УДК 519.21

А. А. Дороговцев (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О СЛУЧАЙНЫХ МЕРАХ НА ПРОСТРАНСТВЕ ТРАЕКТОРИЙ И СИЛЬНЫХ И СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

We investigate stationary random measures on spaces of sequences or functions. We suggest a new definition of the strong solution of a stochastic equation. We prove that the existence of weak solution in ordinary sense is equivalent to the existence of strong measure-valued solution.

Досліджуються стаціонарні випадкові міри на просторах послідовностей або функцій. Запропоновано нове означення сильного розв'язку стохастичного рівняння. Доведено, що існування слабкого розв'язку у звичайному сенсі є еквівалентним існуванню сильного мірозначного розв'язку.

1. Введение. Пусть $(\mathfrak{X}, \rho)$ — сепарабельное полное метрическое пространство, $C = C(\mathbb{R}, \mathfrak{X})$ — пространство непрерывных функций, действующих из $\mathbb{R}$ в $\mathfrak{X}$ с метрикой

$$\tilde{\rho}(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varphi\Big(\max_{[-k,k]} \rho(f(t), g(t))\Big).$$

Здесь $\varphi(r) = r(1+r)^{-1}$ для $r \geq 0$. С такой метрикой C является полным сепарабельным метрическим пространством. Одним из основных объектов исследования в данной статье являются случайные вероятностные меры на C. Приведем соответствующее определение. Обозначим через $\mathfrak{A}$ σ-алгебру борелевских подмножеств пространства C. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство.

Определение 1. *Случайной мерой на* C *называется функция* $\mu : \Omega \times \mathfrak{A} \to [0; 1]$ *такая, что*:

1) *при любом фиксированном* $\omega \in \Omega$ $\mu(\omega, \cdot)$ — *вероятностная мера на* $\mathfrak{A}$;
2) *при любом фиксированном* $\Delta \in \mathfrak{A}$ $\mu(\cdot, \Delta)$ — *случайная величина.*

Рассмотрение случайных мер на пространстве функций связано с тем, что такие меры могут быть использованы в качестве средства описания эволюции массы на исходном фазовом пространстве $\mathfrak{X}$ [1, 2]. В подтверждение приведем следующий пример.

***Пример* 1.** Пусть $\mathfrak{X}$ — это $\mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой. Рассмотрим две динамические системы в $\mathfrak{X}$, заданные дифференциальными уравнениями

$$dx_1(t) = 0dt, \qquad dx_2(t) = Tx_2(t)dt,$$

где T — матрица вида

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Движение частиц пространства, соответствующее первому уравнению, тривиально, — они все остаются неподвижными. Движение частиц пространства, соответствующее второму уравнению, — это вращение с постоянной скоростью вокруг начала координат. Рассмотрим на $\mathfrak{X}$ начальное распределение массы, равное нормальному закону с нулевым средним и единичной матрицей ковариаций. Тогда и при движении частиц пространства согласно первому уравнению, и при движении частиц пространства согласно второму уравнению распределение массы неизменно. Ясно, что сейчас полную картину перемещения массы дают конечномерные распределения, т. е. совместные распределения массы при различных конечных наборах моментов времени. Такое семейство конечномерных распределений естественно заменить одной мерой на пространстве C.

В данной работе рассматриваются стационарные случайные меры на C. Для формулировки соответствующего определения понадобится понятие случайных мер, совпадающих по распределению.

Определение 2. *Случайные меры μ_1 и μ_2 на пространстве C совпадают по распределению, если для произвольного конечного набора множеств $\Delta_1, \ldots, \Delta_n \in \mathfrak{A}$ случайные векторы $(\mu_1(\Delta_1), \ldots, \mu_1(\Delta_n))$ и $(\mu_2(\Delta_1), \ldots, \mu_2(\Delta_n))$ имеют одинаковые распределения.*

***Замечание* 1.** Определение 2 можно переформулировать в терминах интегралов от ограниченных измеримых функций на C по мерам μ_1 и μ_2. Эквивалентное определение формулируется следующим образом.

