УДК 517.983.27

А. Г. Мазко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЗИТИВНЫХ И МОНОТОННЫХ СИСТЕМ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ*

We investigate properties of positive and monotone dynamical systems with respect to prescribed cones in the phase space. We formulate stability conditions for linear and nonlinear differential systems in a partially ordered space. We establish conditions of positivity of dynamical systems with respect to the Minkowski cone. By using the comparison method, we solve the problem of robust stability of a family of systems.

Досліджуються властивості позитивних і монотонних динамічних систем відносно заданих конусів у фазовому просторі. Формулюються умови стійкості лінійних і нелінійних диференціальних систем в напівупорядкованому просторі. Встановлюються умови позитивності динамічних систем відносно конуса Мінковського. Методом порівняння розв'язується задача робастної стійкості сім'ї систем.

1. Введение. Многие реальные системы имеют свойства позитивности и монотонности. Данные свойства присущи некоторым классам систем, описывающих движение и взаимодействие объектов разной природы. Позитивность (монотонность) динамической системы равносильна положительности (монотонности) некоторого оператора, описывающего ее движение, по отношению к заданным конусам фазового пространства. Дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати являются примерами позитивных систем относительно конуса симметричных неотрицательно определенных матриц. Свойства позитивных систем используются в различных задачах анализа и синтеза [1 – 4]. Исследование устойчивости класса линейных позитивных систем сводится к решению алгебраических уравнений, определяемых операторными коэффициентами данных систем [3 – 8].

В настоящей работе изучаются свойства решений позитивных и монотонных динамических систем относительно заданных конусов в полуупорядоченном фазовом пространстве. Приводится обобщенный принцип сравнения систем и условия робастной устойчивости семейства нелинейных систем. Рассматриваются многосвязные системы, которые могут быть использованы для описания физических объектов и процессов в неоднородной среде.

2. Определения и вспомогательные факты. Выпуклое замкнутое множество $\mathcal{K}$ вещественного нормированного пространства $\mathcal{E}$ называется конусом, если $\mathcal{K} \cap -\mathcal{K} = \{0\}$ и $\alpha\mathcal{K} + \beta\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ $\forall\, \alpha, \beta \ge 0$. Сопряженный конус $\mathcal{K}^*$ состоит из линейных функционалов $\varphi \in \mathcal{E}^*$, принимающих неотрицательные значения на элементах $\mathcal{K}$. При этом $\mathcal{K} = \{X \in \mathcal{E} : \varphi(X) \ge 0 \ \ \forall\, \varphi \in \mathcal{K}^*\}$.

Пространство с конусом полуупорядочено: $X \le Y \Leftrightarrow Y - X \in \mathcal{K}$. Конус $\mathcal{K}$ с множеством внутренних точек $\mathcal{K}^0 = \{X : X > 0\} \ne \varnothing$ телесный. Конус $\mathcal{K}$ называется нормальным, если $0 \le X \le Y$ влечет $\|X\| \le c\,\|Y\|$, где c — универсальная константа. Если $\mathcal{E} = \mathcal{K} - \mathcal{K}$, то конус $\mathcal{K}$ воспроизводящий.

Отметим, что свойство нормальности конуса $\mathcal{K}$ эквивалентно условию

$$U \le X \le V \Rightarrow \|X\| \le \alpha\,\|U\| + \beta\,\|V\|, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ — универсальные константы. Действительно, данное условие совпадает с определением нормальности конуса при $U = 0$. Если конус нормальный, то из $0 \le X - U \le V - U$ следует

$$\|X\| - \|U\| \le \|X - U\| \le c\,\|V - U\| \le c\,\|V\| + c\,\|U\|,$$

* Выполнена при частичной поддержке научно-исследовательского проекта № 0102U000917 и Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект № 01.07/096).

и в (1), в частности, можно положить $\alpha = c + 1$, $\beta = c$, где c — константа нормальности конуса $\mathcal{K}$.

Пусть в банаховом пространстве $\mathcal{E}_1(\mathcal{E}_2)$ выделен конус $\mathcal{K}_1(\mathcal{K}_2)$. Оператор $M: \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ называется монотонным, если $MX \geq MY$ при $X \geq Y$. Монотонность линейного оператора равносильна его положительности: $X \geq 0 \Rightarrow \Rightarrow MX \geq 0$. Неравенство между операторами $M \leq L$ означает, что оператор $L - M$ положительный. Если $M\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{K}_2$, то оператор M всюду положительный. Линейный оператор M называется монотонно обратимым, если для любого $Y \in \mathcal{K}_2$ уравнение $MX = Y$ имеет решение $X \in \mathcal{K}_1$. Если $\mathcal{K}_2$ — нормальный воспроизводящий конус и $M_1 \leq M \leq M_2$, то из монотонной обратимости M_1 и M_2 вытекает монотонная обратимость оператора M, причем $M_2^{-1} \leq \leq M^{-1} \leq M_1^{-1}$ [1].

Выделим класс линейных операторов $M = L - P$, $P\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset L\mathcal{K}_1$, где $\mathcal{K}_2$ — нормальный воспроизводящий конус. Критерием монотонной обратимости таких операторов является неравенство $\rho(T) < 1$, где $\rho(T)$ — спектральный радиус пучка операторов $T(\lambda) = P - \lambda L$. Если конус $\mathcal{K}_2$ телесный, то данное неравенство эквивалентно существованию элементов $X \geq 0$ и $Y > 0$, связанных уравнением $MX = Y$.

Отметим, что произвольный линейный оператор, сохраняющий конус эрмитовых неотрицательно определенных матриц, представим в виде [6]

$$MX = \sum_k A_k X A_k^* + \sum_s B_s X^T B_s^*, \quad A_k, B_s \in C^{n\times n}.$$

Пусть $M: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ и в пространстве $\mathcal{E}$ выделены конусы $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_1 = S\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_2 = S^{-1}\mathcal{K}$, где S — некоторый обратимый оператор. Очевидно, соотношения $S\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$, $S\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_1$, $S\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{K}_2$ эквивалентны. Используя свойства функций от оператора, можно установить следующие утверждения:

$$f(M)\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \Leftrightarrow f(M_2)\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_1 \Leftrightarrow f(M_1)\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_2,$$

$$f(M)\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_1 \Leftrightarrow f(M_1)\mathcal{K} \subset \mathcal{K}, \quad f(M)\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_2 \Leftrightarrow f(M_2)\mathcal{K} \subset \mathcal{K},$$

где $M_1 = S^{-1}MS$, $M_2 = SMS^{-1}$. Приведенные соотношения могут быть полезными при изучении условий устойчивости класса позитивных систем.

