УДК 513.88

М. В. Заводовский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ АЛГЕБРАХ ТИПА ТЕМПЕРЛИ – ЛИБА, СВЯЗАННЫХ С АЛГЕБРАМИ, ПОРОЖДЕННЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ С ЗАДАННЫМ СПЕКТРОМ

We introduce and study algebras of the Temperley – Lieb type connected with algebras generated by linearly dependent generators with given spectra. We study their representations and sets of parameters, for which the representations of the algebras considered exist.

Вводяться і вивчаються алгебри типу Темперлі – Ліба, пов'язані з алгебрами, що породжені лінійно зв'язаними твірними з заданим спектром. Вивчаються їхні зображення, а також множини параметрів, при яких існують зображення цих алгебр.

Введение. В работах [1–5] введены и изучаются алгебры, порожденные линейно связанными образующими с заданным спектром, их рост, множество параметров, при которых существуют представления этих алгебр, структура представлений и так далее.

В настоящей работе, следуя схеме, предложенной в [6], вводятся алгебры типа Темперли–Либа, связанные с указанными алгебрами (п. 1). В п. 2 изучаются их представления, множества параметров, при которых существуют представления этих алгебр. Приводятся примеры (п. 3).

1. Гомоморфизмы алгебр $\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_n;\lambda}$ и $\mathcal{P}_{N_1,\ldots,N_n;abo}$. Рассмотрим n самосопряженных элементов a_i при $i = 1,\ldots,n$ со спектром $\sigma(a_i) \subseteq \subseteq \left\{x_1^{(i)},\ldots,x_{m_i}^{(i)}\right\} = M_i$, где M_i — заданные конечные множества на вещественной оси и $x_j^{(i)} < x_k^{(i)}$ при $j < k$. Пусть элементы a_i связаны соотношением $\sum_{i=1}^{n} a_i = \lambda e,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Не нарушая общности будем считать, что $x_k^{(i)} > 0,\ x_k^{(i)} \in M_i$ при любых $i = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,m_i$ и $\lambda > 0$. Каждый элемент a_i представим в виде $a_i = \sum_{k=1}^{m_i} x_k^{(i)} p_k^{(i)}$, где $p_k^{(i)}$ — проекторы, $p_k^{(i)} p_l^{(i)} = 0$ при $k \neq l,\ k, l = 1,\ldots,m_i$.

В работе [1] введена следующая алгебра, порожденная проекторами:

$$\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_n;\lambda} = \mathbb{C}\Big\langle p_1^{(1)},\ldots,p_{m_1}^{(1)}, p_1^{(2)},\ldots,p_{m_2}^{(2)},\ldots,p_1^{(n)},\ldots,p_{m_n}^{(n)} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i} x_k^{(i)} p_k^{(i)} = \lambda e,$$

$$p_k^{(i)2} = p_k^{(i)}, \quad p_k^{(i)} p_l^{(i)} = 0, \quad l,\ k = 1,\ldots,m_i, \quad l \neq k,\ i = 1,\ldots,n \Big\rangle.$$

Положим

$$N_j = \frac{1}{\lambda} M_j = \left\{\frac{x_1^{(j)}}{\lambda},\ldots,\frac{x_{m_j}^{(j)}}{\lambda}\right\}$$

при $j = 1,\ldots,n$. Введем алгебру $\mathcal{P}_{N_1,\ldots,N_n;abo}$, порожденную проекторами p и $q_k^{(i)}$ при $k = 1,\ldots,m_i,\ i = 1,\ldots,n$:

$$\mathcal{P}_{N_1,\ldots,N_n;abo} = \mathbb{C}\Big\langle q_1^{(1)},\ldots,q_{m_1}^{(1)}, q_1^{(2)},\ldots,q_{m_2}^{(2)},\ldots,q_1^{(n)},\ldots,q_{m_n}^{(n)}, p \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i} q_k^{(i)} = e,$$

© М. В. ЗАВОДОВСКИЙ, 2004

$$q_k^{(i)} p q_k^{(i)} = \frac{x_k^{(i)}}{\lambda} q_k^{(i)}, \quad k = 1, \ldots, m_i, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad q_k^{(i)} p q_l^{(i)} = 0, \quad k \neq l,$$

$$k, l = 1, \ldots, m_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad q_j^{(i)} q_k^{(l)} = 0, \quad (i, j) \neq (l, k), \quad q_k^{(i)2} = q_k^{(i)}, \quad p^2 = p \bigg\rangle.$$

В дальнейшем такие алгебры будем называть *abo*-аналогами.

