УДК 62.5

М. Тухтасинов (Нац. ун-т Узбекистана, Ташкент)

О СТАРТОВОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ

Within the framework of the theory of games, we consider the problem of starting control of oscillations of string points according to a given rule. As control parameters for players, the initial position and the starting string speed are taken. We establish the optimal control of players both for discrete and continuous cases.

У постановці теорії ігор розглянуто задачу стартового керування коливаннями точок струни за даним законом. Параметрами керування для гравців є початкове положення та початкова швидкість струни. Знайдено оптимальне керування гравців як для дискретного, так і для неперервного випадку.

В работах [1–8] изучены задачи управления колебательными системами. В настоящей работе задача стартового управления колебаниями струны изучается в постановке теории игр, при этом управляющими параметрами игроков являются начальные положение и скорость струны.

С целью сокращения записи все результаты, полученные для дискретных и непрерывных игр, формулируются параллельно (в скобках указывается непрерывный случай).

1. Постановка задачи. Как известно, колебание однородной струны длины l описывается уравнением [9]

$$Z_{tt} = a^2 Z_{xx} + f(t, x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

с граничными

$$Z(t, 0) = Z(t, l) = 0, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

и начальными

$$Z(0, x) = \varphi(x), \quad Z_t(0, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{3}$$

условиями, где функция $f(\cdot, \cdot)$ означает внешнюю силу, действующую на струну.

Если отрезок $[0, l]$ разбить равномерно на $N + 1$ частей и ввести обозначения

$$Z_i(t) = Z(t, ih), \quad \varphi_i = \varphi(ih), \quad \psi_i = \psi(ih),$$

$$f_i(t) = h^2 f(t, ih), \quad h = \frac{l}{N+1},$$

то получим

$$Z_{xx}(t, ih) \approx \frac{Z_{i-1}(t) - 2Z_i(t) + Z_{i+1}(t)}{h^2}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$Z_0(t) \equiv Z_{N+1}(t) \equiv 0, \quad t \geq 0.$$

Тогда задаче (1)–(3) можно поставить в соответствие следующую систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{Z}_1 = -2Z_1 + Z_2 + f_1(t),$$

$$\ddot{Z}_2 = Z_1 - 2Z_2 + Z_3 + f_2(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ddot{Z}_i = Z_{i-1} - 2Z_i + Z_{i+1} + f_1(t), \tag{4}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ddot{Z}_{N-1} = Z_{N-2} - 2Z_{N-1} + Z_N + f_{N-1}(t),$$

$$\ddot{Z}_N = Z_{N-1} - 2Z_N + f_N(t)$$

с начальными условиями

$$Z_i(0) = \varphi_i, \quad \dot{Z}_i = \psi_i, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{5}$$

Здесь коэффициент $\frac{a^2}{h^2}$ полагается равным 1; этого можно добиться путем изменения масштаба времени t.

Определение. *Функции* $m_j(t)$, $0 \le t \le T$, $j = 1, \ldots, s$, *называются реализуемыми для индексов* $i_1, \ldots, i_s$ *системы* (4) (*для точек* $x_1, \ldots, x_s \in (0, l)$ *струны*), *если существуют векторы* $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_N)$ (*функции* $\varphi(\cdot)$ *и* $\psi(\cdot)$ *из пространств* $W_2^1(0, l)$ *и* $L_2(0, l)$ *соответственно*) *такие, что соответствующее решение* $Z = Z(t)$, $0 \le t \le T$, *задачи* (4), (5) ((1)–(3)) *удовлетворяет равенствам*

$$Z_{i_j}(t) \equiv m_j(t) \quad \bigl(Z(t, x_j) = m_j(t)\bigr), \quad 0 \le t \le T, \quad j = 1, \ldots, s. \tag{6}$$

Через F_m, G_m обозначим множества векторов $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_N)$ (функций $\varphi(\cdot) \in W_2^1(0, l)$, $\psi(\cdot) \in L_2(0, l)$) соответственно таких, что решение $Z = Z(t)$, $t \ge 0$, системы (4) ((1), (2)) с начальными

$$Z(0) = \varphi, \quad \dot{Z}(0) = \psi \quad \bigl(Z(0, x) = \varphi(x), \dot{Z}(0, x) = \psi(x)\bigr)$$

условиями удовлетворяет условию (6).