3. Позитивные и монотонные системы. Рассмотрим динамическую систему с непрерывным или дискретным временем $t \geq \theta$, состояния которой в фазовом пространстве $\mathcal{E}$ определяются соотношениями

$$X(t) = \Omega(t, t_0)X_0, \quad \Omega(t_0, t_0) = E, \quad t \geq t_0 \geq \theta. \tag{2}$$

Здесь $\Omega(t, t_0): \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — оператор, определяющий переход из начального состояния $X(t_0) = X_0$ в состояние $X(t)$ при $t > t_0$, E — тождественный оператор. Если $\Omega(t, t_0)0 \equiv 0$, то $X(t) \equiv 0$ — состояние равновесия системы.

Пусть в пространстве $\mathcal{E}$ выделены конусы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_0$. В дальнейшем будем использовать отношения порядка $\leq$ и $\geq$ ($\trianglelefteq$ и $\trianglerighteq$), порождаемые конусом $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}_0$). Определим следующие свойства системы (2):

$$\Omega(t, t_0)\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \quad \text{(позитивность относительно } \mathcal{K});$$

$$\Omega(t, t_0)\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K} \quad \text{(позитивность относительно } \mathcal{K}_0 \text{ и } \mathcal{K});$$

$$X_0 \leq Y_0 \Rightarrow X(t) \leq Y(t) \quad \text{(монотонность относительно } \mathcal{K});$$

$$X_0 \trianglelefteq Y_0 \Rightarrow X(t) \leq Y(t) \text{ (монотонность относительно } \mathcal{K}_0 \text{ и } \mathcal{K});$$

$$0 \leq X_0 \leq Y_0 \Rightarrow X(t) \leq Y(t) \text{ (монотонность в } \mathcal{K});$$

$$0 \trianglelefteq X_0 \trianglelefteq Y_0 \Rightarrow X(t) \leq Y(t) \text{ (монотонность в } \mathcal{K}_0 \text{ относительно } \mathcal{K}).$$

Здесь $X(t)$ и $Y(t)$ — состояния системы при $t \geq t_0$, $X(t_0) = X_0$, $Y(t_0) = Y_0$.

Очевидно, для непрерывной системы, имеющей одно из приведенных свойств, необходимо включение $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$. При этом из позитивности (монотонности) системы относительно $\mathcal{K}_0$ или $\mathcal{K}$ следует ее позитивность (монотонность) относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{X} + M(t)X = 0, \tag{3}$$

где $M(t)\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — линейный оператор. Произвольное решение системы (3) имеет вид (2), где $\Omega(t, t_0) = W(t, t_0)$ — линейный эволюционный оператор. Свойства позитивности и монотонности системы (3) относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$ равносильны положительности эволюционного оператора. Положительность оператора $W(t, t_0)$ при $t \geq t_0$ равносильна положительности экспоненциального оператора $e^{-M(t)h}$ при $t \geq 0$, $h \geq 0$. Если две системы вида (3) с операторами $M_1(t)$ и $M_2(t)$ позитивны относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$, то таковой является система, описываемая оператором $M_1(t) + M_2(t)$ [7, 9].

Обобщим дифференциальную систему (3) в виде

$$\dot{X} + M(t)X = G(X, t), \tag{4}$$

где $G(X, t)$ — нелинейный оператор, обеспечивающий существование и единственность решения $X(t) \in \mathcal{E}$ при $t \geq t_0$, $X(t_0) = X_0$. Решения системы (4) удовлетворяют интегральному уравнению

$$X(t) = W(t, t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t} W(t, s)G(X(s), s)\,ds,$$

где $W(t, s)$ — эволюционный оператор системы (3). Отсюда следует, что система (4) является позитивной относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$, если $W(t, t_0)\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$, а оператор $W(t, s)G(X, t)$ положительный на конусе $\mathcal{K}$ при любых $t \geq s \geq t_0$.

Приведем условия позитивности и монотонности системы (4) относительно конуса $\mathcal{K}$, использовав сопряженный конус линейных функционалов $\mathcal{K}^*$. Обозначим через $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}$ семейства непрерывных оператор-функций $F(X, t)$, удовлетворяющих при $t \geq \theta$ соответствующим условиям

$$X \in \mathcal{K},\ \varphi \in \mathcal{K}^*,\ \varphi(X) = 0 \ \Rightarrow\ \varphi(F(X, t)) \geq 0,$$

$$X - Y \in \mathcal{K},\ \varphi \in \mathcal{K}^*,\ \varphi(X - Y) = 0 \ \Rightarrow\ \varphi(F(X, t) - F(Y, t)) \geq 0.$$

Лемма 1. *Если конус $\mathcal{K}$ телесный, система* (3) *позитивна относительно $\mathcal{K}$ и $G \in \mathcal{F}_0$ ($G \in \mathcal{F}$), то система* (4) *позитивна* (*монотонна*) *относительно $\mathcal{K}$. Если система* (4) *позитивна* (*монотонна*) *относительно $\mathcal{K}$, то $F \in \mathcal{F}_0$ ($F \in \mathcal{F}$), где $F(X, t) = G(X, t) - M(t)X$.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{Z} = F(Z, t) + \varepsilon Q,$$

где $\varepsilon > 0$ и $Q > 0$ — внутренний элемент $\mathcal{K}$. Пусть $Z(t)$ — ее решение, удовлетворяющее условиям $Z(t_0) = Z_0 \geq 0$, причем $Z(t_1) = Z_1 \in \partial\mathcal{K}$ — точка границы конуса $\mathcal{K}$ при некотором $t_1 \geq t_0$. Тогда $\varphi(Z_1) = 0$ и $\varphi(Q) > 0$ для некоторого $\varphi \in \mathcal{K}^*$ и $\varphi \neq 0$.