Утверждение 1. *Зададим отображение*

$$\varphi_1 \colon \mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_n; \lambda} \to p \mathcal{P}_{N_1, \ldots, N_n; abo}\, p,$$

которое определяется на образующих следующим образом:

$$\varphi_1\left(p_k^{(i)}\right) = \frac{\lambda}{x_k^{(i)}} p q_k^{(i)} p.$$

Тогда отображение φ_1 *продолжается до гомоморфизма алгебр* $\mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_n; \lambda}$ *и* $\mathcal{P}_{N_1, \ldots, N_n; abo}$.

Доказательство. Проверим, что φ_1 является гомоморфизмом

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{x_k^{(i)}}{\lambda} \varphi_1\left(p_k^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_i} p q_k^{(i)} p = p,$$

$$\varphi_1\left(p_k^{(i)}\right) \varphi_1\left(p_l^{(i)}\right) = \frac{\lambda^2}{x_k^{(i)} x_l^{(i)}} p q_k^{(i)} p q_l^{(i)} p = 0, \quad k, l = 1, \ldots, m_i, \quad l \neq k, \ i = 1, \ldots, n.$$

Остальные свойства отображения φ_1 очевидны. Следовательно, φ_1 является гомоморфизмом из $\mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_n; \lambda}$ в подалгебру $p \mathcal{P}_{N_1, \ldots, N_n; abo}\, p$ алгебры $\mathcal{P}_{N_1, \ldots, N_n; abo}$.

Утверждение доказано.

Положим

$$q = \operatorname{diag}\left(p_1^{(1)}, \ldots, p_{m_1}^{(1)}, \ldots, p_1^{(n)}, \ldots, p_{m_n}^{(n)}\right) \in M_m\left(\mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_n; \lambda}\right), \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

и пусть $e_{i,j}$ — матричная единица в $M_m\left(\mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_n; \lambda}\right)$.

Утверждение 2. *Зададим отображение*

$$\varphi_2 \colon \mathcal{P}_{N_1, \ldots, N_n; abo} \to q M_m\left(\mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_n; \lambda}\right) q,$$

которое определяется на образующих следующим образом:

$$\varphi_2\left(q_k^{(i)}\right) = p_k^{(i)} \otimes e_{k+t_i, k+t_i},$$

$$\varphi_2(p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_j} \frac{\sqrt{x_k^{(i)} x_l^{(j)}}}{\lambda} p_k^{(i)} p_l^{(j)} \otimes e_{k+t_i, l+t_j},$$

где $t_i = \sum_{j<i} m_j$. *Тогда отображение* φ_2 *продолжается до гомоморфизма алгебр* $\mathcal{P}_{N_1, \ldots, N_n; abo}$ *и* $q M_m\left(\mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_n; \lambda}\right) q$.

Доказательство. Покажем, что отображение φ_2 является гомоморфизмом

$$\varphi_2\left(q_k^{(i)}\right) \varphi_2(p) \varphi_2\left(q_k^{(i)}\right) = \frac{x_k^{(i)}}{\lambda} p_k^{(i)} \otimes e_{k+t_i, k+t_i} = \frac{x_k^{(i)}}{\lambda} \varphi_2\left(q_k^{(i)}\right),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\varphi_2\left(q_k^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}p_k^{(i)}\otimes e_{k+t_i,\,k+t_i} = q.$$

При $k\neq l,\ k,l=1,\ldots,m_i$

$$\varphi_2\left(q_k^{(i)}\right)\varphi_2(p)\varphi_2\left(q_l^{(i)}\right) = \frac{\sqrt{x_k^{(i)}x_l^{(i)}}}{\lambda}p_k^{(i)}p_l^{(i)}\otimes e_{k+t_i,\,k+l_i} = 0.$$

Остальные свойства гомоморфизма очевидны.

***Замечание* 1.** Если в алгебрах $\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_n;\lambda}$ и $\mathcal{P}_{N_1,\ldots,N_n;abo}$ введена инволюция, то построенные выше гомоморфизмы φ_1 и φ_2 являются $*$-гомоморфизмами этих $*$-алгебр.

