УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Акад. таможен. службы Украины, Днепропетровск)

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ S^p, $1 \le p < \infty$

In the spaces S^p, $1 \le p < \infty$, introduced by O. I. Stepanets, we obtain exact inequalities of the Jackson type and compute exact values of widths of classes of functions determined by means of averaged modules of continuity of order m.

У введених О. І. Степанцем просторах S^p, $1 \le p < \infty$, одержано точні нерівності типу Джексона та обчислено точні значення поперечників класів функцій, визначених за допомогою усереднених модулів неперервності m-го порядку.

1. В работах [1, 2] введены нормированные пространства S^p, $1 \le p < \infty$, 2π-периодических суммируемых функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_{S^p} = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}(k) \right|^p \right\}^{1/p} < \infty,$$

где

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \tag{1}$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе $(2\pi)^{-1/2} e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $E_{n-1}(f)_{S^p}$ наилучшее приближение функции $f(x) \in S^p$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометрических полиномов порядка $n-1$ в метрике пространства S^p, т. е.

$$E_{n-1}(f)_{S^p} = \inf \left\{ \| f - T_{n-1} \|_{S^p} : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{n-1} \right\}.$$

В работах [1, 2] показано, что пространства S^p, $1 \le p < \infty$, наследуют такую важную особенность гильбертова пространства, как минимальное свойство частных сумм ряда Фурье:

$$E_{n-1}(f)_{S^p} = \| f - S_{n-1}(f) \|_{S^p} = \left\{ \sum_{|k| \ge n} \left| \hat{f}(k) \right|^p \right\}^{1/p}, \tag{2}$$

где

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{|k| \le n-1} \hat{f}(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$

— частная сумма ряда Фурье

$$S(f, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \tag{3}$$

функции $f(x) \in S^p$.

Модулем непрерывности порядка $m \in \mathbb{N}$ произвольного элемента $f(x) \in S^p$ называют величину [3]

$$\omega_m(f,t)_{S^p} = \sup\left\{\left\|\Delta_u^m f(\cdot)\right\|_{S^p} : 0 \le u \le t\right\},$$

где

$$\Delta_u^m f(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j}\binom{m}{j} f(x+ju)$$

— конечная разность m-го порядка функции f в точке x с шагом u. В работе [3] изучались неравенства типа Джексона

$$E_{n-1}(f)_{S^p} \le \kappa(\tau)\omega_m\left(f, \frac{\tau}{n}\right)_{S^p}, \quad \tau > 0, \tag{4}$$

и был рассмотрен вопрос о наименьшей константе в соотношениях вида (4) при фиксированных значениях параметров n, m, τ и p, т. е. вопрос о вычислении величины

$$\kappa_{n,m}(\tau)_{S^p} = \sup\left\{\frac{E_{n-1}(f)_{S^p}}{\omega_m(f,\tau/n)_{S^p}} : f \in S^p,\ f \ne \text{const}\right\}. \tag{5}$$

Всюду далее отношение $0/0$ полагаем равным 0. Точные константы в неравенствах типа Джексона, связывающих погрешности приближения функций из пространства S^p суммами Зигмунда с мажорантами, заданными интегралами от модулей непрерывности m-порядка, получены в работе [4].

Отметим, что проблемой нахождения точных констант в неравенствах типа Джексона занимались многие математики (Н. И. Черных, Л. В. Тайков, Н. П. Корнейчук, В. А. Юдин, А. А. Лигун, А. Г. Бабенко, В. И. Иванов и другие (см., например, [5 – 13])).

2. Используя общепринятые обозначения

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

(1) можно представить в виде

$$\hat{f}(k) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\left(a_{|k|}(f) - ib_{|k|}(f)\operatorname{sgn} k\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Тогда соотношения (2) и (3) с учетом (6) можно записать так:

$$E_{n-1}(f)_{S^p} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\left\{2\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^p(f)\right\}^{1/p}, \tag{7}$$

где $\rho_k(f) = \sqrt{a_k^2(f) + b_k^2(f)}$, и

$$S(f,x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right).$$

Пусть $\Psi(k)$ и $\beta(k) \overset{\text{df}}{=} \beta_k$, $k \in \mathbb{N}$, — сужения на множество $\mathbb{N}$ произвольных вещественных функций, определенных на полусегменте $[1, \infty)$. Согласно [14] предположим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Psi(k)}\left(a_k(f)\cos\left(kx + \frac{\beta_k\pi}{2}\right) + b_k(f)\sin\left(kx + \frac{\beta_k\pi}{2}\right)\right)$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции (обозначим ее через