Чтобы получить игровую трактовку рассматриваемой задачи, введем функционал

$$K(\varphi, \psi) = \alpha\|\varphi\| - \beta\|\psi\| + \gamma(\varphi, \psi), \tag{7}$$

где α, β, γ — неотрицательные константы, $\|\cdot\|$ и $(\cdot, \cdot)$ — евклидова норма и скалярное произведение в R^n (в $L_2(0, l)$). Первый игрок минимизирует (7) по управлениям $\varphi(\varphi(\cdot)) \in F_m$, а второй максимизирует по управлениям $\psi(\psi(\cdot)) \in G_m$. Таким образом, получим игру двух лиц $\langle F_m, G_m, K\rangle$.

Задача. При данных реализуемых функциях $m_j(\cdot)$, $j = 1, \ldots, s$, решить игру $\langle F_m, G_m, K\rangle$, т. е. найти ситуации равновесия (седловые точки функционала (7)) и цену игры.

2. О структурах области управляемости F_m и G_m. Пусть u, v, $v \ne 0$, — действительные числа. Будем говорить, что они соизмеримы (несоизмеримы), если частное u / v-число рационально (иррационально). В дальнейшем предполагаем, что $T \ge \frac{2l}{a}$.

Лемма 1. *Для того чтобы каждое из множеств* F_m *и* G_m *содержало только один элемент, необходимо и достаточно, чтобы числа* $i_1, \ldots, i_s$, $N + 1$ *не имели общего делителя* (*хотя бы одно из чисел* $x_1, \ldots, x_s$ *было несоизмеримо с* l).

Эта лемма становится очевидной в непрерывном случае, когда все числа $x_1, \ldots, x_s$ соизмеримы с l. Действительно, решение задачи (1) – (3) имеет вид [9]

$$Z(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n\cos(\lambda_n at)+\psi_n(\lambda_n a)^{-1}\sin(\lambda_n at)\;+\right.$$

$$\left.+\;(\lambda_n a)^{-1}\int_0^t f_n(\tau)\sin(\lambda_n a(t-\tau))d\tau\right)\sin(\lambda_n x), \tag{8}$$

где $\lambda_n=\dfrac{\pi n}{l}$; φ_n, ψ_n, $f_n(\cdot)$ — коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(\cdot, x)$ по системе $\{\sin(\lambda_n, x)\}$. Тогда в равенствах

$$Z(t,x_j)\;=\;m_j(t),\quad 0\le t\le T,\quad j=1,\dots,s,$$

по крайней мере, коэффициенты φ_n, ψ_n, индексы которых кратны числу $q_1\dots q_s$, вообще говоря, являются произвольными числами (здесь $q_1,\dots,q_s$ — знаменатели рациональных чисел $\dfrac{x_1}{l},\dots,\dfrac{x_s}{l}$ соответственно). Отсюда следует неединственность элементов множеств F_m и G_m.

Доказательство. *Дискретный случай. Необходимость.* Пусть каждое из множеств F_m и G_m содержит единственный элемент, но $(i_1,\dots,i_s,N+1)=p>$ >1. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\ddot Z_1\;&=\;-2Z_1+Z_2,\\ \ddot Z_2\;&=\;Z_1-2Z_2+Z_3,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \ddot Z_{p-2}\;&=\;Z_{p-3}-2Z_{p-2}+Z_{p-1},\\ \ddot Z_{p-1}\;&=\;Z_{p-2}-2Z_{p-1}.\end{aligned}\tag{9}$$

Выберем нетривиальное решение $\overline{Z}_i=\overline{Z}_i(t)$, $0\le t\le T$, $i=1,\dots,p-1$, системы (9). Тогда непосредственной подстановкой можно убедиться, что вектор-функция

$$\overline{Z}(t)\;=\;\left(\overline{Z}_1(t),\dots,\overline{Z}_{p-1}(t),0,-\overline{Z}_{p-1}(t),\dots,-\overline{Z}_1(t),0,\overline{Z}_1(t),\dots,\overline{Z}_{p-1}(t),0,\dots\right),$$
$$0\le t\le T,$$

является нетривиальным решением однородной системы (4).

