УДК 517.51

Т. О. Банах (Львів. нац. ун-т),
М. І. Вовк (Нац. ун-т „Львів. політехніка")

НАРІЗНО F_σ-ВИМІРНІ ФУНКЦІЇ Є БЛИЗЬКИМИ ДО ФУНКЦІЙ 1-ГО КЛАСУ БЕРА

We prove that a Borel separately F_σ-measurable function $f: X\times Y \to R$ on the product of Polish spaces is a function of the first Baire class on the complement $X\times Y \setminus M$ of some projectively meager set $M \subset X\times Y$.

Доведено, що борелівська нарізно F_σ-вимірна функція $f: X\times Y \to R$ на добутку польських просторів є функцією першого класу Бера на доповненні $X\times Y\setminus M$ до деякої проективно худої множини $M \subset X\times Y$.

Дане дослідження пов'язане з однією (досі нерозв'язаною) проблемою зі списку проблем [1], що вперше з'явилася у статті [2].

Проблема ($CB_1 ? \subset \overline{CC}$). *Нехай f: $[0, 1]\times[0, 1] \to R$ — функція, неперервна за першою змінною та першого класу Бера за другою. Чи є f поточковою границею послідовності нарізно неперервних функцій?*

Нагадаємо, що відображення $f: X \to Y$ між топологічними просторами називається відображенням *першого класу Бера,* якщо $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ є поточковою границею послідовності неперервних відображень $(f_n: X \to Y)_{n\in N}$. Згідно з класичною теоремою Лебега – Хаусдорфа – Банаха (див. [3] (теорема 24.10) чи [4, с. 400]), дійснозначна функція $f: X \to R$ на польському (= сепарабельному повнометризовному) просторі X є функцією першого класу Бера тоді і лише тоді, коли функція f — F_σ-*вимірна* в сенсі, що прообраз $f^{-1}(U)$ довільної відкритої підмножини $U \subset R$ є F_σ-множиною в X.

Для топологічних просторів X, Y через $C(X)$ (відповідно $B_1(X)$) позначаємо множину дійснозначних неперервних функцій (відповідно функцій першого класу Бера) на X, а через $CC(X\times Y, R)$ (відповідно $CB_1(X\times Y, R)$) — множину дійснозначних нарізно неперервних (відповідно неперервних за першою змінною і першого класу Бера за другою) функцій на добутку $X\times Y$. У цих позначеннях проблема $CB_1 ? \subset \overline{CC}$ формулюється так: чи є справедливим включення $CB_1([0, 1]^2, R) \subset \overline{CC}([0, 1]^2, R)$, де $\overline{CC}(X\times Y, R)$ — множина дійснозначних функцій на $X\times Y$, що є поточковими границями послідовностей нарізно неперервних функцій.

При (безуспішних) спробах розв'язати цю проблему виявилося, що функції класів $CB_1([0, 1]^2, R)$ та $\overline{CC}([0, 1]^2, R)$ мають одну спільну властивість: вони є функціями першого класу Бера на доповненні $[0, 1]^2 \setminus M$ до деякої проективно худої множини $M \subset [0, 1]^2$.

Підмножина M добутку $X\times Y$ двох топологічних просторів називається *проективно худою,* якщо обидві її проекції $\mathrm{pr}_X(M) \subset X$ та $\mathrm{pr}_Y(M) \subset Y$ є худими (тобто є множинами першої категорії у відповідних просторах). Згідно з теоремою Наміоки [5] (див. також [6, с. 17]), кожна нарізно неперервна функція $f \in CC(X\times Y, R)$ на добутку двох компактів неперервна на доповненні до деякої проективно худої множини. Як наслідок, кожна функція $f \in \overline{CC}(X\times Y, R)$ є функцією першого класу Бера на доповненні до деякої проективно худої множини $M \subset X\times Y$. Ми покажемо, що те ж вірно для борелівських нарізно F_σ-вимірних функцій, зокрема функцій класу $CB_1(X\times Y, R)$. Нагадаємо, що відображення $f\colon X \to Y$ між топологічними просторами називається *борелівським,* якщо прообраз $f^{-1}(U)$ довільної відкритої підмножини $U \subset Y$ є борелівською підмножиною в X. Функція $f\colon X \times Y \to Z$ називається *нарізно F_σ-вимірною,* якщо для кожного фіксованого значення однієї із змінних вона є F_σ-вимірною за іншою.