$f_{\overline{\beta}}^{\Psi}(x))$, называемой $(\Psi, \overline{\beta})$-производной функции $f(x)$. Множество 2π-периодических суммируемых функций $f(x)$, имеющих $(\Psi, \overline{\beta})$-производные, обозначают символом $L_{\overline{\beta}}^{\Psi}$. При этом коэффициенты Фурье функций $f(x)$ и $f_{\overline{\beta}}^{\Psi}(x)$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \Psi(k)\left(a_k\left(f_{\overline{\beta}}^{\Psi}\right)\cos\frac{\beta_k\pi}{2} - b_k\left(f_{\overline{\beta}}^{\Psi}\right)\sin\frac{\beta_k\pi}{2}\right), \\ b_k(f) &= \Psi(k)\left(a_k\left(f_{\overline{\beta}}^{\Psi}\right)\sin\frac{\beta_k\pi}{2} + b_k\left(f_{\overline{\beta}}^{\Psi}\right)\cos\frac{\beta_k\pi}{2}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Попутно отметим, что из (6) и (8) следуют равенства

$$\hat{f}(k) = e^{-i\beta_k\pi\operatorname{sgn}(k)/2}\Psi(|k|)\widehat{f_{\overline{\beta}}^{\Psi}}(k), \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

и ряд Фурье функции $f_{\overline{\beta}}^{\Psi}(x)$ по ортонормированной системе $(2\pi)^{-1/2}e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, имеет вид

$$S\left(f_{\overline{\beta}}^{\Psi}, x\right) = \sum_{|k|\geq 1}\frac{e^{i\beta_k\pi\operatorname{sgn}(k)/2}}{\Psi(|k|)}\hat{f}(k)\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Множество функций $f(x) \in L_{\overline{\beta}}^{\Psi}$, у которых $(\Psi, \overline{\beta})$-производные $f_{\overline{\beta}}^{\Psi}(x)$ принадлежат пространству S^p, обозначим через $L_{\overline{\beta}}^{\Psi}(S^p)$.

3. Полагаем, что функция $\Psi(x)$, заданная на множестве $1 \leq x < \infty$, является положительной, монотонно убывающей к нулю при возрастании x и такой, что для всех $x \in [1, \infty)$ существует первая производная $\Psi^{(1)}(x)$, удовлетворяющая неравенству

$$px\Psi^{(1)}(x) + \Psi(x) \leq 0. \tag{9}$$

Приведем несколько примеров функций, удовлетворяющих указанным требованиям. Это, в частности, $x^{-\beta}$ и $e^{-\beta x}$, $1/p \leq \beta < \infty$, а также $1/(x\ln(1+x))$.

Продолжая тематику, связанную с нахождением точных констант в соотношениях вида (5), рассмотрим следующую экстремальную характеристику:

$$\chi_{n,(\Psi,\overline{\beta}),m}(\tau)_{S^p} = \sup_{\substack{f(x)\in L_{\overline{\beta}}^{\Psi}(S^p) \\ f(x)\neq \text{const}}}\frac{E_{n-1}(f)_{S^p}}{\Psi(n)\left\{\int\limits_0^{\tau}\omega_m^p\left(f_{\overline{\beta}}^{\Psi}, u\right)_{S^p}du\right\}^{1/p}}, \quad \tau > 0. \tag{10}$$

В случае $\psi(x) = x^{-r}$, $r \in \mathbb{N}$, $\{\beta_k = r\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $0 < \tau \leq \pi/n$ точные значения величины (10) найдены автором в [15]. При $p = 2$ они совпадают с соответствующим результатом из работы [7, с. 219]. Экстремальные характеристики, в определенном смысле совпадающие с (10), изучались также в работе [16].