2. Эквивалентность категорий представлений $\mathbf{Rep}\,\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_n;\lambda}$ и $\mathbf{Rep}\,\mathcal{P}_{N_1,\ldots,N_n;abo}$. С помощью гомоморфизмов φ_1 и φ_2 алгебр построим соответствующие функторы на категориях представлений (см. [6]).

Пусть задан гомоморфизм алгебр $\varphi:\mathcal{A}_1\to\mathcal{A}_2$, тогда можно определить функтор $F:\operatorname{Rep}\mathcal{A}_2\to\operatorname{Rep}\mathcal{A}_1$ по правилу $F(\pi)=\pi\circ\varphi$ и $F(K)=K$, где $\pi\in$ $\in Ob(\operatorname{Rep}\mathcal{A}_2)$ и K — морфизм в категории $\operatorname{Rep}\mathcal{A}_2$.

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, q — идемпотент в $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{B}=q\,\mathcal{A}\,q$ — подалгебра в A с единицей q. Можно определить представление $\hat{\pi}\in\operatorname{Rep}\mathcal{B}$ в пространстве $\operatorname{Im}\pi(q)$, полагая $\hat{\pi}(x)=\pi(x)\,|\,\operatorname{Im}\pi(q)$ для всех $x\in\mathcal{B}$. Если K — сплетающий оператор между представлениями π_1 и π_2, то $K\,|\,\operatorname{Im}\pi(q)$ — сплетающий оператор между представлениями $\hat{\pi}_1$ и $\hat{\pi}_2$. Т. е. получили функтор между категориями $\operatorname{Rep}\mathcal{A}$ и $\operatorname{Rep}\mathcal{B}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $\pi:\mathcal{A}\to L(H)$ — представление в пространстве H. Построим функтор $F:\operatorname{Rep}\mathcal{A}\to\operatorname{Rep}M_n(\mathcal{A})$ (где $M_n(\mathcal{A})=\mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C})$ — алгебра матриц над $\mathcal{A}$). Определим представление $\tilde{\pi}:M_n(\mathcal{A})\to L(H\oplus\ldots$ $\ldots\oplus H)$, положив $\tilde{\pi}(a\otimes b)=\pi(a)\otimes b$, где $a\in\mathcal{A}$ и $b\in M_n(\mathcal{A})$. Тогда, полагая $F(\pi)=\tilde{\pi}$ и $F(K)=K\otimes I_n$, где K — морфизм в категории $\mathcal{A}$ и I_n — единичный оператор в $M_n(\mathcal{A})$, получаем функтор между категориями представлений.

Пусть даны две алгебры: $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Пусть q — идемпотент в $M_n(\mathcal{A}_2)$. Если задан гомоморфизм алгебр $\varphi:\mathcal{A}_1\to q\,M_n(\mathcal{A}_2)q$, то легко получить функтор $F_\varphi:\operatorname{Rep}\mathcal{A}_2\to\operatorname{Rep}\mathcal{A}_1$. Если $\pi:\mathcal{A}_2\to L(H)$, то $F_\varphi(\pi):\mathcal{A}_1\to L(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H}=\pi(q)(H\oplus\ldots\oplus H)$. Алгебру $L(\mathcal{H})$ будем отождествлять с подалгеброй в $L(H\oplus\ldots\oplus H)$, состоящей из операторов A таких, что $\pi(q)A=A\pi(q)=A$, посредством изоморфизма $C\to C\pi(q)$ для всех $C\in L(\mathcal{H})$. Если K — морфизм в категории $\mathcal{A}$, то $F_\varphi(K)=(K\otimes I_n)\,\pi(q)$.

Функтор $F:\mathcal{R}\to\mathcal{S}$ между категориями $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$ называется унивалентным (строгим), если для любой пары объектов $A,B\in\mathcal{R}$ отображение $F_{A,B}:$ $\operatorname{Mor}_{\mathcal{R}}(A,B)\to\operatorname{Mor}_{\mathcal{S}}(F(A),F(B))$, при котором $\alpha\to F(\alpha)$, является вложением. Функтор $F:\mathcal{R}\to\mathcal{S}$ между категориями $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$ называется полным, если для любой пары объектов $A,B\in\mathcal{R}$ отображение $F_{A,B}:\operatorname{Mor}_{\mathcal{R}}(A,B)\to$ $\to\operatorname{Mor}_{\mathcal{S}}(F(A),F(B))$ является наложением. Полный унивалентный функтор $F:\mathcal{R}\to\mathcal{S}$ такой, что каждый объект $\mathcal{B}\in\mathcal{S}$ изоморфен некоторому объекту $F(A)$, где $A\in\mathcal{R}$, является эквивалентностью категорий.

