \theta_1 > 0, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{17}$$

узагальнюючи міркування [6 – 8], приходимо до наступних тверджень.

Теорема 4. *Нехай для системи* (11) *в області* Z *існує неперервно диференційовна функція* $V(t,x)$, *яка задовольняє умови* (12), (13) *і умови*

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \langle \operatorname{grad}_x V(t,x), F(t,x) \rangle \le -\varphi(V(t,x), \tag{18}$$

$$V(\tau_i, x + J_i(x)) \le \psi(V(\tau_i, x)), \quad i = 1, 2, \dots, \tag{19}$$

де $\varphi(s)$, $\psi(s)$ *— неперервні функції,* $\varphi(s) > 0$, $\psi(s) > 0$ *при* $s > 0$ *і* $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.

Припустимо, що послідовність $\{\tau_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, *задовольняє умову* (16). *Тоді*:

1) *якщо існує додатне число* a_0 *таке, що при довільному* $a \in (0, a_0]$ *справджується нерівність*

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \theta,$$

то M *— стійка інтегральна множина системи* (11);

2) *якщо існують додатні числа* a_0 і γ *такі, що для всіх* $a \in (0, a_0]$ *справджується нерівність*

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \theta - \gamma,$$

то M *— асимптотично стійка інтегральна множина системи* (11).

Теорема 5. *Нехай для системи* (11) *в області* Z *існує неперервно диференційовна функція* $V(t,x)$, *яка задовольняє умови* (12), (13) *і умови*

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \langle \operatorname{grad}_x V(t,x), F(t,x) \rangle \le \varphi(V(t,x), \tag{20}$$

$$V(\tau_i, x + J_i(x)) \le \psi(V(\tau_i, x)), \quad i = 1, 2, \dots, \tag{21}$$

де $\varphi(s)$, $\psi(s)$ *— неперервні функції,* $\varphi(s) > 0$, $\psi(s) > 0$ *при* $s > 0$ *і* $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.

Припустимо, що послідовність $\{\tau_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, *задовольняє умову* (17). *Тоді*:

1) *якщо існує додатне число* a_0 *таке, що при довільному* $a \in (0, a_0]$ *справджується нерівність*

$$\int\limits_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \theta_1,$$

то M *— стійка інтегральна множина системи* (11);

2) *якщо існують додатні числа* a_0 і γ *такі, що для довільного* $a \in (0, a_0]$ *виконується нерівність*

$$\int\limits_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \theta_1 + \gamma,$$

то інтегральна множина M *є асимптотично стійкою.*

Неважко також переконатися (див., наприклад, [13, 14]) у справедливості наступних, більш загальних, у певному розумінні, тверджень.

Теорема 6. *Нехай для системи* (11) *в області* Z *існує неперервно диференційовна функція* $V(t, x)$, *яка задовольняє умови* (12), (13) *і умови*

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \langle \operatorname{grad}_x V(t,x), F(t,x) \rangle \leq -\alpha(t)\varphi(V(t,x)),$$

$$V(\tau_i, x + J_i(x)) \leq \psi_i(V(\tau_i, x)), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

де $\alpha(t)$, $t \in R_+$, *— неперервні невід'ємна функція,* $\varphi(s)$, $\psi_i(s)$ *— неперервні функції,* $\varphi(s) > 0$, $\psi_i(s) > 0$ *при* $s > 0$ *і* $\varphi(0) = \psi_i(0) = 0$.

Тоді:

1) *якщо існує додатне число* a_0 *таке, що для всіх* $a \in (0, a_0]$ *справджуються нерівності*

$$\int\limits_{a}^{\psi_i(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \alpha(t)\,dt, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

то M *— стійка інтегральна множина системи* (11);

2) *якщо існує* a_0 *таке, що для всіх* $a \in (0, a_0]$ *справджуються нерівності*

$$\int\limits_{a}^{\psi_i(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \alpha(t)\,dt - \gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

де $\gamma_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = \infty$, *то* M *— асимптотично стійка інтегральна множина системи* (11).

Теорема 7. *Нехай для системи* (1) *в області* Z *існує неперервно диференційовна функція* $V(t, x)$, *яка задовольняє умови* (12), (13) *і умови*

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \langle \operatorname{grad}_x V(t,x), F(t,x) \rangle \leq \alpha(t)\varphi(V(t,x)),$$

$$V(\tau_i, x + J_i(x)) \leq \psi_i(V(\tau_i, x)), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

де $\alpha(t)$, $t \in R_+$, *— неперервна невід'ємна функція,* $\varphi(s)$, $\psi_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots$, *— неперервні функції,* $\varphi(s) > 0$, $\psi_i(s) > 0$ *при* $s > 0$ *і* $\varphi(0) = \psi_i(0) = 0$.