Теорема 1. *Пусть функция* $\Psi(x)$ *удовлетворяет условию* (9). *Тогда для любых чисел* $n, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ *и* $0 < \tau \leq \pi/n$ *имеют место равенства*

$$\chi_{n,(\Psi,\overline{\beta}),m}(\tau)_{S^p} = 2^{-m/2}\left\{\int\limits_0^{\tau}(1-\cos nu)^{mp/2}du\right\}^{-1/p}. \tag{11}$$

Пусть B — единичный шар в S^p; F — выпуклое центрально-симметричное подмножество в S^p; $\mathcal{L}_n \subset S^p$ — n-мерное подпространство; $\mathcal{L}^n \subset S^p$ — подпространство коразмерности n; $\Lambda : S^p \to \mathcal{L}_n$ — непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства S^p в $\mathcal{L}_n$; $\Lambda^{\perp} : S^p \to \mathcal{L}_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования S^p на подпространство $\mathcal{L}_n$. Величины

$$d_n(F, S^p) = \inf_{\mathcal{L}_n \subset S^p} \sup_{f \in F} \inf_{g \in \mathcal{L}_n} \| f - g \|_{S^p},$$

$$\delta_n(F, S^p) = \inf_{\mathcal{L}_n \subset S^p} \inf_{\Lambda: S^p \to \mathcal{L}_n} \sup_{f \in F} \| f - \Lambda f \|_{S^p},$$

$$b_n(F, S^p) = \sup_{\mathcal{L}_{n+1} \subset S^p} \sup_{\varepsilon \mathbb{B} \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset F} \{ \varepsilon > 0 \},$$

$$d^n(F, S^p) = \inf_{\mathcal{L}^n \subset S^p} \sup_{f \in F \cap \mathcal{L}^n} \| f \|_{S^p},$$

$$\Pi_n(F, S^p) = \inf_{\mathcal{L}_n \subset S^p} \inf_{\Lambda^{\perp}: S^p \to \mathcal{L}_n} \sup_{f \in F} \left\| f - \Lambda^{\perp} f \right\|_{S^p}$$

называют соответственно колмогоровским, линейным, бернштейновским, гельфандовским и проекционным n-поперечниками множества F в пространстве S^p. Перечисленные аппроксимативные характеристики связаны между собой следующим образом [17, 18]:

$$b_n(F, S^p) \le \begin{matrix} d^n(F, S^p) \\ d_n(F, S^p) \end{matrix} \le \delta_n(F, S^p) \le \Pi_n(F, S^p). \tag{12}$$

Точные оценки n-поперечников некоторых функциональных классов в пространствах S^p, $1 \le p < \infty$, найдены, например, в работах [16, 19, 20], а также доложены автором на Воронежской зимней математической школе [15].

Через $L_{\beta}^{\Psi}(S^p, \omega_m, \alpha)$, где

$$\alpha \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\pi}{\int_0^{\pi} \sin^{mp}(u/2)\, du},$$

обозначим множество функций $f(x) \in L_{\beta}^{\Psi}(S^p)$, $\left(\Psi, \overline{\beta}\right)$-производные которых удовлетворяют условию

$$\int_0^{\tau} \omega_m^p\left(f_{\beta}^{\Psi}, u\right)_{S^p} du \le \tau^{\alpha} \quad \forall \tau \in (0, \pi].$$

Теорема 2. *Если функция $\Psi(x)$ удовлетворяет условию (9), то для любого натурального числа n имеют место равенства*

$$q_{2n}\left(L_{\beta}^{\Psi}(S^p, \omega_m, \alpha); S^p\right) = q_{2n-1}\left(L_{\beta}^{\Psi}(S^p, \omega_m, \alpha); S^p\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(L_{\beta}^{\Psi}(S^p, \omega_m, \alpha)\right)_{S^p} = \frac{\alpha^{1/p}}{2^m}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{(\alpha-1)/p} \Psi(n), \tag{13}$$

где $q_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n-поперечников, $E_{n-1}(F)_{S^p} \overset{\mathrm{df}}{=}$ $\overset{\mathrm{df}}{=} \sup\left\{ E_{n-1}(f)_{S^p} : f(x) \in F \right\}$, $F \subset S^p$.