Из монотонности экспоненциального оператора $e^{-M(t)h}$ и соотношения

$$M(t)Z = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h}\left(Z - e^{-M(t)h}Z\right)$$

следует неравенство $\varphi(M(t_1)Z_1) \leq 0$. Если к тому же $G \in \mathcal{F}_0$, то $F \in \mathcal{F}_0$ и при условиях непрерывности для некоторого $\delta > 0$ имеем соотношения

$$\varphi(\dot{Z}(t_1)) = \varphi(F(Z_1, t_1)) + \varepsilon\varphi(Q) > 0,$$

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta} \varphi(\dot{Z}(t))dt = \varphi(Z(t_1 + \delta)) > 0.$$

Следовательно, траектория $Z(t)$ не выходит за пределы конуса $\mathcal{K}$ при $t > t_1$, т. е. $Z(t) \geq 0$ при $t_1 \leq t \leq t_1 + \delta$. В противном случае для некоторых $\varphi \in \mathcal{K}^*$ и $\delta > 0$ должно выполняться неравенство $\varphi(Z(t_1 + \delta)) < 0$. В силу замкнутости конуса при $\varepsilon \to 0$ получаем $Z(t) \to X(t) \geq 0$ для любых $Z_0 = X_0 \geq 0$ и $t \geq t_0$, т. е. система (4) позитивна относительно $\mathcal{K}$.

Тот факт, что условие $F \in \mathcal{F}_0$ является необходимым для позитивной относительно $\mathcal{K}$ системы (4), вытекает при достаточно малых значениях $\delta > 0$ из соотношений

$$\varphi(X(t_1 + \delta)) = \delta\varphi(F(\dot{X}(\tau), \tau)), \qquad \varphi(X_1) = 0,$$

где $X(t_1) = X_1 \in \partial\mathcal{K}$, $\varphi \in \mathcal{K}^*$, $t_1 \leq \tau \leq t_1 + \delta$.

Аналогично устанавливаются приведенные необходимые и достаточные условия монотонности системы (4) относительно $\mathcal{K}$.

Лемма доказана.

В случае телесного конуса $\mathcal{K}$ из позитивности (монотонности) относительно $\mathcal{K}$ дифференциальных систем, описываемых операторами $F_1(X, t)$ и $F_2(X, t)$, вытекает позитивность (монотонность) относительно $\mathcal{K}$ дифференциальной системы, описываемой оператором $F(X, t) = F_1(X, t) + F_2(X, t)$.

***Пример* 1.** Нелинейная дифференциальная система

$$\dot{x} + A(t)x = g(x, t), \qquad x \in R^n,$$

где $A(t)$ — матрица с неположительными внедиагональными элементами, является позитивной относительно конуса неотрицательных векторов $\mathcal{K}$, если вектор-функция $g(x, t)$ удовлетворяет условиям [10]

$$x \geq 0, \; x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad g_i(x, t) \geq 0, \; t \geq \theta, \qquad i = \overline{1, n},$$

и монотонной относительно $\mathcal{K}$, если $g(x, t)$ — квазимонотонная неубывающая по x (условие Важевского), т. е.

$$x \leq y, \; x_i = y_i \quad \Rightarrow \quad g_i(x, t) \leq g_i(y, t), \; t \geq \theta, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Если выполняются оба ограничения при $0 \leq x \leq y$, то данная система монотонна в $\mathcal{K}$.

***Пример* 2.** Рассмотрим нелинейную систему управления с динамической обратной связью

4. Устойчивость систем в полуупорядоченном пространстве. Рассмотрим в фазовом пространстве $\mathcal{E}$ динамическую систему, состояния которой описываются в виде (2) и являются непрерывными дифференцируемыми функциями $X(t)$. Пусть $\Omega(t, t_0)0 \equiv 0$ и $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — нормальный, а $\mathcal{K}_0$ — воспроизводящий конусы, порождающие соответствующие отношения порядка в $\mathcal{E}$.

Состояние $X \equiv 0$ системы (2) будем называть устойчивым из $\mathcal{K}_0$ в $\mathcal{K}$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq \theta$ можно указать такое $\delta > 0$, что из $\|X_0\| \leq \delta$ и $X_0 \trianglerighteq 0$ следует $\|X(t)\| \leq \varepsilon$ и $X(t) \geq 0$ при $t > t_0$. Если при этом для некоторого $\delta_0 > 0$ из $\|X_0\| \leq \delta_0$ следует $\|X(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, то решение $X \equiv 0$ асимптотически устойчиво из $\mathcal{K}_0$ в $\mathcal{K}$. Если решение $X \equiv 0$ позитивной относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$ системы (2) устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову, то оно устойчиво (асимптотически устойчиво) из $\mathcal{K}_0$ в $\mathcal{K}$.

Лемма 2. *Пусть состояния системы* (2) *удовлетворяют условиям*

$$X_0 \trianglerighteq 0 \Rightarrow X(t) \geq 0, \qquad \dot{X}(t) \leq 0, \tag{5}$$

$$X_0 = X_+ - X_- \Rightarrow -X_-(t) \leq X(t) \leq X_+(t), \tag{6}$$

где $X_\pm \trianglerighteq 0$, $X_\pm(t) = \Omega(t, t_0)X_\pm$, $t > t_0$. *Тогда состояние* $X \equiv 0$ *данной системы устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. а) $X_0 \in \mathcal{K}_0$. Согласно теореме Лагранжа

$$X(t) - X(t_0) = \dot{X}(\xi)(t - t_0), \qquad \xi \in (t, t_0), \qquad t > t_0.$$

Отсюда с учетом (5) имеем неравенства $0 \leq X(t) \leq X_0$, из которых следует $\|X(t)\| \leq c\|X_0\|$, где c — константа нормальности конуса $\mathcal{K}$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ из $\|X_0\| \leq \delta = \varepsilon / c$ следует $\|X(t)\| \leq \varepsilon$.

b) $X_0 \in \mathcal{E}$. Воспроизводящий конус $\mathcal{K}_0$ имеет свойство несплющенности [1]: $X_0 = X_+ - X_-$ и $\|X_\pm\| \leq \gamma \|X_0\|$, где $\gamma > 0$ — универсальная константа.

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta_\pm$ согласно п. а) так, чтобы из $\|X_\pm\| \leq \delta_\pm$ следовало $\|X_+(t)\| \leq \varepsilon / (2\beta)$ и $\|X_-(t)\| \leq \varepsilon / (2\alpha)$. Для этого можно положить $\delta_+ = \varepsilon / (2\beta c)$ и $\delta_- = \varepsilon / (2\alpha c)$. Если $\|X_0\| \leq \delta$, где $\delta = \min\{\delta_+, \delta_-\} / \gamma$, то с учетом (1) и (6) получаем неравенство

$$\|X(t)\| \leq \alpha \|X_-(t)\| + \beta \|X_+(t)\| \leq \varepsilon.$$

Это означает, что нулевое состояние системы (2) устойчиво.

