УДК 519.21

Т. І. Ісакова, Ю. П. Філонов (Київ нац. ун-т буд-ва і архітектури)

ІНТЕГРАЛЬНІ УМОВИ ЗВОРОТНОСТІ МАРКОВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ НА ПІВПРЯМІЙ ІЗ ЗАГАЛЬНОЮ МІРОЮ НЕЗВІДНОСТІ

We present conditions of invertibility of Markov chains with values from $\mathbb{R}^+$ and general measure of irreducibility. We obtain the results by adding the method of perturbation of partial potentials to the classical method of test functions.

Наведено умови зворотності марковських ланцюгів із значеннями в $\mathbb{R}^+$ із загальною мірою незвідності. Результати одержано додаванням до класичного методу тест-функцій методу збурень часткових потенціалів.

У цій роботі будемо розглядати загальні марковські ланцюги (ξ_n) зі значеннями в $\mathbb{R}^+$. У найбільш відомих умовах зворотності основними є нерівності типу $S(x) \leq 0$, $x \geq c_0$, які виникають як наслідок використання (супер) гармонічних функцій та (супер) мартингалів, наприклад нерівність

$$M^x(\xi_1 - \xi_0) \leq 0, \quad \xi_0 = x.$$

Ці нерівності будемо замінювати не більш складними, а більш загальними типу

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+} S^+(x) < \infty, \qquad S^+(x) = \max(S(x), 0),$$

при цьому інтегрування виконується за мірою, що визначає незвідність ланцюга (в типових частинних випадках лебеговою, дискретною або їх сумою). Загальну теорію з цих питань викладено у роботах [1, 2]; в [2] наведено численну бібліографію та історичні зауваження. Наші результати ми одержимо, додавши до класичного методу тест-функцій (Ляпунова) метод збурень часткових потенціалів. Використаний нами підхід є аналітичним (для загального простору та необов'язково стохастичних ядер розглянутий у статтях [3, 4]), ймовірнісна інтерпретація якого потребує розширення ймовірнісного простору та спарювання ланцюга зі своїм збуренням.

Зауважимо, що застосування доведених нами теорем до конкретних ланцюгів часто може бути простішим, ніж застосування теорем з нерівностями, тому що для узагальнення відповідних результатів можна використовувати простіші, ніж класичні, тест-функції. Приклад — доведення наслідків 2 теорем 1, 2, де використано функцію $f(x) = \ln x$ замість функції $f(x) = \ln\ln x$, яка застосовувалась для одержання аналогічних, але менш загальних результатів (див. [2]). Це пов'язано з можливістю відкидання тих членів розкладу тест-функції, які дають інтегровні доданки в інтегральній умові зворотності і які не можна відкинути при розгляді умови типу $S(x) \leq 0$. Інтегральні умови є також у роботі [5], але застосування їх для одержання результатів, подібних до розглянутих тут, пов'язане з зайвими грубими обмеженнями та більш громіздкими викладками.

Спочатку буде використано такий тип інтегральної умови. Верхня сума при безпосередньому інтегруванні [6] деякої функції визначається як $h\sum \overline{m}_k$, де $\overline{m}_k$ — верхня межа функції $\Phi(x)$ на k-му відрізку розбиття $\mathbb{R}^+$ на відрізки довжини h. Якщо ця сума є скінченною при деякому $h > 0$, то будемо записувати $\overline{\int}\Phi(x) < \infty$. Після таких інтегральних умов будуть наведені сильніші результати (при деяких додаткових умовах, що практично не звужують сферу застосувань) у термінах інтегралів за деякою необмеженою мірою на борелівській σ-алгебрі в $\mathbb{R}^+$. Вони сильніші за типом інтеграла: наприклад,

$$\bar{\int} \sum \chi\left(n - \frac{1}{n^2} < x < n + \frac{1}{n^2}\right) = \infty,$$

а за Лебегом (і невласний за Ріманом) інтеграл тут буде скінченним.

Перейдемо до формулювання результатів. Нехай $P(x, dy)$ — перехідна ймовірність незвідного марковського ланцюга (P-ланцюга) у просторі $\mathbb{R}^+$; $f = f(x)$, $1 \le f < \infty$, — зростаюча до нескінченності функція на $\mathbb{R}^+$ з умовою незростання похідної $(\ln f)'$;

$$a(x) = M^x[f(x+\nu) - f(x)]$$

— стрибок функції f з x, де $\nu = \xi_1 - \xi_0$ — стрибок ланцюга; $a = a^+ - a^-$, де $a^+ = \max(a, 0)$ $(= a \vee 0)$. Якщо дійсний простір станів належить $\mathbb{R}^+$, то для x, які до нього не входять, покладемо $a(x) = 0$. Вважаємо інтервал $[0, x]$ скінченною сумою мінорантних множин при $x \ge c_0'$.