В случае $\Psi(x)=x^{-r}$, $r\in\mathbb{N}$, $\{\beta_k=r\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $p=2$ класс $L^{\Psi}_{\beta}(S^p,\omega_m,\alpha)$ совпадает с рассмотренным в работе [7] классом $K\left(m,r,\tilde{\Phi}\right)$, где $\tilde{\Phi}(x)=x^{\tilde{\alpha}}$,

$$\tilde{\alpha}\overset{\text{df}}{=}\frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi}\sin^{2m}(u/2)\,du}.$$

Полагая [7, с. 220] $\lambda=nt/\pi$, $\mu=1$, $u=\pi/n$, получаем соотношение

$$d_{2n-1}\left(K\left(m,r,\tilde{\Phi}\right);L_2\right)=\frac{\sqrt{\tilde{\alpha}}}{2^m n^r}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{(\tilde{\alpha}-1)/2},$$

содержащееся в (13) при $p=2$.

4. ***Доказательство теоремы*** **1.** Используя полученную в [3] формулу

$$\left\|\Delta_u^m f(\cdot)\right\|_{S^p}^p=2^{mp/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(k)\right|^p(1-\cos ku)^{mp/2},$$

а также соотношение (6), имеем

$$\left\|\Delta_u^m f_{\overline{\beta}}^{\Psi}(\cdot)\right\|_{S^p}^p=\pi^{p/2}2^{1+(m-1)p/2}\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^p\left(f_{\overline{\beta}}^{\Psi}\right)(1-\cos ku)^{mp/2}. \tag{14}$$

Из определения модуля непрерывности m-го порядка и следующего из (8) равенства

$$\rho_k(f)=\Psi(k)\rho_k\left(f_{\overline{\beta}}^{\Psi}\right) \tag{15}$$

получаем

$$\int\limits_0^{\tau}\omega_m^p\left(f_{\overline{\beta}}^{\Psi},u\right)_{S^p}du\geq\int\limits_0^{\tau}\left\|\Delta_u^m f_{\overline{\beta}}^{\Psi}(\cdot)\right\|_{S^p}^p du\geq$$

$$\geq\pi^{p/2}2^{1+(m-1)p/2}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^p(f)\frac{1}{\Psi^p(k)}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos ku)^{mp/2}du, \tag{16}$$

где $0<\tau\leq\pi/n$. На полусегменте $1\leq x<\infty$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$\gamma(x)\overset{\text{df}}{=}\frac{1}{x\Psi^p(x)}\int\limits_0^{\tau x}(1-\cos u)^{mp/2}du.$$

Поскольку в силу (9)

$$\gamma^{(1)}(x)=$$

$$=\frac{1}{x\Psi^p(x)}\left\{\tau(1-\cos\tau x)^{mp/2}-\left(xp\Psi^{(1)}(x)+\Psi(x)\right)\frac{1}{x\Psi(x)}\int\limits_0^{\tau x}(1-\cos u)^{mp/2}du\right\}\geq 0,$$

то очевидно, что $\min\{\gamma(x)\colon n\leq x<\infty\}=\gamma(n)$. С учетом этого факта продолжим оценку (16):

$$\geq\pi^{p/2}2^{1+(m-1)p/2}\frac{1}{\Psi^p(n)}\int\limits_0^{\tau}(1-\cos nu)^{mp/2}du\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^p(f)\right\}. \tag{17}$$

Из (7) и (16), (17) следует неравенство

$$\left\{\int_0^\tau \omega_m^p\left(f_{\overline{\beta}}^\Psi, u\right)_{S^p} du\right\}^{1/p} \geq \frac{2^{m/2}}{\Psi(n)}\left\{\int_0^\tau (1-\cos nu)^{mp/2} du\right\}^{1/p} E_{n-1}(f)_{S^p}. \quad (18)$$

Оценку сверху

$$\chi_{n,(\Psi,\overline{\beta}),m}(\tau)_{S^p} \leq 2^{-m/2}\left\{\int_0^\tau (1-\cos nu)^{mp/2} du\right\}^{-1/p} \quad (19)$$

получаем на основании формул (10) и (18).

Для нахождения оценки снизу рассмотрим функцию $\tilde{f}(x) = \sqrt{2/\pi}\cos nx$, которая принадлежит классу $L_{\overline{\beta}}^\Psi(S^p)$. На основании (7) имеем $E_{n-1}\left(\tilde{f}\right)_{S^p} = 2^{1/p}$. В силу (14), (15) для $\left(\Psi, \overline{\beta}\right)$-производной

$$\tilde{f}_{\overline{\beta}}^\Psi(x) \doteq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos(nx+\beta_n\pi/2)}{\Psi(n)}$$