Определение 2′. *Случайные меры μ_1 и μ_2 на пространстве C совпадают по распределению, если для произвольной ограниченной измеримой функции $f\colon C \to \mathbb{R}$ интегралы*

$$\int_C f(u)\mu_i(du), \quad i = 1, 2,$$

имеют одинаковые распределения.

***Замечание* 2.** То, что интеграл от измеримой функции по случайной мере является случайной величиной, проверяется стандартно и поэтому используется без доказательства.

Пусть теперь отображение

$$C \ni u \to u_t \in C,$$

$$u_t(s) = u(s+t), \quad s \in \mathbb{R},$$

является отображением сдвига на C. Это измеримая биекция на C. Поэтому для произвольной случайной меры μ ее образ μ^t при сдвиге в C также является случайной мерой.

Сформулируем основное определение работы.

Определение 3. *Случайная мера μ на C называется стационарной, если для произвольного $t \in \mathbb{R}$ случайные меры μ и μ^t одинаково распределены.*

Аналогичным образом определяются случайные меры на $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, сдвиги случайных мер на $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ и стационарные случайные меры на $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

Одна из целей настоящей статьи состоит в описании структуры стационарных мер и построении нетривиальных примеров таких мер. Оказывается, что случайные меры на пространствах функций естественным образом возникают при построении решений стохастических дифференциальных и разностных уравнений. В случаях, когда отсутствует сильное решение (т. е. решение, являющееся функционалом от исходного потока случайных возмущений), случайная мера может быть использована как его заменитель. Статья состоит из двух частей. В первой исследуется структура случайных стационарных мер и приводятся соответствующие примеры. Вторая часть посвящена использованию случайных мер вместо сильного решения стохастического уравнения.

2. Стационарные случайные меры на C. Следующая теорема доставляет примеры стационарных случайных мер.

Теорема 1. *Пусть на вероятностном пространстве существует группа $(T_t; t \in \mathbb{R})$ измеримых отображений, а на произведении пространств Ω и C*

(с σ-алгеброй, натянутой на произведение σ-алгебр в Ω и C) — вероятностная мера $\tilde{P}$ такие, что:

1) *отображение*

$$\Omega \times C \ni (\omega, u) \mapsto (T_t(\omega), u_t)$$

сохраняет меру $\tilde{P}$ при каждом $t \in \mathbb{R}$;

2) *проекция меры $\tilde{P}$ на Ω совпадает с P;*

3) *σ-алгебра $\mathcal{F}$ счетнопорожденная.*

Тогда семейство $\{\mu_\omega, \omega \in \Omega\}$ условных мер меры $\tilde{P}$ относительно Ω является стационарной случайной мерой на C.

***Замечание* 3.** Группа $\{T_t; t \in \mathbb{R}\}$ является аддитивной по индексу t, т. е. $T_{t+s} = T_t \circ T_s$ для всех t и $s \in \mathbb{R}$. Кроме того, σ-алгебра случайных событий $\mathcal{F}$ предполагается счетнопорожденной, что естественно и обеспечивает существование регулярной условной вероятности.

Доказательство. Рассмотрим измеримое множество Γ в $\Omega \times C$. Для произвольного $t \in \mathbb{R}$ обозначим через Γ^t сдвиг Γ, т. е. множество вида $\Gamma^t = \{(\omega, u_t) : (\omega, u) \in \Gamma\}$. Кроме того, обозначим для каждого $\omega \in \Omega$ через Γ_ω сечение множества Γ:

$$\Gamma_\omega = \{u : (\omega, u) \in \Gamma\}.$$

В силу определения условных мер

$$\tilde{P}(\Gamma^t) = \int_\Omega \mu_\omega^{-t}(\Gamma_\omega) P(d\omega).$$

С другой стороны,

$$\tilde{P}(\Gamma^t) = \tilde{P}\left(\left\{(\omega, u) : (T_{-t}(\omega), u_{-t}) \in \Gamma^t\right\}\right) = \tilde{P}(\{(\omega, u) : (T_{-t}(\omega), u) \in \Gamma\}) =$$