Сформулюємо припущення П:

імовірність хоча б раз відхилитися вліво від початкового стану $x > c_0$ за деякий фіксований час більш ніж на деяку фіксовану відстань для P-ланцюга рівномірно обмежена знизу по x.

Справедливою є така теорема.

Теорема 1. *За умови*

$$\bar{\int} \frac{a^+}{f'} < \infty$$

та зроблених припущень ланцюг є зворотним.

***Зауваження* 1.** Зворотність розуміємо як 1-зворотність. У співвідношеннях слова ψ-м. с. (тобто ψ-майже скрізь, де ψ — міра незвідності) будемо пропускати (так, у нерівності $\bar{\int} \Phi(x) < \infty$ величини $\overline{m}_k$ можна визначити через $\operatorname{ess\,sup}_{\psi}$).

***Наслідок* 1.** *За припущення* П *та за умови*

$$\bar{\int} \left(M^x \nu\right)^+ < \infty \tag{1}$$

ланцюг є зворотним. Для цілочислових ланцюгів нерівність (1) *можна замінити нерівністю* $\sum \left(M^n \nu\right)^+ < \infty$.

***Наслідок* 2.** *За умов* (ε, C – const > 0)

$$M^x \nu^2 \ln^{1+\varepsilon}(1+\nu^+) < C, \tag{2}$$

$$\bar{\int} \left(M^x \nu - \frac{1}{2x} M^x \nu^2\right)^+ < \infty \tag{3}$$

та припущення П *ланцюг є зворотним. Для цілочислових ланцюгів можна писати*

$$\sum \left(M^n \nu - \frac{1}{2n} M^n \nu^2 \right)^+ < \infty$$

замість нерівності (3).

Введемо додаткові позначення: добуток ядер

$$PQ = PQ(x, dy) = \int\limits_{u \in \mathbb{R}^+} P(x, du) Q(u, dy);$$

ядро $f \cdot \psi = f(x)\psi(dy)$ — прямий добуток функції та міри; $1_A = 1_A(x) = 1$, коли $x \in A$, і 0 — у протилежному випадку (індикатор множини A), $1 = 1_{\mathbb{R}^+}$; $J_A = J_A(x, dy)$ — діагональне ядро $\left(J_A(x, B) = 1_{A \cap B}\right)$, $J = J_{\mathbb{R}^+}$; $P^n = PP \ldots P$ (n разів), $P^0 = J$; $\Psi^2 = \Psi \cdot \Psi = \Psi(dx)\Psi(dy)$; $Pf = \int P(x, dy) f(y)$; $P[B] = P1_B = P(x, B)$; множини $x + nB = \{u \colon u = x + nb, b \in B\}$; $\Psi_{x+B} = \Psi J_{x+B}$ — звуження міри на множину $x + B$.

Перейдемо до формулювання подальших результатів. Нехай Ψ — міра на борелівській σ-алгебрі в $\mathbb{R}^+$, для якої виконуються умова рівномірної мінорантності

$$\Psi_{x+B}(dv) < C_1 \hat{G}_m(x, dv), \tag{4}$$

де $\hat{G}_m = \left(\hat{P} + \ldots + \hat{P}^m\right)$, $\hat{P} = PJ_{x+n_1 B}$ (n_1, C_1, m — const), та умова регулярності

$$\frac{\partial P}{\partial \Psi}(x, y) < C_2 \Psi_{x+B} P[y + B], \qquad \Psi^2\text{-м. с. } (C_2 = \text{const}), \tag{5}$$

B — деякий інтервал.