Пусть единственным элементам множеств F_m и G_m соответствует решение $Z^0=Z^0(t)$, $0\le t\le T$, системы (4). Тогда $Z(t)\;=\;Z^0(t)+\overline{Z}(t)$, $0\le t\le T$, также является решением системы (4) и $Z_{i_j}(t)=m_j(t)$, $0\le t\le T$, $j=1,\dots,s$. Отсюда имеем $Z(0)\in F_m$, $\dot Z(0)\in G_m$. Однако, либо $Z(0)\ne Z^0(0)$, либо $\dot Z(0)\ne\dot Z^0(0)$ (в силу нетривиальности решения $\overline{Z}_i(t)$, $0\le t\le T$, $j=1,\dots,p-1$, системы (9)), а это противоречит единственности элементов множеств F_m и G_m.

Достаточность. Пусть $(i_1,\dots,i_s,N+1)=1$. Покажем, что каждое из множеств F_m и G_m содержит единственный элемент. Допустим противное, т. е. или F_m, или G_m содержит более одного элемента. Решения системы (4), соответствующие этим двум различным элементам, обозначим через $Z'(t)$, $Z''(t)$, $0\le t\le T$. Заметим, что по определению F_m, G_m : $Z'_{i_j}(t)\equiv Z''_{i_j}(t)\equiv m_j(t)$, $0\le t\le T$, $j=1,\dots,s$.

Введем обозначение $\varphi(t)=Z'(t)-Z''(t)$, $0\le t\le T$, и покажем, что $\varphi(t)\equiv 0$, $0\le t\le T$. После подстановки $\varphi(t)$ в (4) получим

$$\ddot\varphi_1\;=\;-2\varphi_1+\varphi_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\ddot{\varphi}_{i_j-1}(t) = \varphi_{i_j-2}(t) - 2\varphi_{i_j}(t),$$
$$0 = \varphi_{i_j-1}(t) + \varphi_{i_j+1}(t),$$
$$\ddot{\varphi}_{i_j+1}(t) = -2\varphi_{i_j+1}(t) + \varphi_{i_j+2}(t), \tag{10}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ddot{\varphi}_N(t) = \varphi_{N-1}(t) - 2\varphi_N(t), \quad 0 \le t \le T, \quad j = 1, \ldots, s.$$

Тогда, положив $i_0 = 0$, $i_{s+1} = N + 1$, очевидно, будем иметь

$$\varphi_j(t) \equiv 0, \quad 0 \le t \le T, \quad j = i_0, \ldots, i_{s+1}.$$

1. Пусть $n_1 = \min|i_j - i_k| = |i' - i''|$, где минимум берется по всем j, k таким, что $j \ne k$, j, $k = 0, 1, \ldots, s + 1$. Используя систему (10), можно убедиться, что $\varphi_{i'+kn_1}(t) \equiv 0$, $0 \le t \le T$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, но множество, состоящее из этих новых индексов $\left(\{i' + kn\}\right)$, не содержит всех индексов вида $i_0, i_1, \ldots, i_{s+1}$ (здесь предполагается, что $n_1 > 1$), иначе $(i_0, i_1, \ldots, i_{s+1}) = n_1$ — противоречие. Переобозначим через $j_0, \ldots, j_{r+1}$ все индексы j, для которых $\varphi_j(t) \equiv 0$, $0 \le t \le T$.

2. Пусть $n_2 = \min|j_t - j_k| = |j' - j''|$, где минимум берется по всем t, k таким, что $t \ne k$, $t, k = 0, 1, \ldots, r + 1$. Снова используя систему (10), можно убедиться, что $\varphi_{j'+kn_2}(t) \equiv 0$, $0 \le t \le T$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Но множество этих новых индексов $(\{j' + kn_2\})$ не может содержать все индексы вида $i_0, i_1, \ldots, i_{s+1}$ (при $n_2 > 1$), иначе $(i_0, i_1, \ldots, i_{s+1}) = n_2$ — противоречие. Поскольку $n_2 < n_1$, продолжив этот процесс, убедимся, что на каждом шаге итерации множество индексов вида $\{i_j\}$ увеличивается, по крайней мере, на один элемент. Поэтому за конечное число шагов итерации получим $\varphi_i(t) = 0$, $0 \le t \le T$, $i = 1, \ldots, N$, следовательно, $\dot{\varphi}_i(t) = 0$, $0 \le t \le T$, $i = 1, \ldots, N$, что противоречит неединственности элементов множеств F_m и G_m.