Лемма доказана.

Условие (5) обеспечивает устойчивость из $\mathcal{K}_0$ в $\mathcal{K}$ нулевого состояния системы (2). Условие (6) всегда имеет место, например, для класса позитивных относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$ систем с линейным оператором $\Omega(t, t_0)$. Условие (6) выполняется также, если оператор $\Omega(t, t_0)$ монотонный, а оператор $\hat{\Omega}(t, t_0)X = \Omega(t, t_0)X + \Omega(t, t_0)(-X)$ положительный относительно конусов $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$ при $t \geq t_0$.

Лемма 3. *Состояние* $X \equiv 0$ *монотонной относительно* $\mathcal{K}_0$ *и* $\mathcal{K}$ *системы* (2) *устойчиво по Ляпунову, если* $\dot{X}(t) \in \mp\mathcal{K}$ *для любых* $X_0 \in \pm\mathcal{K}_0$ *и* $t > t_0$.

Доказательство. Из монотонности оператора $\Omega(t, t_0)$ и условия

$\Omega(t, t_0)0 \equiv 0$ следует, что $X(t) \in \pm\mathcal{K}$ при любом $X_0 \in \pm\mathcal{K}_0$. Если $X_0 \in \mathcal{K}_0$, то $0 \leq X(t) \leq X_0$ и, следовательно, $\|X(t)\| \leq c\|X_0\|$ (см. доказательство леммы 2). Данная оценка выполняется также в случае $X_0 \in -\mathcal{K}_0$, так как при этом $0 \leq$ $\leq -X(t) \leq -X_0$. В общем случае $X_0 = X_+ - X_- \in \mathcal{E}$ и в силу монотонности системы относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$ имеем неравенства $\Omega(t, t_0)(-X_-) \leq X(t) \leq \Omega(t, t_0)X_+$, где $X_\pm \in \mathcal{K}_0$. Отсюда с учетом (1) и несплющенности воспроизводящего конуса $\mathcal{K}_0$ получаем оценку $\|X(t)\| \leq c\gamma(\alpha + \beta)\|X_0\|$, из которой следует устойчивость состояния $X \equiv 0$ системы (2).

Лемма доказана.

При условиях леммы 3 состояние $X \equiv 0$ монотонной относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$ системы (2) имеет свойства устойчивости из $\mathcal{K}_0$ в $\mathcal{K}$ и из $-\mathcal{K}_0$ в $-\mathcal{K}$. Эти свойства обеспечивают устойчивость по Ляпунову состояния $X \equiv 0$ данной системы. Для линейных систем свойства устойчивости из $\mathcal{K}_0$ в $\mathcal{K}$ и из $-\mathcal{K}_0$ в $-\mathcal{K}$ нулевого состояния эквивалентны.

Лемму 3 можно использовать при построении условий устойчивости классов монотонных дифференциальных систем (3) и (4), выраженных в терминах операторов $M(t)$ и $G(X, t)$. Условиями леммы 3 для системы (4) являются неравенства $G(X, t) \leq M(t)X$ и $G(X, t) \geq M(t)X$ на ее решениях с начальными значениями из $\mathcal{K}_0$ и $-\mathcal{K}_0$ соответственно.

При изучении устойчивости состояния $X \equiv 0$ системы (2) можно использовать различные оценки для $X(t)$ или $\Omega(t, t_0)$ относительно конусов $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$. Например, если для любого $X_0 = X_+ - X_- \in \mathcal{E}$ выполняются соотношения

$$-\Delta_-(t, t_0)\left|X_0\right| \leq X(t) \leq \Delta_+(t, t_0)\left|X_0\right|, \qquad t \geq t_0, \tag{7}$$

где $|X_0| = X_+ + X_-$, $X_\pm \in \mathcal{K}_0$, $\Delta_\pm(t, t_0)$ — равномерно ограниченные линейные операторы, то устойчивость состояния $X \equiv 0$ следует из оценки

$$\|X(t)\| \leq 2\gamma(\alpha\nu_- + \beta\nu_+)\|X_0\|, \qquad \nu_\pm = \sup\|\Delta_\pm(t, t_0)\| < \infty,$$

которая устанавливается с помощью (1), (7) и предположений относительно конусов $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$. Аналогичное утверждение справедливо при условии

$$-\Delta_-(t, t_0)X_+ - \Delta_+(t, t_0)X_- \leq X(t) \leq \Delta_+(t, t_0)X_+ + \Delta_-(t, t_0)X_-, \tag{8}$$

которое в случае линейной системы равносильно двусторонней оценке

$$-\Delta_-(t, t_0) \leq \Omega(t, t_0) \leq \Delta_+(t, t_0), \qquad t \geq t_0.$$

Отметим, что при условиях положительности $\Delta_\pm(t, t_0)\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$ операторы $\Delta_\pm(t, t_0)$ в (7) и (8) должны быть ограниченными по норме [2].

Сформулируем следствие лемм 2 и 3 для системы (3) в терминах эволюционного оператора $W(t, t_0)$.

Теорема 1. *Если эволюционный оператор* $W(t, t_0)$ *дифференциальной системы* (3) *удовлетворяет условиям*

$$W(t, t_0)\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}, \qquad M(t)W(t, t_0)\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}, \qquad t > t_0, \tag{9}$$

то данная система устойчива.

Рассмотрим класс линейных стационарных систем

$$\dot{X} + MX = 0. \tag{10}$$

В этом случае $W(t, t_0) = e^{-M(t-t_0)}$ и позитивность системы (10) относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$ равносильна условию $e^{-Mt}\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$, $t \geq 0$. Справедливо следующее утверждение [5, 7].