функции $\tilde{f}(x)$ запишем

$$\left\|\Delta_u^m \tilde{f}_{\overline{\beta}}^\Psi(\cdot)\right\|_{S^p} = \frac{2^{m/2+1/p}}{\Psi(n)}(1-\cos nu)^{m/2}. \quad (20)$$

Используя определение модуля непрерывности m-го порядка и (20), при $0<\tau\leq \leq \pi/n$ получаем

$$\int_0^\tau \omega_m^p\left(\tilde{f}_{\overline{\beta}}^\Psi, u\right)_{S^p} du = \frac{2^{mp/2+1}}{\Psi^p(n)}\int_0^\tau (1-\cos nu)^{mp/2} du.$$

Тогда на основании (10) имеем

$$\chi_{n,(\Psi,\overline{\beta}),m}(\tau)_{S^p} \geq \frac{E_{n-1}\left(\tilde{f}\right)_{S^p}}{\Psi(n)\left\{\int_0^\tau \omega_m^p\left(\tilde{f}_{\overline{\beta}}^\Psi, u\right)_{S^p} du\right\}^{1/p}} =$$

$$= 2^{-m/2}\left\{\int_0^\tau (1-\cos nu)^{mp/2} du\right\}^{-1/p}. \quad (21)$$

Соотношение (11) следует из сопоставления оценок сверху (19) и снизу (21). Теорема 1 доказана.

5. ***Доказательство теоремы*** **2.** В формуле (18) полагаем $\tau=\pi/n$ и выполняем замену переменной в интеграле, расположенном в правой ее части. Используя определение класса $L_{\overline{\beta}}^\Psi(S^p, \omega_m, \alpha)$ и формулы (12) и (2), из преобразованного указанным образом соотношения (18) получаем оценку сверху

$$q_{2n}\left(L_{\overline{\beta}}^\Psi(S^p, \omega_m, \alpha); S^p\right) \leq q_{2n-1}\left(L_{\overline{\beta}}^\Psi(S^p, \omega_m, \alpha); S^p\right) \leq$$

$$\leq \pi_{2n-1}\left(L_{\overline{\beta}}^\Psi(S^p, \omega_m, \alpha); S^p\right) \leq E_{n-1}\left(L_{\overline{\beta}}^\Psi(S^p, \omega_m, \alpha)\right)_{S^p} \leq$$

$$\leq \pi^{\alpha/p}2^{-m}\left\{\int_0^\pi \sin^{mp}\left(\frac{u}{2}\right)du\right\}^{-1/p} n^{(1-\alpha)/p}\Psi(n) = \frac{\alpha^{1/p}}{2^m}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{(\alpha-1)/p}\Psi(n). \quad (22)$$

Для получения оценок снизу рассмотрим в подпространстве $\mathcal{T}_n$ шар

$$\mathbb{B}_* = \left\{ T_n(x) \in \mathcal{T}_n : \| T_n \|_{S_p} \le \frac{\alpha^{1/p}}{2^m} \left(\frac{\pi}{n} \right)^{(\alpha-1)/p} \Psi(n) \right\}$$

и покажем, что $\mathbb{B}_* \subset L^{\Psi}_{\overline{\beta}}(S^p, \omega_m, \alpha)$.

Для произвольного полинома

$$T_n(x) = \sum_{|k| \le n} \hat{T}_n(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$

запишем его $\left(\Psi, \overline{\beta}\right)$-производную

$$(T_n)^{\Psi}_{\overline{\beta}}(x) = \sum_{\substack{|k| \le n \\ (k \ne 0)}} \frac{e^{i\beta_k \pi \operatorname{sgn}(k)/2}}{\Psi(|k|)} \hat{T}_n(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Используя определение нормы в пространстве S^p и учитывая, что числа $1/\Psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, образуют монотонно возрастающую последовательность, получаем неравенство

$$\left\| (T_n)^{\Psi}_{\overline{\beta}} \right\|_{S_p} = \left\{ \sum_{\substack{|k| \le n \\ (k \ne 0)}} \frac{1}{\Psi^p(|k|)} \left| \hat{T}_n(k) \right|^p \right\}^{1/p} \le \frac{1}{\Psi(n)} \| T_n \|_{S_p}, \tag{23}$$