$$= \int_\Omega \mu_\omega(\{u : (T_{-t}(\omega), u) \in \Gamma\}) P(d\omega) = \int_\Omega \mu_{T_t(\omega)}(\{u : (\omega, u) \in \Gamma\}) P \circ T_t(d\omega) =$$

$$= \int_\Omega \mu_{T_t(\omega)}(\Gamma_\omega) P(d\omega).$$

В последнем равенстве использовано то обстоятельство, что из-за условия теоремы преобразования $\{T_t; t \in \mathbb{R}\}$ сохраняют меру P. Таким образом, для произвольного измеримого $\Gamma \subset \Omega \times C$ справедливо равенство

$$\int_\Omega \mu_\omega^{-t}(\Gamma_\omega) P(d\omega) = \int_\Omega \mu_{T_t(\omega)}(\Gamma_\omega) P(d\omega).$$

Следовательно,

$$\mu_\omega^{-t} = \mu_{T_t(\omega)} \quad (\operatorname{mod} P).$$

Но случайная мера $\{\mu_{T_t(\omega)}, \omega \in \Omega\}$ распределена так же, как μ, вследствие того, что T_t сохраняет меру P.

Теорема доказана.

Приведенная теорема дает возможность строить нетривиальные примеры стационарных случайных мер.

***Пример* 2.** Пусть $(\mathcal{Y}, d)$ — полное метрическое сепарабельное пространство. Рассмотрим в $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$ с естественной метрикой двухкомпонентный стационарный в узком смысле и непрерывный почти наверное процесс $\{(x_t, y_t); t \in \mathbb{R}\}$. Тогда случайная мера μ, заданная соотношением

$$\mu(\Delta) = \mathrm{P}\{x \in \Delta / y\},$$

т. е. условное распределение x при известном y, является стационарной случайной мерой.

Имеет место и обратная в некотором смысле теорема к теореме 1. Т. е. любая стационарная мера может быть получена описанным выше образом.

Теорема 2. *Пусть* μ *— случайная стационарная мера на* C. *Тогда существуют новое вероятностное пространство* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$, *вероятностная мера* $\tilde{P}_1$ *на* $\Omega \times C$ *и семейство отображений* $\{T_t\}$, *удовлетворяющие условиям теоремы* 1, *такие, что получающаяся стационарная мера* μ_1 *одинаково распределена с* μ.

Доказательство. Рассмотрим пространство $\mathfrak{M}$ всех вероятностных мер на C с метрикой слабой сходимости. Случайные меры в смысле определения 1 являются случайными элементами в $\mathfrak{M}$. Сдвиги $\{\mu^t; t \in \mathbb{R}\}$ стационарной случайной меры μ образуют стационарный в узком смысле случайный процесс в $\mathfrak{M}$. Пусть $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ — пространство $\mathfrak{M}^{\mathbb{R}}$ с σ-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами и мерой — распределением процесса $\{\mu^t; t \in \mathbb{R}\}$. Вероятностную меру $\tilde{P}_1$ в произведении $\Omega_1 \times C$ определим следующим образом. Для измеримого $\Gamma \subset \Omega_1 \times C$ положим

$$\tilde{P}_1(\Gamma) = \int_{\Omega_1} \omega_0(\Gamma_\omega) P_1(d\omega).$$

Здесь, как и ранее, Γ_ω — сечение Γ, а ω_0 — значение функции $\omega: \mathbb{R} \to \mathfrak{M}$ в точке 0. Семейство $\{T_t; t \in \mathbb{R}\}$ зададим так:

$$T_t(\omega, u) = (\omega(\cdot + t), u(\cdot + t)).$$

Проверим, что T_t сохраняет меру $\tilde{P}_1$. Действительно,

$$\tilde{P}_1 \circ T_t^{-1}(\Gamma) = \tilde{P}_1(\{(\omega, u): T_t(\omega, u) \in \Gamma\}) = \tilde{P}_1(\{(\omega, u): (\omega(\cdot + t), u(\cdot + t)) \in \Gamma\}) =$$

$$= \int_{\Omega_1} \omega_0(\{u: (\omega(\cdot + t), u(\cdot + t)) \in \Gamma\}) P_1(d\omega) = \int_{\Omega_1} \omega_{-t}(\{u: (\omega, u(\cdot + t)) \in \Gamma\}) P_1^t(d\omega) =$$

$$= \int_{\Omega_1} \omega_0(\{u: (\omega, u) \in \Gamma\}) P_1(d\omega) = \tilde{P}_1(\Gamma).$$

Теперь то, что случайная мера $\omega \in \Omega_1$ имеет то же распределение, что и μ, следует из построения $\tilde{P}_1$ и P_1.