Непрерывный случай. Необходимость. Пусть каждое из множеств F_m и G_m состоит из одного элемента, но, несмотря на это, все числа $x_1, \ldots, x_s$ соизмеримы с l: $\dfrac{x_j}{l} = \dfrac{p_j}{q_j}$, где p_j, q_j, $j = 1, \ldots, s$, — целые числа. Тогда для решения задачи (1) – (3) имеем (см. (8))

$$Z(t, x_j) = m_j(t), \quad 0 \le t \le T, \quad j = 1, \ldots, s. \tag{11}$$

Поскольку при $n = q, 2q, \ldots$ $(q = q_1 \ldots q_s)$ $\sin\left(\dfrac{\pi n p_j}{q_j}\right) = 0$, $j = 1, \ldots, s$, это означает неединственность элементов множеств F_m и G_m — противоречие.

Достаточность. Допустим, что хотя бы одно из чисел $x_1, \ldots, x_s$ несоизмеримо с l. Пусть для простоты это будет x_1, тогда, очевидно,

$$\sin(\lambda_n x_1) \ne 0, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{12}$$

В силу (12), реализуемости $m_1(\cdot)$ и линейной независимости функций $\sin(\lambda_n at)$, $\cos(\lambda_n at)$, $0 \le t \le \dfrac{2l}{a}$, $n = 1, 2, \ldots$, однозначно определяются φ_n, ψ_n в (11) при $j = 1$. Отсюда следует единственность начальных функций $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$.

Лемма доказана.

Допустим, что каждое из множеств F_m, G_m содержит более одного элемента. Согласно лемме 1 это означает, что числа $i_1, \ldots, i_s$, $N+1$ $\left(\frac{x_1}{l}, \ldots, \frac{x_s}{l}\right)$ имеют общие делители (рациональные), наибольший из которых обозначим через p $\left(\text{через } q \text{ обозначим наименьшее общее кратное знаменателей чисел } \frac{x_1}{l}, \ldots, \frac{x_s}{l}\right)$.

Рассмотрим векторы (функции), имеющие вид

$$\begin{aligned} a &= \left(a_1, \ldots, a_{p-1}, 0, -a_{p-1}, \ldots, -a_1, 0, a_1, \ldots, a_{p-1}, 0, \ldots\right), \\ b &= \left(b_1, \ldots, b_{p-1}, 0, -b_{p-1}, \ldots, -b_1, 0, b_1, \ldots, b_{p-1}, 0, \ldots\right), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } 0 < x < \dfrac{l}{q}; \\ -\varphi\left(\dfrac{2l}{q} - x\right) & \text{при } \dfrac{l}{q} < x < \dfrac{2l}{q}, \end{cases} \tag{14}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{при } 0 < x < \dfrac{l}{q}; \\ -\psi\left(\dfrac{2l}{q} - x\right) & \text{при } \dfrac{l}{q} < x < \dfrac{2l}{q}, \end{cases}$$

где $\varphi(\cdot) \in W_2^1\left(0, \frac{l}{q}\right)$, $\psi(\cdot) \in L_2\left(0, \frac{l}{q}\right)$; $a_1, \ldots, a_{p-1}$, $b_1, \ldots, b_{p-1}$ — произвольные действительные числа. Затем эти функции продолжим с периодом $\frac{2l}{q}$ на отрезок $[0, l]$.

Лемма 2. *Множества F_m и G_m состоят из таких и только таких векторов (функций), разность любых двух из которых имеет вид* (13) ((14)) *соответственно.*

Доказательство. *Дискретный случай.* Пусть $Z^0 = Z^0(t)$, $Z' = Z'(t)$, $0 \leq t \leq T$, — два решения системы (4), соответствующие начальным данным $\left(\varphi^0, \psi^0\right)$ и $\left(\varphi^1, \psi^1\right)$, $\varphi^0, \varphi^1 \in F_m$, $\psi^0, \psi^1 \in G_m$.