которое можно рассматривать как своеобразный аналог неравенства С. Н. Бернштейна для тригонометрических полиномов в пространстве S^p. Запишем m-ю конечную разность для $\left(\Psi, \overline{\beta}\right)$-производной полинома $T_n(x)$:

$$\left\| \Delta^m_h (T_n)^{\Psi}_{\overline{\beta}} \right\|_{S^p} = 2^{m/2} \left\{ \sum_{\substack{|k| \le n \\ (k \ne 0)}} \left| \widehat{(T_n)^{\Psi}_{\overline{\beta}}}(k) \right|^p (1 - \cos kh)^{mp/2} \right\}^{1/p}. \tag{24}$$

Полагаем $(\sin t)_* \overset{\text{df}}{=} \{ \sin t,$ если $0 \le t \le \pi/2;$ $1,$ если $t \ge \pi/2 \}$. Учитывая, что для любых $h \ge 0$ и $1 \le k \le n$ имеет место неравенство

$$\sin \frac{kh}{2} \le \left(\sin \frac{nh}{2} \right)_*,$$

из (24) и определения модуля непрерывности m-го порядка находим

$$\omega_m \left((T_n)^{\Psi}_{\overline{\beta}}, u \right)_{S^p} \le \frac{2^m}{\Psi(n)} \left(\sin \frac{nu}{2} \right)^m_* \| T_n \|_{S^p}. \tag{25}$$

Возведя обе части неравенства (25) в p-ю степень, а затем проинтегрировав их по переменной u в пределах от 0 до τ, где $0 < \tau \le \pi$, для произвольного полинома $T_n(x) \in \mathbb{B}_*$ получим

$$\int_0^{\tau} \omega^p_m \left((T_n)^{\Psi}_{\overline{\beta}}, u \right)_{S^p} du \le \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} \right)^{\alpha} \int_0^{\tau n} \left(\sin \frac{u}{2} \right)^{mp}_* du. \tag{26}$$

Докажем, что правая часть неравенства (26) не превышает функцию τ^{α} при $0<\tau\le\pi$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$G(\tau) \overset{\text{df}}{=} \left(\frac{\tau n}{\pi}\right)^{\alpha} - \frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^{\tau n}\left(\sin\frac{u}{2}\right)_*^{mp} du. \tag{27}$$

Поскольку нам, фактически, необходимо показать справедливость соотношения $G(\tau)\ge 0$, в связи с этим понадобятся оценки сверху и снизу величины α. Учитывая, что при $0<u<\pi$ имеют место неравенства

$$\left(\frac{u}{\pi}\right)^{mp} < \sin^{mp}\left(\frac{u}{2}\right) < \sin\left(\frac{u}{2}\right),$$

где $mp\ge 1$, из определения α получаем

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi}\sin(u/2)\,du} < \alpha < \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi}(u/\pi)^{mp}\,du} = mp+1. \tag{28}$$

Дальнейшие рассуждения проведем в два этапа: для $0<\tau\le\pi/n$ и для $\pi/n\le$ $\le\tau\le\pi$.

Пусть вначале $0<\tau\le\pi/n$. Исходя из первого замечательного предела, заменим в бесконечно малой окрестности нуля функцию $\sin(u/2)$ ее аргументом $u/2$. Тогда, используя (27), получаем

$$G(\tau) = \tau^{\alpha}\left(\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha} - O(\tau^{mp+1-\alpha})\right).$$

Отсюда и из правой части соотношения (28) следует, что $G(\tau)>0$ в бесконечно малой окрестности нуля. Рассуждая от противного, покажем, что на интервале $(0,\pi/n)$ функция $G(\tau)$ является знакопостоянной. Исходя из непрерывности $G(\tau)$ на отрезке $[0,\pi]$, включим, для удобства, в рассмотрение точку $\tau=0$. Пусть существует по крайней мере одна точка $\xi\in(0,\pi/n)$, в которой $G(\xi)=0$. Из (27) и приведенного в п. 3 определения величины α следует $G(0)=G(\pi/n)=0$. Тогда в силу теоремы Ролля первая производная

$$G^{(1)}(\tau) = \frac{\alpha n}{\pi}\left\{\left(\frac{\tau n}{\pi}\right)^{\alpha-1} - \sin^{mp}\left(\frac{\tau n}{2}\right)\right\} \tag{29}$$