Теорема доказана.

В дальнейшем нам понадобится определение случайной меры на C, согласованной с заданной фильтрацией. Пусть $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ — возрастающий поток σ-алгебр на исходном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $t \geq 0$. Обозначим при каждом $t \geq 0$ через $\mathfrak{A}_t$ σ-алгебру подмножеств пространства C, порожденную координатными функционалами в точках до момента t включительно.

Определение 3′. *Случайная мера* μ *называется* $(\mathfrak{A}_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-согласованной, если для произвольных* $t \geq 0$ *и* $\Delta \in \mathfrak{A}_t$ *значение* $\mu(\Delta)$ *является* $\mathcal{F}_t$*-измеримой случайной величиной.*

Заметим, что, как и для стационарных случайных мер, приведенное определение можно переформулировать в терминах интегралов от измеримых ограниченных функций на C. В работе [3] приведена характеризация согласованных случайных мер, абсолютно непрерывных относительно некоторой детерминированной случайной меры.

3. Сильные и слабые решения стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрим задачу Коши для стохастического дифференциального уравнения в $\mathbb{R}$

$$\begin{gathered} dx(t) = a(x_t, t)dt + b(x_t, t)dw(t), \\ x(0) = x_0, \end{gathered} \tag{1}$$

на отрезке $[0; 1]$. Здесь $\{w(t); t \in [0; 1]\}$ — винеровский процесс, a, b — измеримые неупреждающие функционалы на $C([0; 1])$ [4], x_t при каждом t — траектория решения, остановленная в момент t:

$$x_t(s) = x_{t\wedge s}, \quad s \in [0; 1].$$

Напомним определения сильного и слабого решения (1) (см., например, [4]).

Определение 4. *Случайный процесс с непрерывными траекториями* $\{x(t); t \in [0; 1]\}$ *называется сильным решением* (1), *если при каждом* $t \in [0; 1]$ *случайная величина* $x(t)$ *измерима относительно* σ*-алгебры* $\sigma(w(s); s \leq t)$ *и выполнено интегральное соотношение, соответствующее* (1).

Определение 5. *Пара случайных процессов с непрерывными траекториями* $\{x(t), w(t); t \in [0; 1]\}$, *заданных на некотором вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *с выделенным потоком* σ*-алгебр* $\{\mathcal{F}_t; t \in [0; 1]\}$, *называется слабым решением* (1), *если*:

1) w *является* $\{\mathcal{F}_t; t \in [0; 1]\}$*-винеровским процессом;*

2) *при каждом* $t \in [0; 1]$ *случайная величина* $x(t)$ *измерима относительно* $\mathcal{F}_t$ *и справедлив интегральный аналог* (1).

Известно [5], что в некоторых случаях задача Коши (1) может иметь слабое решение и не иметь сильного. Преимущество сильного решения состоит в том, что оно является функционалом от исходного винеровского процесса. Последнее обстоятельство важно, например, при моделировании решения или построении приближений к решению. Поэтому в случае, когда сильное решение отсутствует, а слабое есть, желательно иметь объект, являющийся функционалом от исходного винеровского процесса и заменяющий сильное решение. Таким объектом может быть согласованная с потоком σ-алгебр, порожденным винеровским процессом, случайная мера на пространстве непрерывных функций. Рассмотрим еще одну ситуацию, в которой возможно отсутствие решений, измеримых относительно исходного процесса, описывающего случайные возмущения.