Утверждение 3. *Функтор* $F_{\varphi_2}:\operatorname{Rep}\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_n;\lambda}\to\operatorname{Rep}\mathcal{P}_{N_1,\ldots,N_n;abo}$, *порожденный гомоморфизмом* φ_2, *является полным и унивалентным.*

Доказательство. Пусть $\pi : \mathcal{P}_{M_1,\dots,M_n;\lambda} \to L(H)$ и $\pi_1 : \mathcal{P}_{M_1,\dots,M_n;\lambda} \to L(H_1)$ — два представления, $C : H \to H_1$ и $D : H \to H_1$ — два сплетающих оператора: $C\pi(x) = \pi_1(x)C$ и $D\pi(x) = \pi_1(x)D$ для всех $x \in \mathcal{P}_{M_1,\dots,M_n;\lambda}$. Тогда $F_{\varphi_2}(C) = (C \otimes I_m)\pi(q)$, а $F_{\varphi_2}(D) = (D \otimes I_m)\pi(q)$, где оператор q задан матрицей $q = \operatorname{diag}\left(p_1^{(1)}, \dots, p_{m_1}^{(1)}, \dots, p_1^{(n)}, \dots, p_{m_n}^{(n)}\right)$.

Предположим, что $F_{\varphi_2}(C) = F_{\varphi_2}(D)$, т. е. $(C \otimes I_m)\pi(q) = (D \otimes I_m)\pi(q)$. Тогда $C\pi\left(p_j^{(i)}\right) = D\pi\left(p_j^{(i)}\right)$. Поскольку операторы $\pi\left(p_j^{(i)}\right)$ образуют разложение единицы, то $C = D$. Следовательно, функтор F_{φ_2} унивалентен.

Пусть оператор $R \in L(H \oplus \dots \oplus H)$ сплетает представления $F_{\varphi_2}(\pi)$ и $F_{\varphi_2}(\pi_1)$: $RF_{\varphi_2}(\pi) = F_{\varphi_2}(\pi_1)R$, $R\pi(q) = \pi_1(q)R = R$, и задается матрицей $\left(r_{ij}^{(k)}\right)_{i,j,k}$. Тогда $r_{kj}^{(i)}\pi\left(p_j^{(i)}\right) = r_{kj}^{(i)}$, $\pi_1\left(p_j^{(i)}\right)r_{jk}^{(i)} = r_{jk}^{(i)}$ для всех i, j. Поскольку $RF_{\varphi_2}(\pi)\left(q_j^{(i)}\right) = F_{\varphi_2}(\pi_1)\left(q_j^{(i)}\right)R$, то $r_{kj}^{(i)}\pi\left(p_j^{(i)}\right) = 0$ и $\pi_1\left(p_j^{(i)}\right)r_{jk}^{(i)} = 0$, если $k \neq j$. Следовательно, $r_{kj}^{(i)} = 0$ при $k \neq j$.

Из равенства $RF_{\varphi_2}(\pi)(p) = F_{\varphi_2}(\pi_1)(p)R$ получаем $r_{jj}^{(i)}\pi\left(p_j^{(i)}\right)\pi\left(p_l^{(k)}\right) = \pi_1\left(p_j^{(i)}\right)\pi_1\left(p_l^{(k)}\right)r_{ll}^{(k)}$ для всех i, j, k, l. Но тогда $r_{jj}^{(i)}\pi\left(p_l^{(k)}\right) = \pi_1\left(p_j^{(i)}\right)r_{ll}^{(k)}$. Положим $r = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} x_j^{(i)} r_{jj}^{(i)}$. Тогда, суммируя сначала по k и l, а затем по i и j, получаем $\lambda r_{jj}^{(i)} = r\pi\left(p_j^{(i)}\right) = \pi_1\left(p_j^{(i)}\right)r$. Следовательно, оператор r сплетает представления π и π_1, а $R = F_{\varphi_2}\left(\frac{1}{\lambda}r\right)$. Таким образом, F_{φ_2} — полный функтор.