Обозначим $Z(t) = Z^0(t) - Z'(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Пусть $(i_1, \ldots, i_s, N+1) = p > 1$, тогда, применяя рассуждения, использованные при доказательстве достаточности леммы 1, имеем

$$Z_1(t) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T, \qquad i = p, 2p, \ldots .$$

Учитывая, что $Z_{kp-1}(t) + Z_{kp+1}(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$, $k = 1, 2, \ldots$, $i = 1, \ldots, p-1$, получаем

$$Z(0) = \left(Z_1(0), \ldots, Z_{p-1}(0), 0, -Z_{p-1}(0), \ldots, -Z_1(0), 0, Z_1(0), \ldots, Z_{p-1}(0), 0, \ldots\right),$$

т. е. два любых элемента из каждого множества F_m, G_m отличаются на элемент вида (13).

Непрерывный случай. Пусть

$$\frac{x_i}{l} = \frac{p_i}{q_i}, \qquad i = 1, \ldots, s, \qquad \varphi^0(\cdot),\ \varphi^1(\cdot) \in F_m, \qquad \psi^0(\cdot),\ \psi^1(\cdot) \in G_m.$$

Обозначим через $Z^0 = Z^0(t, x)$, $Z' = Z'(t, x)$ соответствующие решения задачи (1)–(3). Если обозначить $Z(t, x) = Z^0(t, x) - Z'(t, x)$, то будем иметь $Z(t, x_j) = 0$, $0 \le t \le T$, $j = 1, \dots, s$. Отсюда ((8))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\varphi_n^0 - \varphi_n^1 \right) \cos(\lambda_n a t) + \left(\psi_n^0 - \psi_n^1 \right) (\lambda_n a)^{-1} \sin(\lambda_n a t) \right) \sin\left(\lambda_n x_j\right) \equiv 0, \tag{15}$$

$$0 \le t \le T, \quad j = 1, \dots, s.$$

В силу того что система функций $\sin(\lambda_n a t)$, $\cos(\lambda_n a t)$, $n = 1, 2, \dots$, линейно независима на $\left[0, \dfrac{2l}{a}\right]$, из (15) получаем

$$\left(\varphi_n^0 - \varphi_n^1 \right) \sin\left(\lambda_n x_j\right) = 0, \quad \left(\psi_n^0 - \psi_n^1 \right) \sin\left(\lambda_n x_j\right) = 0, \quad j = 1, \dots, s, \; n = 1, 2, \dots .$$

Отсюда или $\varphi_n^0 \ne \varphi_n^1$, или $\psi_n^0 \ne \psi_n^1$ тогда и только тогда, когда $\sin\left(\lambda_n x_j\right) = 0$ для всех $j = 1, \dots, s$, а это возможно только при $n = q, 2q, \dots$. Значит, функции $\varphi^0(\cdot)$, $\varphi^1(\cdot)$ $\left(\psi^0(\cdot), \psi^1(\cdot)\right)$ отличаются друг от друга при разложении их в ряд Фурье только коэффициентами φ_n (ψ_n) для $n = q, 2q, \dots$ (т. е. на функции вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\lambda_n q x), \quad 0 \le t \le T \Bigg).$$

А такие разложения имеют функции вида (14). Лемма доказана.

3. Решение задачи.

Теорема. 1°. *В дискретном случае задача имеет решение*

$$\varphi^0 = \left(A^1, \dots, A^{p-1}, C_1, A_1^{p-1} - A^{p-1}, \dots, A_1^1 - A^1, C_2, A_2^1 - A_1^1 + A^1, \dots \right.$$
$$\left. \dots, A_2^{p-1} - A_1^{p-1} + A^{p-1}, C^3, \dots \right),$$

$$\psi^0 = \left(B^1, \dots, B^{p-1}, D_1, B_1^{p-1} - B^{p-1}, \dots, B_1^1 - B^1, D_2, B_2^1 - B_1^1 + B^1, \dots \right.$$
$$\left. \dots, B_2^{p-1} - B_1^{p-1} + B^{p-1}, D^3, \dots \right),$$

$$A^k = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-i} i A_{n-i}^k}{n}, \qquad B^k = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-i} i B_{n-i}^k}{n},$$

где A_i^k, B_i^k, C_i, D_i, $i = 1, \dots, n$, *— известные числа, выраженные через функции* $m_j(\cdot)$, $f_j(\cdot)$ *и их производные в нуле* $(np = N + 1)$.