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, $\{\xi_n; n \in \mathbb{Z}\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Рассмотрим рекуррентное уравнение

$$x_{n+1} = \varphi(x_n, \xi_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Для уравнения (2) в некоторых случаях существует стационарное решение $\{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$, стационарно связанное с $\{\xi_n; n \in \mathbb{Z}\}$, т. е. такое, что $\{(x_n, \xi_n);$

$n \in \mathbb{Z}\}$ — стационарная в узком смысле последовательность. В работе [6] такие решения получены как слабые пределы решений задачи Коши для уравнения (2), а в [7] — для близких к линейным функций φ (для бесконечномерного фазового пространства) строятся конструктивным образом. Следующий пример показывает, что стационарное решение уравнения (2) не всегда является сильным.

***Пример* 3.** Пусть $\{\xi_n; n \in \mathbb{Z}\}$ независимы и равномерно распределены на $[0; 1]$, а функция

$$\varphi(x, y) = \{x + y\}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

где $\{\cdot\}$ — символ дробной части. Обозначим для $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_k; k \le n).$$

Покажем, что теперь уравнение (2) не имеет стационарного в узком смысле решения $\{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$ такого, что при каждом $n \in \mathbb{Z}$ x_n измерима относительно $\mathcal{F}_n$. Предположим противное. Пусть $\{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$ — решение, имеющее указанные свойства. Рассмотрим новые случайные величины

$$y_n = e^{i2\pi x_n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \quad y_{n+1} = y_n \cdot e^{i2\pi \xi_{n+1}}.$$

Последовательность $\{y_n; n \in \mathbb{Z}\}$ является стационарной и согласованной с последовательностью σ-алгебр $\{\mathcal{F}_n; n \in \mathbb{Z}\}$. Поэтому

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \quad \mathrm{M} y_{n+1} = \mathrm{M} y_n \cdot \mathrm{M}\, e^{i2\pi \xi_{n+1}} = 0.$$

При этом для фиксированного $n \in \mathbb{Z}$

$$y_n = \lim_{m \to -\infty} \mathrm{M}(y_n / \sigma(\xi_m, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_n)) \pmod{P}.$$

Однако из-за согласованности $\{y_n; n \in \mathbb{Z}\}$

$$\mathrm{M}(y_n / \sigma(\xi_m, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_n)) = \mathrm{M} y_{m-1} \cdot e^{i2\pi(\xi_m + \ldots + \xi_n)} = 0.$$

Тем самым

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \quad y_n = 0 \pmod{P},$$

что противоречит равенству

$$y_n = e^{i2\pi x_n}.$$

Указанное противоречие свидетельствует о том, что предположение о существовании стационарного и согласованного решения (т. е. сильного) в данном случае неверно. Приведенные рассуждения являются модификацией примера Цирельсона [8]. Отметим, что стационарное и стационарно связанное с $\{\xi_n; n \in \mathbb{Z}\}$ решение $\{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$ такое, что при каждом $n \in \mathbb{Z}$ x_n и $\{\xi_k; k \ge n + 1\}$ независимы, существует и единственно. Действительно, пусть η — случайная величина, равномерно распределенная на $[0; 1]$ и независимая от

$\{\xi_n; n \in \mathbb{Z}\}$. Положим $x_0 = \eta$ и определим для $n \geq 1$ x_n с помощью рекуррентного соотношения (2), а при $n \leq -1$ с помощью соотношения

$$x_{n-1} = \{x_n - \xi_n\}.$$

Проверим, что $\{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$ — стационарное решение уравнения (2), стационарно связанное с $\{\xi_n; n \in \mathbb{Z}\}$. Для произвольных $m \in \mathbb{Z}$ и $k \geq 0$ рассмотрим распределение $\{(x_m, \xi_m), (x_{m+1}, \xi_{m+1}), \ldots, (x_{m+k}, \xi_{m+k})\}$. Вначале заметим, что для каждого $m \in \mathbb{Z}$ x_m имеет равномерное распределение на $[0; 1]$. Это легко проверить с помощью метода математической индукции. Поэтому для произвольного $\alpha \in [0; 1]$

$$P\{x_1 < \alpha / \xi\} = P\{\{x_0 + \xi_1\} < \alpha / \xi\} = P\{x_0 < \alpha\} = P\{x_1 < \alpha\},$$