Теорема 1. *Кожна борелівська нарізно F_σ-вимірна функція $f\colon X \times Y \to R$ на добутку двох польських просторів є функцією першого класу Бера на доповненні $X \times Y \setminus M$ до деякої проективно худої підмножини $M \subset X \times Y$ (в сенсі, що звуження f на $X \times Y \setminus M$ є першого класу Бера).*

При доведенні цієї теореми використовується один (вельми нетривіальний) результат Сан Ремо [3] (твердження 35.46). Для його формулювання нагадаємо, що *гіперпростором* топологічного простору X називається простір $\mathcal{K}(X)$ усіх компактних підмножин простору X, наділений топологією В'єторіса, передбазу якої утворюють множини вигляду

$$U_{\subset} = \{K \in \mathcal{K}(X)\colon K \subset U\}, \quad U_{\cap} = \{K \in \mathcal{K}(X)\colon K \cap U \neq \varnothing\},$$

де U пробігає топологію простору X. Відомо, що для польського (компактного) простору X його гіперпростір $\mathcal{K}(X)$ теж є польським (і компактним), причому порожня підмножина $\varnothing \subset X$ є ізольованою точкою в $\mathcal{K}(X)$.

Теорема (Saint Raymond). *Нехай $B \subset X \times Y$ — така борелівська підмножина добутку польських просторів, що для кожного $x \in X$ перетин $B \cap (\{x\} \times Y)$ є σ-компактним. Тоді існує така послідовність борелівських функцій $\Phi_n\colon X \to \mathcal{K}(Y)$, $n \in N$, що*

$$B = \bigcup_{n \in N} \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \Phi_n(x).$$

Нам знадобиться також один класичний результат Бера (див. [4, с. 409]).

Теорема Бера. *Кожна борелівська функція $f\colon X \to Y$ між польськими просторами є неперервною на деякій скрізь щільній G_δ-підмножині $G \subset X$ в сенсі, що звуження $f|G$ — неперервне.*

***Доведення теореми* 1.** Нехай $f\colon X \times Y \to R$ — борелівська нарізно F_σ-вимірна функція, задана на добутку двох польських просторів. Нехай $\overline{X}$, $\overline{Y}$ — метризовні компактифікації польських просторів X, Y відповідно. Зафіксуємо довільну зліченну базу топології $\{U_n\}_{n \in N}$ простору R.

Для кожного $n \in N$ розглянемо борелівську підмножину $B_n = (X \times (\overline{Y} \setminus Y)) \cup \cup f^{-1}(U_n)$ добутку $X \times \overline{Y}$. Із компактності простору $\overline{Y}$, σ-компактності наросту $\overline{Y} \setminus Y$ та F_σ-вимірності відображення f за другою змінною випливає, що перетин $B_n \cap (\{x\} \times \overline{Y})$ є σ-компактом для кожного $x \in \overline{X}$. Застосувавши теорему Сан Ремо, знайдемо таку послідовність $\{\Phi_{n,m}\colon X \to \mathcal{K}(\overline{Y})\}_{m \in N}$ борелівських функцій, що

$$B_n = \bigcup_{m \in N} \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \Phi_{n,m}(x).$$

Згідно зі згаданою вище теоремою Бера, кожна функція $\Phi_{n,m}$ є неперервною на деякій скрізь щільній G_δ-множині $G_{n,m} \subset X$.

Розглянемо скрізь щільну G_δ-множину $G_X = \bigcap_{n,m \in N} G_{n,m}$ в X і зауважимо, що звуження $\Phi_{n,m}|G_X$ є неперервним для всіх $n, m \in N$. Із неперервності функції $\Phi_{n,m}|G_X$ випливає замкненість її графіка $\bigcup_{x\in G_X}\{x\}\times\Phi_{n,m}(x)$ в добутку $G_X\times\overline{Y}$. Тоді множина

$$B_n\cap(G_X\times\overline{Y})=\bigcup_{m\in N}\bigcup_{x\in G_X}\{x\}\times\Phi_{n,m}(x),$$

як зліченне об'єднання замкнених підмножин, є F_σ-множиною в $G_X\times\overline{Y}$. Як наслідок, перетин $B_n\cap(G_X\times Y)=(f|G_X\times Y)^{-1}(U_n)$ є F_σ-множиною в $G_X\times\times Y$. Беручи до уваги, що $\{U_n\}$ є зліченною базою топології простору R, робимо висновок, що звуження $f|G_X\times Y$ є F_σ-вимірною функцією.