Замечание 2. Если категория представлений $\operatorname{Rep}\mathcal{P}_{N_1,\dots,N_n;\,abo}$ образована операторами, сплетающими только конечномерные представления алгебры, то для полноты функтора F_{φ_2} условия ортогональности

$$q_j^{(i)} q_k^{(l)} = 0 \quad \text{для} \quad (i,j) \neq (l,k)$$

в определении abo-аналога не являются необходимыми, так как ортогональность выполняется автоматически (см., например, [7]). Но если (как в [6]) категорию Rep образуют все представления ограниченными операторами в гильбертовом пространстве, то при $n \geq 5$ эти условия необходимы (см. [8]).

Утверждение 4. *Для любого представления* $\pi \in \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{M_1,\dots,M_n;\lambda}$ π *эквивалентно* $F_{\varphi_1} \circ F_{\varphi_2}(\pi)$.

Доказательство. Пусть $\pi \in \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{M_1,\dots,M_n;\lambda}$. Обозначим $P_j^{(i)} = \pi\left(p_j^{(i)}\right)$, $\tilde{P}_j^{(i)} = F_{\varphi_1} \circ F_{\varphi_2}(\pi)\left(p_j^{(i)}\right)$. Представление $F_{\varphi_1} \circ F_{\varphi_2}(\pi)\left(p_j^{(i)}\right) \in L(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H} = E(H \oplus \dots \oplus H)$ и $E = \left(\frac{\sqrt{x_k^{(i)}x_l^{(j)}}}{\lambda}P_k^{(i)}P_l^{(j)}\right)_{k,l,i,j}$ — идемпотент. Тогда

$$\tilde{P}_j^{(i)} = \frac{1}{\lambda}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_r}\sum_{l=1}^{m_s}\sqrt{x_k^{(r)}x_l^{(s)}}\,P_k^{(r)}P_j^{(i)}P_l^{(s)} \otimes e_{k+t_r,\,l+t_s}.$$

Положим

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\sqrt{x_1^{(1)}}P_1^{(1)}, \dots, \sqrt{x_{m_1}^{(1)}}P_{m_1}^{(1)}, \dots, \sqrt{x_1^{(n)}}P_1^{(n)}, \dots, \sqrt{x_{m_n}^{(n)}}P_{m_n}^{(n)}\right),$$

тогда $vv^* = 1$ и $v^*v = E$. Следовательно, v — изоморфизм пространства $\mathcal{H}$ на пространство H. Для всех $i = 1, \ldots, n$ и $j = 1, \ldots, m_i$ выполняется равенство $v^* P_j^{(i)} v = \tilde{P}_j^{(i)}$. Значит, представления π и $F_{\varphi_1} \circ F_{\varphi_2}(\pi)$ эквивалентны.

Утверждение 5. *Функтор* F_{φ_1} *осуществляет эквивалентность категорий представлений* $\operatorname{Rep} \mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_n; \lambda}$ *и* $\operatorname{Rep} \mathcal{P}_{N_1, \ldots, N_n; abo}$.

Доказательство. Покажем, что функтор F_{φ_1} полный и унивалентный. Пусть оператор R сплетает представления $F_{\varphi_1}(\pi)$ и $F_{\varphi_1}(\pi_1)$. Пусть $P = \pi(p)$, $Q_j^{(i)} = \pi\left(q_j^{(i)}\right)$ и $P' = \pi_1(p)$, $Q_j'^{(i)} = \pi_1\left(q_j^{(i)}\right)$. Тогда $RPQ_j^{(i)}P = P'Q_j'^{(i)}P'R$ и $RP = P'R = R$, следовательно, $RQ_j^{(i)}P = P'Q_j'^{(i)}R$ и $\dfrac{x_j^{(i)}}{\lambda} RQ_j^{(i)} = P'Q_j'^{(i)}RQ_j^{(i)}$. Просуммировав по i и j, получим

$$R = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\lambda}{x_j^{(i)}} P'Q_j'^{(i)}RQ_j^{(i)}.$$

Аналогично получаем равенство $Q_j'^{(i)}RQ_j^{(i)}P = \dfrac{x_j^{(i)}}{\lambda} Q_j'^{(i)}R$, тогда

$$R = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\lambda}{x_j^{(i)}} Q_j'^{(i)}RQ_j^{(i)}P.$$

Положим

$$r = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\lambda}{x_j^{(i)}} Q_j'^{(i)}RQ_j^{(i)}.$$

Тогда $rQ_j^{(i)} = Q_j'^{(i)}r$. Кроме того, $rP = R$ и $P'r = R$, значит, $rP = P'r$. Таким образом, оператор r сплетает представления π и π_1, $R = F_{\varphi_1}(r)$. Следовательно, функтор F_{φ_1} полный.