должна иметь на множестве $(0,\pi/n)$ не менее двух различных нулей. Легко видеть, что выражение, записанное в фигурных скобках формулы (29), и функция

$$G_1(\tau) \overset{\text{df}}{=} \left(\frac{\tau n}{\pi}\right)^{(\alpha-1)/(mp)} - \sin\left(\frac{\tau n}{2}\right)$$

имеют одинаковое количество нулей на интервале $(0,\pi/n)$. Тогда с учетом равенства $G_1(0)=G_1(\pi/n)=0$ получаем, что первая производная

$$G_1^{(1)}(\tau) = \frac{(\alpha-1)n}{mp\pi}\left(\frac{\tau n}{\pi}\right)^{(\alpha-(1+mp))/(mp)} - \frac{n}{2}\cos\frac{\tau n}{2}$$

должна иметь на $(0,\pi/n)$ не менее трех различных нулей. Однако это невозможно, поскольку в силу правой части соотношения (28) $G_1^{(1)}(\tau)$, как разность выпуклой вниз и выпуклой вверх функций, может иметь на интервале $(0, \pi/n)$ не более двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает, что при $0<\tau\leq\pi/n$ выполняется неравенство

$$\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}\int\limits_0^{\tau n}\left(\sin\frac{u}{2}\right)_*^{mp}du\ \leq\ \tau^{\alpha}, \tag{30}$$

а значит, исходя из (26), и требуемое соотношение

$$\int\limits_0^{\tau}\omega_m^p\left((T_n)_{\beta}^{\Psi}, u\right)_{S^p}du\ \leq\ \tau^{\alpha}. \tag{31}$$

Пусть теперь $\pi/n\leq\tau\leq\pi$. Тогда на основании (27) с учетом вида величины α имеем

$$G(\tau)\ =\ \left(\frac{\tau n}{\pi}\right)^{\alpha}-1-\frac{\alpha n}{\pi}\left(\tau-\frac{\pi}{n}\right).$$

Поскольку

$$G^{(1)}(\tau)\ =\ \frac{\alpha n}{\pi}\left(\left(\frac{\tau n}{\pi}\right)^{\alpha-1}-1\right),$$

в силу левой части неравенства (28) на рассматриваемом интервале $G^{(1)}(\tau)>0$ и функция $G(\tau)$ является монотонно возрастающей. Отсюда с учетом того факта, что $G(\pi/n)=0$, следует выполнение неравенства (30) при $\pi/n\leq\tau\leq\pi$, а значит, и справедливость соотношения (31).

Таким образом, включение шара $\mathbb{B}_*$ в класс $L_{\beta}^{\Psi}(S^p,\omega_m,\alpha)$ полностью доказано. Используя определение бернштейновского поперечника и формулу (12), получаем

$$q_{2n}\left(L_{\beta}^{\Psi}(S^p,\omega_m,\alpha);S^p\right)\ \geq\ b_{2n}\left(L_{\beta}^{\Psi}(S^p,\omega_m,\alpha);S^p\right)\ \geq$$

$$\geq\ b_{2n}(\mathbb{B}_*,S^p)\ \geq\ \frac{\alpha^{1/p}}{2^m}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{(\alpha-1)/p}\Psi(n). \tag{32}$$

Равенства (13) следуют из сопоставления оценок (22) и (32).

Теорема 2 доказана.

6. Вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций действительной переменной рассматривались многими математиками (А. В. Ефимов, А. Ф. Тиман, Н. П. Корнейчук, В. И. Бердышев, С. Милорадович, С. А. Теляковский, А. И. Степанец, В. В. Жук). По мнению автора, подобная задача представляет определенный интерес и в рассматриваемом случае.

***Следствие* 1.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда для произвольного натурального числа* n *имеют место следующие равенства*:

$$\sup_{f\in L_{\beta}^{\Psi}(S^p,\omega_m,\alpha)}\left|\hat{f}(n)\right|\ =\ \sup_{f\in L_{\beta}^{\Psi}(S^p,\omega_m,\alpha)}\left|\hat{f}(-n)\right|\ =$$

$$=\ \frac{\alpha^{1/p}}{2^{m+1/p}}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{(\alpha-1)/p}\Psi(n). \tag{33}$$