2°. *В непрерывном случае задача имеет решение*

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} M(x) & \text{при } 0 < x < \dfrac{l}{q}; \\ M_1(x) - M(x) & \text{при } \dfrac{l}{q} < x < 2\dfrac{l}{q}; \\ M_2(x) - M_1(x) + M(x) & \text{при } 2\dfrac{l}{q} < x < 3\dfrac{l}{q}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ M_{q-1}(x) - M_{q-2}(x) + \dots + (-1)^{q-1} M(x) & \text{при } (q-1)\dfrac{l}{q} < x < l, \end{cases}$$

$$\psi_0(x) = \begin{cases} N(x) & \text{при } 0 < x < \dfrac{l}{q}; \\ N_1(x) - N(x) & \text{при } \dfrac{l}{q} < x < 2\dfrac{l}{q}; \\ N_2(x) - N_1(x) + N(x) & \text{при } 2\dfrac{l}{q} < x < 3\dfrac{l}{q}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ N_{q-1}(x) - N_{q-2}(x) + \ldots + (-1)^{q-1}N(x) & \text{при } (q-1)\dfrac{l}{q} < x < l, \end{cases}$$

где

$$M(x) = \sum_{i=1}^{q-1} \frac{(-1)^{q-1-i} i M_{q-i}(x)}{q}, \quad N(x) = \sum_{i=1}^{q-1} \frac{(-1)^{q-1-i} i N_{q-i}(x)}{q},$$

$M_i(\cdot)$, $N_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, q-1$, — *известные функции, выраженные через функции* $m_j(\cdot)$, $f_j(0, \cdot)$, $j = 1, \ldots, s$, *и их производные.*

Доказательство. 1°. При $(i_1, \ldots, i_s, N+1) = p > 1$ все компоненты Z_p, $Z_{2p}, \ldots$ системы (4) — известные функции (это следует из рассуждений, приведенных при доказательстве достаточности леммы 1). Имеем

$$\begin{gathered} Z_i + Z_{2p-i} = h_i, \quad Z_{2p-i} + Z_{2p+i} = h_{p+i}, \ldots, \\ \dot{Z}_i + \dot{Z}_{2p-i} = \dot{h}_i, \quad \dot{Z}_{2p-i} + \dot{Z}_{2p+i} = \dot{h}_{p+i}, \ldots, \end{gathered} \tag{16}$$

где $i = 1, \ldots, p-1$; $h_j = h_j(0)$, $j = 1, \ldots,$ $h_j(t)$, $0 \le t \le T$, — известные функции.

Сначала рассмотрим следующую частную задачу: найти $\max\limits_G \max\limits_F (a, b)$, где

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a \in R^n : a_1 + a_2 = A_1,\ a_2 + a_3 = A_2, \ldots, a_{n-1} + a_n = A_{n-1} \right\}, \\ G &= \left\{ b \in R^n : b_1 + b_2 = B_1,\ b_2 + b_3 = B_2, \ldots, b_{n-1} + b_n = B_{n-1} \right\}. \end{aligned}$$

Покажем, что в данном случае $\left(a^0, b^0\right) = \left(a, b^0\right) = \left(a^0, b\right)$ для любых $a \in F$, $b \in G$, где

$$\begin{aligned} a^0 &= \left(A, A_1 - A, A_2 - A_1 + A, \ldots, A_{n-1} - A_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} A\right), \\ b^0 &= \left(B, B_1 - B, B_2 - B_1 + B, \ldots, B_{n-1} - B_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} B\right), \\ A &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-i} i A_{n-i}}{n}, \quad B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-i} i B_{n-i}}{n}. \end{aligned} \tag{17}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left(a^0, b^0\right) = {} & A_1 B_1 + (A_2 - A_1)(B_2 - B_1) + (A_3 - A_2 + A_1)(B_3 - B_2 + B_1) + \ldots \\ & \ldots + (A_{n-1} - A_{n-2} + \ldots)(B_{n-1} - B_{n-2} + \ldots) - nAB. \end{aligned}$$

Пусть $a \in F$, тогда

$$\left(a, b^0\right) =$$

$$= a_1(nB - B_1 + B + B_2 - B_1 + B + \ldots) + A_1(B_1 - B) + (A_2 - A_1)(B_2 - B_1 + B + \ldots).$$

Поскольку выражение в первой скобке равно нулю, то $\left(a, b^0\right) = \left(a^0, b^0\right)$. Точно так же доказывается, что для любого $b \in G$ $\left(a^0, b^0\right) = \left(a^0, b\right)$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 \Rightarrow \min, \qquad a \in F.$$

Легко показать, что эта задача условного экстремума имеет решение $a = a^0$ (17). Точно так же показывается, что задача $-\left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right) \Rightarrow \min$, $b \in G$, имеет решение $b = b^0$ (17).