Теорема 2. *Если система* (10) *позитивна относительно* $\mathcal{K}$, *то она экспоненциально устойчива в том и только в том случае, когда оператор* M *монотонно обратим, т. е.* $\mathcal{K} \subset M\mathcal{K}$. *Если оператор* $M + \gamma I$ *монотонно обратим при любом* $\gamma \geq 0$, *то система* (10) *позитивна относительно* $\mathcal{K}$ *и экспоненциально устойчива.*

Отметим, что при условиях (9) в случае $M(t) \equiv M$ и $\mathcal{K} \subset M\mathcal{K}_0$ выполняются системы включений

a) $\mathcal{K}_0 \subset M\mathcal{K}_0, \quad e^{-Mt}\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_0, \quad t > 0,$

b) $\mathcal{K} \subset M\mathcal{K}, \quad e^{-Mt}\mathcal{K} \subset \mathcal{K}, \quad t > 0,$

каждая из которых обеспечивает экспоненциальную устойчивость системы (10). Если же $M\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$, то условия (9) вытекают из включений a) или b).

В [7, 9] установлены аналогичные условия экспоненциальной устойчивости некоторых классов нестационарных систем (3).

5. Позитивность и устойчивость дискретных систем. Рассмотрим дискретную систему

$$X_{k+1} = M_k X_k + G(X_k, k), \quad k = 0, 1, \dots, \tag{11}$$

где $M_k : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — линейный оператор, $G(X, k)$ — нелинейная оператор-функция, $\mathcal{E}$ — банахово пространство с конусами $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$. Если $X_0 \in \mathcal{K}_0$ влечет $X_k \in \mathcal{K}$ при любом $k = 0, 1, \dots$, то система (11) позитивна относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$.

Каждое решение системы (11) удовлетворяет соотношению

$$X_{k+1} = W_{k0}X_0 + \sum_{s=0}^{k} W_{ks+1}G(X_s, s),$$

где $W_{kk+1} = E$, $W_{ks} = M_k \dots W_s$, $k \geq s$. Поэтому система (11) имеет свойство позитивности относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$, если $W_{k0}\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$ и оператор-функции $W_{ks+1}G(X, s)$ положительны на $\mathcal{K}$ при $k \geq s \geq 0$. В общем случае эти условия не являются необходимыми для позитивности относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$. Если $G(X, k) \equiv 0$, то позитивность системы (11) относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$ равносильна положительности всех операторов W_{k0}, $k \geq 0$.

***Пример* 4.** Рассмотрим дискретную систему управления с динамической обратной связью

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k, \quad u_{k+1} = c^T x_k + du_k, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{12}$$

где x_k — вектор состояния, u_k — управление. Перепишем ее в виде

$$z_{k+1} = Mz_k, \quad M = \begin{bmatrix} A & b \\ c^T & d \end{bmatrix}, \quad z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix},$$

и выделим в фазовом пространстве конус Минковского $\mathcal{K}$ (см. пример 2). Позитивность системы (12) относительно $\mathcal{K}$ равносильна включению $M\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ и с учетом самосопряженности конуса сводится к неравенству $l^T M z \geq 0$, которое должно выполняться при любых $l, z \in \mathcal{K}$. Используя неравенство Коши, получаем достаточное условие позитивности системы (12) относительно $\mathcal{K}$:

$$\sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} + \|b\| + \|c\| \leq d.$$

Принадлежность вектора z конусу $\mathcal{K}$ можно описать в терминах неотрицательно определенных матриц:

$$z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow u \geq 0, \quad u^2 I \geq xx^T \Leftrightarrow S_z = \begin{bmatrix} uI & x \\ x^T & u \end{bmatrix} \geq 0.$$

Поэтому позитивность системы (12) относительно $\mathcal{K}$ равносильна условию

$$S_z \geq 0 \Rightarrow S_{Mz} = \begin{bmatrix} (c^T x + du)I & Ax + bu \\ x^T A^T + ub^T & c^T x + du \end{bmatrix} \geq 0.$$

При этом для любых векторов $z \in \mathcal{K}$ и $v \in R^{n+1}$ должно выполняться неравенство $v^T S_{Mz} v = l_v^T z \geq 0$, где

$$l_v = \begin{bmatrix} v^T S_{g_1} v \\ \vdots \\ v^T S_{g_n} v \\ v^T S_g v \end{bmatrix}, \quad S_{g_i} = \begin{bmatrix} c_i I & a_i \\ a_i^T & c_i \end{bmatrix}, \quad S_g = \begin{bmatrix} dI & b \\ b^T & d \end{bmatrix},$$

$$g_i = \begin{bmatrix} a_i \\ c_i \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix},$$

a_i — столбцы матрицы A, c_i — элементы вектора c, $i = \overline{1, n}$. Условие $l_v \in \mathcal{K}$, эквивалентное неравенству $S_{l_v} \geq 0$, выполняется, если

$$S = \begin{bmatrix} S_g & \cdots & 0 & S_{g_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & S_g & S_{g_n} \\ S_{g_1} & \cdots & S_{g_n} & S_g \end{bmatrix} \geq 0. \tag{13}$$

Если $g > 0$ — внутренняя точка конуса $\mathcal{K}$, то условия позитивности системы (12) относительно $\mathcal{K}$ имеют вид

$$S_g > 0, \quad S_g \geq \sum_i S_{g_i} S_g^{-1} S_{g_i}. \tag{14}$$

Условие $g > 0$ означает, что $d > \sqrt{b^T b}$. Если $d = \sqrt{b^T b} > 0$, то для позитивности системы относительно $\mathcal{K}$ необходимо $A = d^{-1} b c^T$.

Асимптотическая устойчивость системы (12) равносильна каждому из условий a) $|\lambda| < 1$, $\lambda \in \sigma(M)$ и b) $M^k \to 0$, $k \to \infty$. Если выполняются неравенства (13) или (14), то критериями асимптотической устойчивости системы являются также следующие условия: c) матрица $I - M$ — монотонно обратима, d) для некоторого $w > 0$ уравнение $z - Mz = w$ имеет решение $z \geq 0$. Данные условия могут быть использованы при нахождении параметров динамического компенсатора c и d, стабилизирующего систему (12).

6. Системы сравнения. В разнообразных прикладных и теоретических исследованиях применяются методы сравнения, основанные на отображении пространства состояний изучаемой системы в пространства состояний вспомогательных систем. В задачах анализа устойчивости в качестве систем сравнения целесообразно использовать классы позитивных и монотонных систем относительно подходящих конусов, а также нелинейные системы, удовлетворяющие условиям теорем типа Чаплыгина и Важевского [12, 13].