Доказательство. Из (6) следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства $\left|\hat{f}(n)\right| = \left|\hat{f}(-n)\right|$. Поэтому, не уменьшая общности, рассмотрим случай $\left|\hat{f}(n)\right|$. Используя (2), получаем

$$E_{n-1}(f)_{S^p} = \left\{2\sum_{k=n}^{\infty}\left|\hat{f}(k)\right|^p\right\}^{1/p} \geq 2^{1/p}\left|\hat{f}(n)\right|.$$

Из данного соотношения, а также из (13) и (22) следует оценка сверху

$$\sup_{f\in L^{\Psi}_{\beta}(S^p,\,\omega_m,\,\alpha)}\left|\hat{f}(n)\right| \leq 2^{-1/p}E_{n-1}\left(L^{\Psi}_{\beta}(S^p,\omega_m,\alpha)\right)_{S^p} \leq$$

$$\leq \frac{\alpha^{1/p}}{2^{m+1/p}}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{(\alpha-1)/p}\Psi(n). \qquad (34)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_0(x) = \frac{\alpha^{1/p}}{2^{m+1/p}}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{(\alpha-1)/p}\Psi(n)\left(\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}}\right).$$

Поскольку

$$\|f_0\|_{S^p} = \left(\left|\hat{f}_0(n)\right|^p + \left|\hat{f}_0(-n)\right|^p\right)^{1/p} = 2^{1/p}\left|\hat{f}_0(n)\right| = \frac{\alpha^{1/p}}{2^m}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{(\alpha-1)/p}\Psi(n),$$

тригонометрический полином $f_0(x)$ принадлежит рассмотренному при доказательстве теоремы 2 шару $\mathbb{B}_*$, а значит, и классу $L^{\Psi}_{\beta}(S^p,\omega_m,\alpha)$. Тогда

$$\sup_{f\in L^{\Psi}_{\beta}(S^p,\,\omega_m,\,\alpha)}\left|\hat{f}(n)\right| \geq \left|\hat{f}_0(n)\right| = \frac{\alpha^{1/p}}{2^{m+1/p}}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{(\alpha-1)/p}\Psi(n). \qquad (35)$$

Сравнивая соотношения (34) и (35), получаем равенства (33), что и завершает доказательство следствия 1.

1. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_{φ} // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 392–416.
2. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_{φ} в разных метриках // Там же. – № 8. – С. 1121–1146.
3. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Прямые и обратные теоремы теории приближения функций в пространстве S^p // Там же. – 2002. – **54**, № 1. – С. 106–124.
4. *Войцехівський В. Р.* Нерівності типу Джексона при наближенні функцій з простору S^p сумами Зигмунда // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **35**. – С. 33–46.
5. *Черных Н. И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. – 1967. – **2**, № 5. – С. 513–522.
6. *Юдин В. А.* Диофантовы приближения в экстремальных задачах // Докл. АН СССР. – 1980. – **251**, № 1. – С. 54–57.
7. *Тайков Л. В.* Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Мат. заметки. – 1979. – **25**, № 2. – С. 217–223.
8. *Тайков Л. В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Там же. – 1976. – **20**, № 3. – С. 433–438.
9. *Лигун А. А.* Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Там же. – 1978. – **24**, № 6. – С. 785–792.
10. *Бабенко А. Г.* О точной константе в неравенстве Джексона в L_2 // Там же. – 1986. – **39**, № 5. – С. 651–664.

11. *Иванов В. И., Смирнов О. Н.* Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. – Тула: Тул. ун-т, 1995. – 192 с.
12. *Есмаганбетов М. Г.* Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки. – 1999. – **65**, № 6. – С. 816 – 820.
13. *Вакарчук С. Б.* О наилучших полиномиальных приближениях некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников // Там же. – 2001. – **70**, № 3. – С. 334 – 345.
14. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
15. *Вакарчук С. Б.* О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации в пространствах S^p $(1 \le p < \infty)$ // Воронеж. зим. мат. школа „Современные методы теории функций и смежные пробелемы" (Воронеж, 26 января – 2 февраля 2003 г.). – Воронеж: Воронеж. ун-т, 2003. – С. 47 – 48.
16. *Сердюк А. С.* Поперечники в просторі S^p класів функцій, що означаються модулями неперервності їх ψ-похідних // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 224 – 248.
17. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
18. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1987. – **14**. – С. 103 – 260.
19. *Войцехівський В. Р.* Поперечники деяких класів з простору S^p // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 17 – 26.
20. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: в 2 ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. 2. – 468 с.

Получено 11.01.2003