Пусть $\pi \in \operatorname{Rep}\left(\mathcal{P}_{N_1, \ldots, N_n; abo}, H\right)$, $\pi_1 \in \operatorname{Rep}\left(\mathcal{P}_{N_1, \ldots, N_n; abo}, H_1\right)$, $C, D : H \to \to H_1$ — сплетающие операторы, т. е. $C\pi(x) = \pi_1(x)C$ и $D\pi(x) = \pi_1(x)D$ для всех $x \in \mathcal{P}_{N_1, \ldots, N_n; abo}$. Тогда $F_{\varphi_1}(C) = C \,|\, \operatorname{Im} P$, $F_{\varphi_1}(D) = D \,|\, \operatorname{Im} P$. Допустим, что $F_{\varphi_1}(C) = F_{\varphi_1}(D)$, тогда $CP = DP$. Поскольку C — сплетающий оператор, то $CQ_j^{(i)} = Q_j'^{(i)}C$. Рассмотрим

$$CQ_j^{(i)}PQ_j^{(i)} = Q_j'^{(i)}CPQ_j^{(i)} = Q_j'^{(i)}DPQ_j^{(i)} = DQ_j^{(i)}PQ_j^{(i)}.$$

Используя определяющие соотношения, получаем $CQ_j^{(i)} = DQ_j^{(i)}$. Так как $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} Q_j^{(i)} = I$, то $C = D$. Следовательно, функтор F_{φ_1} унивалентен. Поскольку представление $F_{\varphi_1} \circ F_{\varphi_2}(\pi)$ эквивалентно представлению π для любого $\pi \in \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_n; \lambda}$, каждый объект π из категории $\operatorname{Rep} \mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_n; \lambda}$ эквивалентен объекту $F_{\varphi_1}(\pi_1)$, где $\pi_1 \in \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{N_1, \ldots, N_n; abo}$. Следовательно, функтор F_{φ_1} осуществляет эквивалентность категорий.

Утверждение 6. *Для любого представления* $\pi \in \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{N_1, \ldots, N_n; abo}$ π *эквивалентно* $F_{\varphi_2} \circ F_{\varphi_1}(\pi)$.

Доказательство. Пусть $\pi \in \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_n; \lambda}$. Тогда представление $F_{\varphi_1} \circ \circ F_{\varphi_2} \circ F_{\varphi_1}(\pi)$ эквивалентно представлению $F_{\varphi_1}(\pi)$ (см. утверждение 4). Поскольку F_{φ_1} является эквивалентностью категорий $\operatorname{Rep} \mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_n; \lambda}$ и $\operatorname{Rep} \mathcal{P}_{N_1, \ldots, N_n; abo}$ (утверждение 5), представления π и $F_{\varphi_2} \circ F_{\varphi_1}(\pi)$ эквивалентны.

Легко убедиться, что

$$\left(F_{\varphi_2} \circ F_{\varphi_1} \pi\right)\left(q_j^{(i)}\right) = \frac{\lambda}{x_j^{(i)}} P Q_j^{(i)} P \otimes e_{j+t_i, j+t_j},$$

$$\left(F_{\varphi_2} \circ F_{\varphi_1} \pi\right)(p) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_j} \frac{1}{\sqrt{x_k^{(i)} x_l^{(j)}}} P Q_k^{(i)} P Q_l^{(j)} P \otimes e_{k+t_i, l+t_j}.$$

Из доказанных выше утверждений следует такое утверждение.

Утверждение 7. *Функторы* F_{φ_1} *и* F_{φ_2} *— взаимно обратные эквивалентности.*

Введем следующие множества:

$$W_{M_1, \ldots, M_n} = \left\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_n; \lambda} \neq \varnothing\right\},$$

$$\tilde{W}_{N_1, \ldots, N_n} = \left\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{N_1, \ldots, N_n; abo} \neq \varnothing\right\}.$$

Другими словами, W_n — множество действительных чисел, при которых существуют представления алгебры $\mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_n; \lambda}$. А $\tilde{W}_n$ — множество действительных чисел, при которых существуют представления алгебры $\mathcal{P}_{N_1, \ldots, N_n; abo}$.