Цілком аналогічно знаходимо скрізь щільну G_δ-множину $G_Y\subset Y$, для якої звуження $f|X\times G_Y$ — F_σ-вимірне. За теоремою 2 [4, с. 386], звуження функції f на об'єднання $G_X\times Y\cup X\times G_Y$ є F_σ-вимірною функцією і, за теоремою Лебега – Хаусдорфа – Банаха, це звуження є функцією першого класу Бера. Тепер залишилось зауважити, що множина $G_X\times Y\cup X\times G_Y$ є доповненням до проективно худої підмножини $(X\setminus G_X)\times(Y\setminus G_Y)$ добутку $X\times Y$.

Оскільки кожна функція $f\in CB_1(X\times Y,R)$ на добутку двох польських просторів є борелівською (точніше, 2-го класу Бера [4, с. 387]), із теореми 1 випливає такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Кожна функція $f\in CB_1(X\times Y,R)$ на добутку двох польських просторів є функцією 1-го класу Бера на доповненні $X\times Y\setminus M$ до деякої проективно худої множини $M\subset X\times Y$.*

Обидві умови (борелевість та нарізна F_σ-вимірність) функції f в теоремі 1 є суттєвими. Нагадаємо, що підмножина B топологічного простору X називається *множиною Бернштейна*, якщо для кожного незліченного компакта $K\subset\subset X$ обидві множини $K\cap B$ і $K\setminus B$ є непорожніми. Множина Бернштейна B на відрізку нескладно будується за трансфінітною індукцією (див. [3, с. 48]). Відомо, що для кожної незліченної борелівської підмножини $C\subset[0,1]$ перетин $C\cap B$ не є борелівським. На підставі цього факту нескладно обґрунтувати такий приклад.

***Приклад* 1.** Характеристична функція $\chi_B:[0,1]^2\to\{0,1\}\subset R$ множини Бернштейна $B\subset\Delta$ на діагоналі $\Delta\subset\{(x,y)\in[0,1]^2: x=y\}$ є нарізно F_σ-вимірною, проте для довільної незліченної борелівської підмножини $G\subset[0,1]$ звуження $\chi_B|G^2$ не є функцією першого класу Бера.

Тепер розглянемо інший приклад, який показує, що від нарізної F_σ-вимірності функції f в теоремі 1 теж не можна відмовитись.

***Приклад* 2.** Характеристична функція $\chi_Q:[-1,1]^2\to R$ підмножини $Q==\{(x,y)\in[-1,1]^2: x-y\in Q\}$ є борелівською, проте для кожної скрізь щільної G_δ-множини $G\subset[-1,1]$ звуження $\chi_Q|G^2$ не є функцією першого класу Бера.

Дійсно, припустивши, що це не так, зафіксуємо скрізь щільну G_δ-підмножину $G\subset[-1,1]$ для якої звуження $\chi_Q|G^2$ є функцією першого класу Бера. За теоремою Бера, перетин $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cap\bigcap_{q\in Q\cap(-1/2,1/2)}(G-q)$ є непорожнім і, отже, містить деяку точку x_0. Тоді $x_0\in G-q$ і $x_0+q\in G$ для всіх раціональних точок $q \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Розглянемо вертикальний „відрізок" $I = \{x_0\} \times \times \left(G \cap \left[x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}\right]\right) \subset G^2$ і зауважимо, що множини $I \cap \chi_Q^{-1}(1)$ і $I \cap \chi_Q^{-1}(0)$ є скрізь щільними в I. Тоді звуження $\chi_Q \,|\, I$ — скрізь розривне і, отже, не може бути функцією першого класу Бера.

1. *Maslyuchenko V. K.* Connections between separate and joint properties of several variables functions // Proc. Int. Conf. Fuct. Anal. and Appl. dedicated to the 110th anniversary of S. Banach. – Lviv, 2002. – P. 135.
2. *Михайлюк В. В., Собчук О. В.* Функції з діагонально скінченного класу Бера // Мат. студії. – 2000. – **14**, № 1. – С. 23–28.
3. *Kechris A.* Classical descriptive set theory. – Berlin: Springer, 1995. – 402 p.
4. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
5. *Namioka I.* Separate continuity and joint continuity // Pacif. J. Math. – 1974. – **51**. – P. 515–531.
6. *Todorcevic S.* Topics in topology. – Berlin: Springer, 1997. – 153 p.

Одержано 13.03.2003