т.е. x_1 не зависит от последовательности ξ. Аналогично заключаем, что при каждом $m \in \mathbb{Z}$ x_m не зависит от ξ. Следовательно, распределение $\{(x_m, \xi_m), \ldots$ $\ldots, (x_{m+k}, \xi_{m+k})\}$ совпадает с распределением $\{(x_0, \xi_0), \ldots, (x_k, \xi_k)\}$. Отметим также, что для любого другого решения $\{y_n; n \in \mathbb{Z}\}$, стационарно связанного с $\{\xi_n; n \in \mathbb{Z}\}$ и независимого от „будущего" ξ, распределения последовательностей (x_n, ξ_n), $n \in \mathbb{Z}$, и (y_n, ξ_n), $n \in \mathbb{Z}$, совпадают.

Приведенный пример показывает, что рекуррентное уравнение (2) не всегда имеет стационарное сильное решение. Сформулируем определение стационарной случайной меры, являющейся решением уравнения (2).

Определение 6. *Стационарная случайная мера* μ *на* $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ *называется сильным решением уравнения* (2), *если:*

1) μ *согласована с последовательностью* σ*-алгебр* $\{\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_k; k \leq n),$ $n \in \mathbb{Z}\}$;

2) *для произвольных* $m \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $\rho \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}} \exp\left(i \sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_{n+k} + i\rho u_{n+m+1}\right) \mu(du) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}} \exp\left(i \sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_{n+k}\right) \exp(i\rho\,\varphi(u_{n+m}, \xi_{n+m+1}))\,\mu(du). \tag{3}$$

***Замечание* 4.** Соотношение (3) является аналогом уравнения Хопфа для пространственно-временного решения уравнения Навье – Стокса [9].

Теорема 3. *Уравнение* (2) *имеет стационарное решение* $\{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$, *стационарно связанное с* ξ *и такое, что при каждом* $n \in \mathbb{Z}$ x_n *не зависит от* $\{\xi_k; k \geq n+1\}$, *тогда и только тогда, когда существует стационарная случайная мера, являющаяся сильным решением уравнения* (2). *Если решение* x, *имеющее указанные свойства, единственно, то и стационарная мера, являющаяся сильным решением, единственна.*

Доказательство. Пусть $\{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$ — решение уравнения (2), имеющее указанные в теореме свойства. Рассмотрим случайную меру μ на $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, заданную соотношением

$$\mu(u\colon (u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+m}) \in \Delta) = \mathrm{P}\{(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) \in \Delta/\xi\}.$$

Здесь $n \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$, Δ — борелевское подмножество $\mathbb{R}^{m+1}$. Поскольку пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ можно метризовать, превратив в полное сепарабельное, так, чтобы σ-алгебра борелевских множеств в нем совпала с σ-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами, то в силу стандартных теорем существует регулярная версия условной вероятности, задающая меру μ. То, что μ — стационарная случайная мера, проверяется очевидным образом. Проверим согласованность μ. Пусть для $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{G}_n = \sigma((x_k, \xi_k); k \leq n),$$

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_k; k \leq n).$$

Согласно условию, при каждом $n \in \mathbb{Z}$ σ-алгебры $\mathcal{G}_n$ и $\sigma(\xi_k; k > n)$ независимы. Поэтому для произвольных интегрируемой случайной величины ζ, измеримой относительно ξ, и $n \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство

$$\mathrm{M}(\zeta/\mathcal{G}_n) = \mathrm{M}(\zeta/\mathcal{F}_n).$$

Для доказательства достаточно проверить приведенное соотношение на многочленах от случайных величин $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$, считая, что ξ_0 имеет все моменты, а затем перейти к пределу. Рассмотрим теперь для фиксированного $n \in \mathbb{Z}$ цилиндрическую ограниченную функцию φ на $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, зависящую от координат с номерами, не превышающими n. Тогда для случайной величины

$$\alpha = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}} \varphi(u)\mu(du) = \mathrm{M}(\varphi(x)/\xi)$$