Из доказанных выше утверждений следует, что множество параметров, при которых существуют представления алгебры $\mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_n; \lambda}$ (при $\lambda > 0$), совпадает с множеством параметров, при которых существуют представления алгебры $\mathcal{P}_{N_1, \ldots, N_n; abo}$. Другими словами, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 8. $W_{M_1, \ldots, M_n} = \tilde{W}_{N_1, \ldots, N_n} \cup \{0\}$.

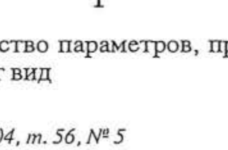
3. Примеры. С каждой алгеброй $\mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_n; \lambda}$ можно связать граф, который состоит из одной корневой вершины и n ветвей. Каждая i-я ветка состоит из $\operatorname{Card}(M_i) - 1$ вершин, которые отмечены точками из M_n по убыванию от корневой вершины.

Рассмотрим несколько примеров.

***Пример* 1.** Пусть $M_1 = M_2 = M_3 = \{0, 1\}$, $M_4 = \{0, 1, 2\}$. Положим

$$\mathcal{P}_{M_1, M_2, M_3, M_4; \lambda} = \mathbb{C}\left\langle p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, p_1^{(3)}, p_1^{(4)}, p_2^{(4)} \,\middle|\, p_1^{(4)} p_2^{(4)} = p_2^{(4)} p_1^{(4)} = 0, \right.$$
$$\left. p_1^{(1)} + p_1^{(2)} + p_1^{(3)} + p_1^{(4)} + 2 p_2^{(4)} = \lambda e,\ p_j^{(i)2} = p_j^{(i)} \right\rangle.$$

Этой алгебре соответствует граф



В [3] показано, что множество параметров, при которых существуют представления этой алгебры, имеет вид

$$W_{M_1, M_2, M_3, M_4} = \Lambda_4 \cup [2, 3] \cup (5 - \Lambda_4),$$

где

$$\Lambda_n = \left\{ \frac{n - \sqrt{n^2 - 4n}\,\mathrm{cth}\left(k\,\mathrm{Arch}\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\right)}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда *abo*-аналогом для этой алгебры будет

$$\mathcal{P}_{N_1, N_2, N_3, N_4: abo} = \mathbb{C}\Big\langle q_1^{(1)}, q_1^{(2)}, q_1^{(3)}, q_1^{(4)}, q_2^{(4)}, p \,\Big|\, q_j^{(i)2} = q_j^{(i)},\ p^2 = p,$$

$$q_2^{(4)} p q_2^{(4)} = \frac{2}{\lambda} q_2^{(4)},\ q_1^{(i)} p q_1^{(i)} = \frac{1}{\lambda} q_1^{(i)},\ i = 1, 2, 3, 4,\ q_1^{(4)} p q_2^{(4)} = q_2^{(4)} p q_1^{(4)} = 0,$$

$$q_j^{(i)} q_k^{(l)} = 0,\ (i, j) \neq (l, k),\ q_1^{(1)} + q_1^{(2)} + q_1^{(3)} + q_1^{(4)} + q_2^{(4)} = e\Big\rangle.$$

Из утверждения 8 получаем следствие.

***Следствие* 1.** *Множество параметров, при которых существуют представления алгебры* $\mathcal{P}_{N_1, N_2, N_3, N_4: abo}$, *имеет вид*

$$\widetilde{W}_{N_1, N_2, N_3, N_4} = (\Lambda_4 \cup [2, 3] \cup (5 - \Lambda_4)) \setminus \{0\},$$

где

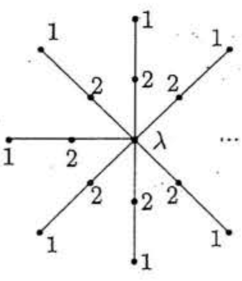
$$\Lambda_n = \left\{ \frac{n - \sqrt{n^2 - 4n}\,\mathrm{cth}\left(k\,\mathrm{Arch}\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\right)}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

***Пример* 2.** Пусть дана $*$-алгебра, порожденная $2n$ проекторами, причем $M_1 = \ldots = M_n = \{0, 1, 2\}$. Тогда

$$\mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_n; \lambda} =$$

$$= \mathbb{C}\left\langle p_1^{(i)}, p_2^{(i)} (i = 1, \ldots, n) \,\middle|\, p_j^{(i)2} = p_j^{(i)},\ p_1^{(i)} p_2^{(i)} = p_2^{(i)} p_1^{(i)} = 0,\ \sum_{i=1}^{n} \left(p_1^{(i)} + 2p_2^{(i)}\right) = \lambda e \right\rangle.$$