Тоді:

1) *якщо існує додатне число* a_0 *таке, що для всіх* $a \in (0, a_0]$ *справджуються нерівності*

$$\int\limits_{\psi_i(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \alpha(t)\,dt, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

то M *— стійка інтегральна множина системи* (11);

2) *якщо існує додатне число* a_0 *таке, що для всіх* $a \in (0, a_0]$ *при деяких* $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$, *справджуються нерівності*

$$\int\limits_{\psi_i(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \alpha(t)\,dt + \gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

і $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = \infty$, *то* M *— асимптотично стійка інтегральна множина системи* (11).

З теорем 4 – 7 можна одержати ще різні варіанти достатніх умов стійкості та асимптотичної стійкості інтегральної множини системи (11) для окремих випадків. Наприклад, легко переконатися, що справедливі такі теореми.

Теорема 8. *Нехай для системи* (11) *в області* Z *існує неперервно диференційовна функція* $V(t,x)$, *яка задовольняє умови* (12), (13), (18), (19).

Припустимо, що послідовність $\{\tau_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, *така, що для досить великих* t, $t > T_0 \geq t_0$,

$$\frac{i(t,t_0)}{t - t_0} \leq p, \quad p = \text{const},$$

де $i(t,t_0)$, $t \geq t_0$, *— кількість моментів імпульсного збурення на проміжку* $[t_0, t]$.

Тоді якщо при деякому $a_0 > 0$ *для всіх* $a \in (0, a_0]$

$$\int\limits_{a}^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \frac{1}{p},$$

то M *— стійка інтегральна множина системи* (11).

Теорема 9. *Нехай для системи* (11) *в області* Z *існує неперервно диференційовна функція* $V(t,x)$, *яка задовольняє умови* (12), (13), (20), (21).

Припустимо, що послідовність $\{\tau_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, *така, що для досить великих* t, $t > T_0 \geq t_0$,

$$\frac{i(t,t_0)}{t - t_0} \geq p, \quad p > 0, \quad p = \text{const}.$$

Тоді якщо при деякому $a_0 > 0$ *для всіх* $a \in (0, a_0]$

$$\int\limits_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \frac{1}{p},$$

то M *— стійка інтегральна множина системи* (11).

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 282 с.
2. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore etc.: World Sci., 1995. – 462 p.

3. *Kulev G. K., Bainov D. D.* Global stability of sets for impulsive differential systems by Lyapunov's direct method // Comput. Math. Appl. – 1990. – **19**, № 2. – P. 17 – 28.
4. *Bainov D. D., Stamova I. M.* Stability of sets for impulsive differential-difference equations with variable impulsive perturbations // Communs Appl. Nonlinear Anal. – 1998. – **5**, № 1. – P. 69 – 81.
5. *Yoshizawa T.* Stability of sets and perturbed systems // Funkc. ekvacioj. – 1962. – **5**. – P. 31 – 69.
6. *Гургула С. И., Перестюк Н. А.* О втором методе Ляпунова в системах с импульсным воздействием // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 10. – С. 11 – 14.
7. *Гургула С. И., Перестюк Н. А.* Об устойчивости решений импульсных систем // Вестн. Киев. ун-та. Математика и механика. – 1981. – Вып.23. – С. 33 – 40.
8. *Гургула С. И.* Исследование устойчивости решений импульсных систем вторым методом Ляпунова // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 1. – С. 100 – 103.
9. *Самойленко А. М.* Изучение динамических систем с помощью знакопостоянных функций // Там же. – 1972. – **24**, № 3. – С. 374 – 384.
10. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. – М.: Высш. шк., 1973. – 271 с.
11. *Булгаков Н. Г.* К устойчивости инвариантных множеств // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 2. – С. 187 – 194.
12. *Игнатьев А. О.* Применение прямого метода Ляпунова к исследованию интегральных множеств // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 10. – С. 1342 – 1348.
13. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 248 с.
14. *Liu X. Z.* Stability results for impulsive differential systems with applications to population growth models // Dynamics and Stability of Systems. – 1994. – **9**, № 2. – P. 163 – 174.
15. *Ахметов М. У., Перестюк Н. А.* Метод сравнения для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 9. – С. 1475 – 1483.
16. *Перестюк М. О., Чернікова О. С.* Про стійкість інваріантних множин розривних динамічних систем // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 1. – С. 78 – 84.

Одержано 06.06.2000,
після доопрацювання — 08.02.2001