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in \mathcal{X}, \quad t \geq t_0, \tag{15}$$

где f — оператор, обеспечивающий существование единственного решения $x(t)$ со значениями в фазовом банаховом пространстве $\mathcal{X}$. Пусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство, полуупорядоченное нормальным конусом $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$. Построим в пространстве $\mathcal{E}$ классы дифференциальных систем

$$\dot{X} = F(X, t), \quad X \in \mathcal{E}, \quad t \geq t_0, \tag{16}$$

используемые в качестве систем сравнения для системы (15). Неравенства в $\mathcal{E}$ между значениями функций в начальный момент времени t_0 будем определять относительно некоторого воспроизводящего конуса $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$.

Через Σ_+ обозначим класс систем (16), между решениями которых и решениями соответствующих дифференциальных неравенств

$$\dot{Z} \leq F(Z, t), \quad Z \in \mathcal{E}, \quad t \geq t_0, \tag{17}$$

можно установить такое соответствие, что из $Z(t_0) \trianglelefteq X(t_0)$ следует $Z(t) \leq X(t)$ при $t > t_0$. Очевидно, каждая система класса Σ_+ является монотонной относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$. Если $F(0, t) \geq 0$, то система (16) класса Σ_+ позитивна и монотонна относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$.

Пусть $V(x, t)$ — оператор, непрерывно отображающий некоторую окрестность точки $0 \in \mathcal{X}$ при $t \geq t_0$ в пространство $\mathcal{E}$. Если выражение $V(x, t)$ и его обобщенная производная в силу системы (15) удовлетворяют соотношению

$$D_t V(x, t)\big|_{(15)} \leq F\big(V(x, t), t\big), \tag{18}$$

то система (16) класса Σ_+ является верхней системой сравнения, т. е.

$$V\big(x(t_0), t_0\big) \trianglelefteq X(t_0) \Rightarrow V\big(x(t), t\big) \leq X(t), \quad t > t_0. \tag{19}$$

В (18) производную в силу системы (15) можно определить в виде

$$D_t V(x, t)\big|_{(15)} = \limsup_{h \to 0+} \frac{1}{h}\left[V(x + hf(x, t), t + h) - V(x, t) \right].$$

Аналогично вводятся класс систем Σ_- и нижние системы сравнения (16) для системы (15); при этом все знаки неравенств в (17) – (19), определяемые конусами $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$ в пространстве $\mathcal{E}$, заменяются на противоположные.

Через $\mathcal{F}_\pm$ обозначим семейства операторов $F(X, t)$, описывающих соответствующие классы систем $\Sigma_\pm$ вида (16). Если $F \in \mathcal{F}_+$ или $F \in \mathcal{F}_-$, то система (16) является монотонной относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$.

Если потребовать, чтобы вместо (18) выполнялось равенство

$$D_t V(x, t)\big|_{(15)} = F\big(V(x, t), t\big), \tag{20}$$

то из определения монотонности системы (16) относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$ имеем

$$X_1(t_0) \trianglelefteq V\big(x(t_0), t_0\big) \trianglelefteq X_2(t_0) \Rightarrow X_1(t) \leq V\big(x(t), t\big) \leq X_2(t) \quad \forall\, t \geq t_0, \tag{21}$$

где $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — некоторые решения системы (16). Поэтому соотношение (20) определяет класс монотонных относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$ систем (16), выступающих одновременно в качестве нижних и верхних систем сравнения для системы (15).

Оценки (19) и (21) можно использовать для сравнения динамических свойств систем (15) и (16), а также при построении области притяжения в фазовом пространстве системы (15). Например, если оператор V выбран так, что неравенство $V(x,t)\le 0$ возможно лишь при $x=0$, то при условиях (19) и $X(t)\to 0$ имеем $x(t)\to 0$, $t\to\infty$.

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{E}$ две системы

$$\dot X_1 = F_1(X_1,t), \quad X_1\in\mathcal{E}, \quad t\ge t_0, \tag{22}$$

$$\dot X_2 = F_2(X_2,t), \quad X_2\in\mathcal{E}, \quad t\ge t_0, \tag{23}$$

классов Σ_- и Σ_+ соответственно. Если предположить, что

$$F_1(V(x,t),t) \le D_t V(x,t)\big|_{(15)} \le F_2(V(x,t),t), \quad t\ge t_0, \tag{24}$$

то решение исходной системы (15) удовлетворяет оценке (21), где $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — решения соответствующих систем (22) и (23).

Пусть исходная система (15) и системы сравнения (22) и (23) имеют изолированные состояния равновесия, т. е. $f(0,t)\equiv 0$, $F_1(0,t)\equiv 0$ и $F_2(0,t)\equiv 0$. Потребуем, чтобы оператор V имел дополнительные свойства

$$V(0,t)\equiv 0, \quad V(x,t)\ne 0, \quad x\ne 0, \quad t\ge t_0. \tag{25}$$

Теорема 3. *Пусть* $F_1\in\mathcal{F}_-$, $F_2\in\mathcal{F}_+$ *и оператор* V *удовлетворяет соотношениям* (24) *и* (25). *Тогда нулевое решение системы* (15) *устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову, если устойчивы (асимптотически устойчивы) соответственно из* $-\mathcal{K}_0$ *в* $-\mathcal{K}$ *и из* $\mathcal{K}_0$ *в* $\mathcal{K}$ *нулевые решения систем* (22) *и* (23).

Доказательство. Поскольку конус $\mathcal{K}_0$ воспроизводящий и имеет свойство несплющенности, то

$$-X_-^0 \trianglelefteq V(x_0,t_0) = X_+^0 - X_-^0 \trianglelefteq X_+^0, \qquad \|X_\pm^0\| \le \gamma\|V(x_0,t_0)\|,$$

где $X_\pm^0\in\mathcal{K}_0$, $\gamma>0$ — универсальная константа.

Пусть $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — решения систем (22) и (23) с начальными условиями $X_1(t_0)=-X_-^0$ и $X_2(t_0)=X_+^0$. Вследствие того, что $F_1\in\mathcal{F}_-$ и $F_2\in\mathcal{F}_+$, $X_1(t)\le$ ≤ 0 и $X_2(t)\ge 0$ при $t\ge t_0$. С учетом (21) и нормальности конуса $\mathcal{K}$ имеем

$$\|V(x(t),t)\| \le \alpha\|X_1(t)\| + \beta\|X_2(t)\|, \quad t>t_0,$$

где $\alpha>0$ и $\beta>0$ — универсальные константы.