Этой алгебре соответствует граф



В [3] доказано, что множество параметров λ, при которых существуют представления этой алгебры, имеет вид

$$W_{M_1, \ldots, M_n} = ([0, 2] \cap \Sigma_n) \cup [2, 2n - 2] \cup (2n - ([0, 2] \cap \Sigma_n)) =$$

$$= \Lambda_n^{(0)} \cup \Lambda_n^{(1)} \cup \left[n - \frac{n + \sqrt{n^2 - 4n}}{2}, n + \frac{n + \sqrt{n^2 - 4n}}{2} \right] \cup \left(2n - \Lambda_n^{(0)}\right) \cup \left(2n - \Lambda_n^{(1)}\right),$$

где

$$\Lambda_n^{(i)} = \left\{ i,\ 1+\frac{1}{n-1-i},\ 1+\frac{1}{n-2-\dfrac{1}{n-1-i}},\ 1+\frac{1}{n-2-\dfrac{1}{n-2-\dfrac{1}{n-1-i}}}, \ldots \right\}$$

для $i = 0, 1$ и $n \in \mathbb{N}$,

$$\Sigma_n = \left\{ \Lambda_n^{(0)}, \Lambda_n^{(1)}, \left[\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}, \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2} \right], n-\Lambda_n^{(0)}, n-\Lambda_n^{(1)} \right\}.$$

Тогда abo-аналогом для $*$-алгебры $\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_n;\lambda}$ будет

$$\mathcal{P}_{N_1,\ldots,N_n;\,abo} = \mathbb{C}\Big\langle p, q_1^{(i)}, q_2^{(i)}, i=1,\ldots,n \,\Big|\, p^2 = p, q_1^{(i)2} = q_2^{(i)},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(q_1^{(i)} + q_2^{(i)}\right) = e,\ \ q_1^{(i)} p q_1^{(i)} = \frac{1}{\lambda} q_1^{(i)}, q_2^{(i)} p q_2^{(i)} = \frac{2}{\lambda} q_2^{(i)}, q_1^{(i)} p q_2^{(i)} = q_2^{(i)} p q_1^{(i)} = 0,$$

$$q_j^{(i)} q_k^{(l)} = 0, \quad (i,j) \neq (l,k) \Big\rangle,$$

где $N_1 = \ldots = N_n = \left\{0, \frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda}\right\}$.

Из утверждения 8 непосредственно получаем описание множества параметров λ для abo-аналога этой алгебры, при которых существуют ее представления.

***Следствие* 2.** *Множество параметров* $\tilde{W}_{N_1,\ldots,N_n}$ *при* $n \geq 4$ *имеет вид*

$$\tilde{W}_{N_1,\ldots,N_n} = ((0,2] \cap \Sigma_n) \cup [2, 2n-2] \cup (2n - ((0,2] \cap \Sigma_n)).$$

Автор искренне признателен Ю. С. Самойленко за постановку задачи и полезные замечания в ходе работы.

1. *Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* Когда сумма идемпотентов или проекторов кратна единице // Функцион. анализ и его прил. – 2000. – **34**, вып. 4. – С. 91–93.
2. *Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* Когда скалярный оператор представляется суммой проекторов // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 7. – С. 939–952.
3. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // Функцион. анализ и его прил. – 2002. – **36**, вып. 3. – С. 20–35.
4. *Меллит А. С., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* Когда сумма частичных отображений кратна единичному оператору // Там же. – 2004. – **38**, вып. 2. – С. 17–19.
5. *Власенко М. А., Меллит А. С., Самойленко Ю. С.* Об алгебрах, порожденных линейно связанными образующими с заданным спектром // Там же. – вып. 4. – С. 12–23.
6. *Попович С. В., Самойленко Ю. С.* О гомоморфизмах алгебр, порожденных проекторами, и функторах Кокстера // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 9. – С. 1224–1237.
7. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ в задачах. – М.: Наука, 1969. – 475 с.
8. *Ehrhardt T., Rabanovich V., Samoilenko Yu., Silbermann B.* On the decomposition of the identity into a sum of idempotents // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2001. – **7**, № 2. – P. 1–6.

Получено 29.05.2003