справедливы соотношения

$$\mathrm{M}\alpha\zeta = \mathrm{M}\varphi(x)\zeta = \mathrm{M}\mathrm{M}(\varphi(x)\zeta/\mathcal{G}_n) =$$

$$= \mathrm{M}\varphi(x)\mathrm{M}(\zeta/\mathcal{G}_n) = \mathrm{M}\varphi(x)\mathrm{M}(\zeta/\mathcal{F}_n).$$

Здесь, как и ранее, ζ — произвольная ограниченная случайная величина, измеримая относительно ξ. Следовательно,

$$\alpha = \mathrm{M}(\varphi(x)/\mathcal{F}_n),$$

т. е. α измерима относительно $\mathcal{F}_n$. Таким образом, случайная мера μ является согласованной, т. е. сильным решением уравнения (2).

Проверим теперь, что из существования стационарной меры μ — сильного решения следует существование стационарного решения $\{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$ (возможно, на расширении исходного вероятностного пространства). Рассмотрим случайную последовательность x такую, что для любого измеримого $\Delta \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$

$$\mathrm{P}\{x \in \Delta/\xi\} = \mu(\Delta).$$

Отметим, что для построения x могло понадобиться расширение вероятностного пространства. Из условия теоремы на меру μ следует, что

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \rho \in \mathbb{R}\colon \quad \mu\{u\colon \exp i\rho u_{n+1} = \exp i\rho\varphi(u_n, \xi_{n+1})\} = 1.$$

Следовательно,

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \quad \mu\{u: u_{n+1} = \varphi(u_n, \xi_{n+1})\} = 1.$$

Поэтому

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \quad P\{x_{n+1} = \varphi(x_n, \xi_{n+1})\} =$$

$$= \mathrm{M}\mu\{u: u_{n+1} = \varphi(u_n, \xi_{n+1})\} = 1.$$

Независимость „прошлого" x и „будущего" последовательности ξ следует из соотношений

$$\forall k \geq 0,\ n \in \mathbb{Z}: \quad \mathrm{P}\{(x_{n-k}, \ldots, x_n) \in \Delta\} = \mathrm{M}\mu(u: (u_{n-k}, \ldots, u_n) \in \Delta),$$

$$\mathrm{P}\{(x_{n-k}, \ldots, x_n) \in \Delta / \xi_{n+1}, \ldots\} = \mathrm{M}\{\mathbb{1}_{\{(x_{n-k}, \ldots, x_n) \in \Delta\}} / \xi_{n+1}, \ldots\} =$$

$$= \mathrm{M}\{\mathrm{M}\{\mathbb{1}_{\{(x_{n-k}, \ldots, x_n) \in \Delta\}} / \xi\} / \xi_{n+1}, \ldots\} =$$

$$= \mathrm{M}\{\mu(u: (u_{n-k}, \ldots, u_n) \in \Delta) / \xi_{n+1}, \ldots\} =$$

$$= \mathrm{M}\mu(u: (u_{n-k}, \ldots, u_n) \in \Delta).$$

Здесь Δ — произвольное измеримое подмножество $\mathbb{R}^{k+1}$.

Единственность сильного решения проверяется с помощью построения, аналогичного доказательству теоремы 2.

Теорема доказана.

1. *Dorogovtsev A. A., Kotelenez P.* Smooth stationary solutions of quasilinear stochastic differential equations. Finite mass. – Ohio, 1997. – 19 p. – Preprint, № 97-145.
2. *Дороговцев А. А.* Стохастические потоки и эволюционные мерозначные процессы // Докл. РАН. – 2003. – **368**, № 2.
3. *Dorogovtsev A. A.* Properties of the random measures // Theory Stochast. Process. – 2000. – **6 (22)**, issue 1–2. – P. 26–33.
4. *Ватанабэ Ш., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
5. *Каллианпур Г.* Стохастическая теория фильтрации. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
6. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
7. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Киев: Выща шк., 1992. – 319 с.
8. *Цирельсон Б. С.* Пример стохастического дифференциального уравнения, не имеющего сильного решения // Теория вероятностей и ее применения. – 1975. – **20**, № 2. – С. 427–430.
9. *Вишик М. И., Фурсиков А. В.* Математические задачи статистической гидромеханики. – М.: Наука, 1980. – 442 с.

Получено 29.11.2002