Из непрерывности функции $V(x,t)$ и условий (25) следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta_0>0$ такое, что $\|x(t)\|\le\varepsilon$, лишь только $\|V(x(t),t)\|\le\delta_0$. Используем свойства устойчивости из $-\mathcal{K}_0$ в $-\mathcal{K}$ и из $\mathcal{K}_0$ в $\mathcal{K}$ нулевых решений систем (22) и (23) соответственно. Подберем $\delta_1>0$ и $\delta_2>0$ так, чтобы из $\|X_-^0\|\le\delta_1$ и $\|X_+^0\|\le\delta_2$ следовали соответствующие неравенства

$$\|X_1(t)\| \le \frac{\delta_0}{2\alpha}, \quad \|X_2(t)\| \le \frac{\delta_0}{2\beta}, \quad t>t_0.$$

Наконец, выберем $\delta>0$ так, чтобы из $\|x_0\|\le\delta$ следовало $\|V(x_0,t_0)\|\le$ $\le\min\{\delta_1,\delta_2\}/\gamma$. Тогда с учетом изложенных рассуждений получаем $\|x(t)\|\le$ $\le\varepsilon$ при $t>t_0$, т. е. нулевое решение системы (15) устойчиво по Ляпунову. При этом $\|x(t)\|\to 0$, если $\|X_1(t)\|\to 0$ и $\|X_2(t)\|\to 0$ при $t\to\infty$.

Теорема доказана.

Анализ устойчивости нулевого решения системы (15) можно проводить на основе построения лишь верхних систем сравнения при дополнительных ограничениях на оператор V.

Теорема 4. *Пусть* $F \in \mathcal{F}_+$, *оператор* V *удовлетворяет соотношениям* (18), (25) *и* $V(x, t) \geq 0$ *при* $x \in X$ *и* $t \geq t_0$. *Тогда нулевое решение системы* (15) *устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову, если устойчиво (асимптотически устойчиво) из* $\mathcal{K}_0$ *в* $\mathcal{K}$ *нулевое решение системы* (16).

Доказательства теорем 3 и 4 аналогичны.

Замечание. При условиях теоремы 4 система сравнения (16) должна быть позитивной относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$. При построении позитивных или монотонных относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$ верхних систем сравнения (16) оператор V можно выбирать из класса положительных операторов. Теорема 4 сохраняет силу, если вместо условия $V(x, t) \geq 0$ потребовать, чтобы в некоторой окрестности точки $x = 0$ для некоторого $\varphi_0 \in \mathcal{K}^*$ выполнялось более слабое ограничение $\varphi_0(V(x, t)) > 0$, $x \neq 0$, $t \geq t_0$.

В качестве примера для линейной системы $\dot{x} = A(t)x$, $x \in R^n$, приведем верхнюю матричную систему сравнения

$$\dot{X} = A(t)X + XA(t)^T + P(t)X + Y(t), \qquad X \in R^{n\times n}, \tag{26}$$

построенную на основе (18) с оператором $V(x) = xx^T$. Здесь $P(t)$ — линейный оператор, монотонный относительно конуса симметричных неотрицательно определенных матриц $\mathcal{K}$, $Y(t) = Y(t)^T \geq 0$. Уравнение (26) является системой класса Σ_+, позитивной относительно $\mathcal{K}$. Из асимптотической устойчивости данного уравнения следует асимптотическая устойчивость исходной системы.

Отметим, что нижние и верхние системы сравнения для системы (15) можно строить в различных полуупорядоченных пространствах $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$. При этом свойства соответствующих операторов $V_1(x, t)$ и $V_2(x, t)$, а также отношения порядка, определяемые конусами $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{E}_1$ и $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{E}_2$ в соотношениях

$$V_1(x(t), t) \geq X_1(t), \quad V_2(x(t), t) \leq X_2(t), \quad t \geq t_0,$$

должны быть согласованы с целью изучения определенных характеристик исходной системы (15). Например, можно потребовать, чтобы система неравенств $V_1(x, t) \geq 0$ и $V_2(x, t) \leq 0$ выполнялась лишь при $x = 0$. В этом случае следует ожидать, что $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$, если $X_1(t) \to 0$, $X_2(t) \to 0$, где $X_1(t)$ $(X_2(t))$ — решение нижней (верхней) системы сравнения.

7. Робастная устойчивость семейства систем. В прикладных исследованиях возникает задача об устойчивости заданного семейства систем, описываемых дифференциальными или разностными уравнениями с неопределенными параметрами (задача робастной устойчивости). Изложим методику анализа робастной устойчивости семейства систем

$$\dot{X} = F(X, t), \quad F(0, t) \equiv 0, \tag{27}$$

$$\underline{F}(X, t) \leq F(X, t) \leq \overline{F}(X, t), \quad X \subset \mathcal{E}, \quad t \geq t_0, \tag{28}$$

где неравенства определяются нормальным конусом $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$. Неравенства между значениями функций в начальный момент времени t_0 по-прежнему определяем относительно воспроизводящего конуса $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$.

Выделим в семействе (27), (28) две системы

$$\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X}, t), \quad \underline{F}(0, t) \equiv 0, \tag{29}$$

$$\dot{\overline{X}} = \overline{F}(\overline{X}, t), \quad \overline{F}(0, t) \equiv 0. \tag{30}$$

Если $\underline{F} \in \mathcal{F}_-$ и $\overline{F} \in \mathcal{F}_+$, то решения каждой системы данного семейства ограничены соответствующими решениями систем (29) и (30), т. е.

$$\underline{X}(t_0) \trianglelefteq X(t_0) \trianglelefteq \overline{X}(t_0) \Rightarrow \underline{X}(t) \leq X(t) \leq \overline{X}(t) \quad \forall\, t \geq t_0. \tag{31}$$

Поэтому (29) и (30) можно рассматривать соответственно в качестве нижней и верхней систем сравнения для системы (27). Полагая в теореме 3 $V(X, t) \equiv X$, получаем следующие условия робастной устойчивости семейства систем (27), (28).