***Зауваження* 2.** На основі більш загальної умови регулярності

$$\frac{\partial P^{n_2}}{\partial \Psi} < C_2 \Psi_{x+B} \tilde{G}[Y + B]$$

(степінь P^{n_2} має менші нерегулярності, ніж P), де $\tilde{G}$ — фіксована (скінченна) сума степенів P, теж можна одержати подальші результати. Але умова (5), для якої достатньо виконання нерівності

$$\varepsilon \frac{\partial P}{\partial \Psi}(x, y) < \frac{\partial P}{\partial \Psi}(u, v) \tag{6}$$

на множинах мір Ψ^2, відокремлених від нуля ($> \varepsilon > 0$) в $(x + B) \times (y + B)$, в застосуваннях є достатньо очевидною за конкретною неперервністю та (чи) монотонністю $\dfrac{\partial P}{\partial \Psi}$ в околах точок (x, y). Щоб із нерівності (6) одержати (5), слід записати нерівність

$$\frac{\partial P}{\partial \Psi}(x, y) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{(x+B)\times(y+B)} \frac{\partial P}{\partial \Psi}(u, v) \Psi(du) \Psi(dv) = \frac{1}{\varepsilon^2} \Psi_{x+B} P(y + B).$$

Умова (4) означає, що P-ланцюг є незвідним за мірою Ψ.

Якщо $\Psi(\{x\})$, $\Psi(\{y\}) > 0$ (дорівнює 1, як це неявно вважається для ланцюгів із дискретним простором станів), то умова (5) є тривіальною (в (6) лише потрібно взяти $u = x$, $v = y$).

Сформулюємо таке твердження.

Теорема 2. *За припущення* П *та за умов* (4), (5), $P^*(\nu > 0) > \varepsilon > 0$, $\varepsilon = \text{const}$, $a^+ = o(f')$, $x \to \infty$, *і*

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{a^+}{f'} \Psi(dx) < \infty \tag{7}$$

ланцюг є зворотним.

***Наслідок* 1.** *За припущення* П *та за умов* (4), (5), $P^*(\nu > 0) > \varepsilon > 0$, $\varepsilon = \mathrm{const}$, *і*

$$\int_{\mathbb{R}^+} (M^x\nu)^+ d\Psi < \infty, \qquad (M^x\nu)^+ \underset{x\to\infty}{\to} 0, \tag{8}$$

ланцюг є зворотним.

***Зауваження* 3.** Якщо Ψ є сумою міри Лебега та дискретної міри $\Psi = \Psi_k$ в точках x_k, то ланцюг в умовах теореми 2 зворотний, якщо (7) замінити нерівністю

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{a^+}{f'} dx + \sum \frac{a^+(x_k)}{f'(x_k)} \Psi_k < \infty. \tag{9}$$

Зрозуміло, що в умовах наслідку 1 замість (8) буде

$$\int_{\mathbb{R}^+} (M^x\nu)^+ dx + \sum (M^{x_k}\nu)^+ \Psi_k < \infty. \tag{10}$$

Але для цілочислових ланцюгів (при $\Psi_k = 1$) замість (10) використовуємо нерівність

$$\sum_{x\in N} (M^x\nu)^+ < \infty, \tag{11}$$

і з наслідку 1 теореми 1 випливає, що в цьому випадку посилення результату не буде.

***Наслідок* 2.** *За припущення* П *та за умов* (4), (5), (2), $P^*(\nu > 0) > \varepsilon > 0$, $\varepsilon = \mathrm{const}$, *і*

$$\int_{\mathbb{R}^+} \left(M^x\nu - \frac{1}{2x} M^x\nu^2 \right)^+ d\Psi < \infty \tag{12}$$

(*де підінтегральний вираз прямує до нуля*) *ланцюг є зворотним* (*для лебегової та дискретної мір* (12) *можна замінити аналогом* (10), *але з даним підінтегральним виразом*).

Наведемо формальний приклад для ілюстрації впливу типу інтеграла та вибору міри Ψ.

Приклад. Нехай з будь-якого $x \in (n, n+1)$ (n — довільне натуральне) є стрибок у $n-1$ з імовірністю $\beta_n > 0$ і нульовим математичним сподіванням та стрибок у $n+2$ з імовірністю $1-\beta_n$ і теж з нульовим математичним сподіванням. Наприклад, стрибок із фіксованим симетричним рівномірним розподілом. З точки $x = n$ стрибок з імовірністю $1-\beta_n$ такий самий, а з імовірністю β_n — у точку $n+1$. Нехай $\beta_n / \beta_{n+1} \to 1$, $\beta_n \to 0$, $n \to \infty$. Тоді

$$\bar{\int} (M^x\nu)^+ < \infty,$$

якщо

$$\sum \beta_n < \infty, \qquad M^n\nu = \beta_n,$$