Теорема 5. *Если* $\underline{F} \in \mathcal{F}_-$, $\overline{F} \in \mathcal{F}_+$ *и нулевые решения систем* (29) *и* (30) *устойчивы* (*асимптотически устойчивы*) *соответственно из* $-\mathcal{K}_0$ *в* $-\mathcal{K}$ *и из* $\mathcal{K}_0$ *в* $\mathcal{K}$, *то устойчиво* (*асимптотически устойчиво*) *по Ляпунову нулевое решение каждой системы семейства* (27), (28).

При использовании теорем 3 – 5 требуется установить принадлежность операторов классам $\mathcal{F}_\pm$. Если $\mathcal{E} = R^n$, то классам $\mathcal{F}_\pm$, определенным с помощью конуса неотрицательных векторов, принадлежат функции, удовлетворяющие условиям Важевского. Обобщенное свойство квазимонотонности относительно конуса $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ имеют оператор-функции $F \in \mathcal{F}$ (см. п. 3).

Лемма 4. *Если конус* $\mathcal{K}$ *телесный, то* $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_+ \cap \mathcal{F}_-$.

Доказательство. Используем метод доказательства леммы 1. Пусть $F \in \mathcal{F}$ и функции $Y(t)$ и $Z(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\dot{Y} = F(Y, t) + \varepsilon Q, \qquad \dot{Z} \leq F(Z, t), \qquad t \geq t_0,$$

где $\varepsilon > 0$, $Q > 0$, причем для некоторых $\varphi \in \mathcal{K}^*$ и $\tau \geq t_0$

$$Z(\tau) \leq Y(\tau), \qquad \varphi(Z(\tau)) = \varphi(Y(\tau)),$$
$$\varphi(Z(t)) > \varphi(Y(t)), \qquad \tau < t \leq \tau + \delta.$$

Учитывая предположения, получаем неравенства

$$\dot{Y}(\tau) - \dot{Z}(\tau) \geq F(Y(\tau), \tau) - F(Z(\tau), \tau) + \varepsilon Q,$$
$$\varphi\big(\dot{Y}(\tau) - \dot{Z}(\tau)\big) \geq \varepsilon \varphi(Q) > 0.$$

Поэтому для некоторого $\delta > 0$

$$\int_\tau^{\tau+\delta} \varphi\big(\dot{Y}(t) - \dot{Z}(t)\big) dt = \varphi(Y(\tau + \delta)) - \varphi(Z(\tau + \delta)) \geq 0,$$

что противоречит предположению.

Следовательно, $Z(t) \leq Y(t)$ и при $\varepsilon \to 0$ получаем $Z(t) \leq X(t)$, где $X(t)$ — решение системы (27), т. е. $F \subset \mathcal{F}_+$. При этом неравенство $Z(t_0) \trianglelefteq X(t_0)$ можно рассматривать относительно произвольного конуса $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$. Аналогично, $F \subset \subset \mathcal{F}_-$.

Лемма доказана.

8. Многосвязные системы. Функционирование взаимосвязанных объектов, объединенных в крупномасштабную систему, можно описать в виде

$$\dot{X}_i + A_i(t) X_i = G_i(X, t), \qquad t \geq t_0, \qquad i = \overline{1, s}, \tag{32}$$

где $X_i \in \mathcal{E}_i$ — состояния подсистем, образующие фазовый вектор $X \in \mathcal{E}$, $A_i(t)$ — заданные операторы, G_i — функции связи. При изучении условий устойчивости решений таких систем необходимо учитывать структуру фазового пространства $\mathcal{E}$, которое может быть неоднородным в силу физических свойств составляющих подсистем (см., например, [14, 15]).

Пусть $\mathcal{E}_i = R^{n_i}$ и в системе (32) выделена доминирующая подсистема с вектором $X_s = U$ в том смысле, что из $X(t_0) \in \mathcal{K}_0$ при $t > t_0$ следует

$$X(t) \in \mathcal{K}_\alpha = \left\{ X \in R^n : \max_{1 \le i \le s-1} \| X_i \| \le (1+\alpha) \min_{1 \le j \le n_s} u_j \right\}, \tag{33}$$

где $\alpha \ge 0$, $n = n_1 + \ldots + n_s$, u_j — компоненты вектора U. В качестве U можно использовать, например, вектор управления. Можно показать, что множество $\mathcal{K}_\alpha$ является нормальным телесным конусом в $\mathcal{E}$. Поэтому условие (33) выражает свойство позитивности системы относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_\alpha$.

При использовании леммы 2 наряду с (33) должно выполняться условие

$$\max_{1 \le i \le s-1} \| A_i(t) X_i - G_i(X, t) \| \le \min_{1 \le j \le n_s} \left(\sum_k a_{jk}^{(s)}(t) u_k - g_{sj}(X, t) \right),$$

где $a_{jk}^{(s)}(t)$ — элементы матрицы $A_s(t)$. Если система (32) монотонна относительно $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_\alpha$, то устойчивость ее решений может быть установлена с помощью леммы 3.

1. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
2. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С. и др.* Однопараметрические полугруппы. – М.: Мир, 1992. – 352 с.
3. *Мильштейн Г. Н.* Экспоненциальная устойчивость положительных полугрупп в линейном топологическом пространстве // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 9. – С. 35 – 42.
4. *Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю.* Об устойчивости решений автономных систем Важевского // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 8. – С. 1392 – 1407.
5. *Мазко А. Г.* Устойчивость линейных позитивных систем // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 323 – 330.
6. *Мазко А. Г.* Локализация спектра и устойчивость динамических систем // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 1999. – **28**. – 216 с.
7. *Мазко А. Г.* Устойчивость и сравнение систем в полуупорядоченном пространстве // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. – 2002. – **8**, вып. 1(15). – С. 24 – 48.
8. *Мазко А. Г.* Устойчивость динамических систем в пространствах с конусами // Вопросы механики и ее применений: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **44**. – С. 168 – 183.
9. *Мазко А. Г.* Позитивные и монотонные системы в полуупорядоченном пространстве // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 164 – 173.
10. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. – 332 с.
11. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ. – М.: Наука, 1969. – 478 с.
12. *Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н.* Метод сравнения в математической теории систем. – Новосибирск: Наука, 1980. – 480 с.
13. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 248 с.
14. *Siljak D. D.* Large-scale dynamic systems: stability and structure. – New York: North Holland, 1978. – 416 p.
15. *Martynyuk A. A.* Qualitative methods in nonlinear dynamics: novel approaches to Liapunov's matrix functions. – New York: Marcel Dekker, Inc., 2002. – 301 p.

Получено 04.03.2003