Теперь, заметив, что в множествах F_m, G_m переменные с индексами $\{i, 2p - i, 2p + i, \ldots\}$, где $i \in \{1, \ldots, p-1\}$, меняются независимо от других, получим решение исходной задачи в виде (17).

2°. Из решения задачи (1) – (3) вида (8) легко получить следующее соотношение:

$$Z(t, x_0 + x) + Z(t, x_0 - x) = \overline{m}\left(t + \frac{x}{a}\right) + \overline{m}\left(t - \frac{x}{a}\right) + N(t, x), \tag{18}$$

$$0 \le t \le T, \qquad 0 \le x \le x_0.$$

Здесь

$$\overline{m}(t) = m(t) - \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n a)^{-1} \left(\int_0^t f_n(\tau) \sin(\lambda_n a(t - \tau)) d\tau \right) \sin(\lambda_n x_0),$$

$$N(t, x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n a)^{-1} \int_0^t f_n(\tau) \sin(\lambda_n a(t - \tau)) d\tau \cos(\lambda_n x) \sin(\lambda_n x_0),$$

$$0 \le t \le T, \qquad 0 \le x \le x_0.$$

Отметим, что функцию $\overline{m}(t)$, $0 \le t \le 2\frac{l}{a}$, можно периодически продолжить на всю прямую $(-\infty, \infty)$ с периодом $2\frac{l}{a}$.

В силу формулы (18) при $t = 0$ имеем

$$\varphi(x_0 + x) + \varphi(x_0 - x) = \overline{m}\left(\frac{x}{a}\right) + \overline{m}\left(-\frac{x}{a}\right) + N(0, x), \tag{19}$$

$$\psi(x_0 + x) + \psi(x_0 - x) = \dot{\overline{m}}\left(\frac{x}{a}\right) + \dot{\overline{m}}\left(-\frac{x}{a}\right) + N_t'(0, x). \tag{20}$$

Из леммы 1 следует, что если $\frac{x_1}{l}, \ldots, \frac{x_s}{l}$ — рациональные числа, то множества F_m и G_m содержат более одного элемента. Если через q обозначить наименьшее кратное знаменателей чисел $\frac{x_1}{l}, \ldots, \frac{x_s}{l}$, то легко установить, что $\frac{l}{q}$ является наибольшим равномерным шагом деления отрезка $[0, l]$, проходящего через точки $x_1, \ldots, x_s$.

Воспользовавшись рассуждениями и результатами дискретного случая, можно получить $\varphi(x) = M(x)$, $\psi(x) = N(x)$ при $x = \frac{l}{q}, 2\frac{l}{q}, \ldots, (q-1)\frac{l}{q}$, где $M(x), N(x), 0 \le x \le l,$ — известные функции, выраженные с помощью функций $\overline{m}(\cdot)$, $N(\cdot, \cdot)$ (см. (19), (20)) и их производных. Имеем соотношения

$$\varphi(x) + \varphi\left(2\frac{l}{q} - x\right) = M_1(x),$$

$$\varphi\left(2\frac{l}{q}-x\right)+\varphi\left(2\frac{l}{q}+x\right) = M_2(x), \ldots$$

$$\ldots, \varphi\left((q-1)\frac{l}{q}-x\right)+\varphi\left((q-1)\frac{l}{q}+x\right) = M_{q-1}(x), \tag{21}$$

$$\psi(x)+\psi\left(2\frac{l}{q}-x\right) = N_1(x), \quad \psi\left(2\frac{l}{q}-x\right)+\psi\left(2\frac{l}{q}+x\right) = N_2(x), \ldots$$

$$\ldots, \psi\left((q-1)\frac{l}{q}-x\right)+\psi\left((q-1)\frac{l}{q}+x\right) = N_{q-1}(x), \quad 0\le x\le \frac{l}{q},$$

где q нечетно (при четном q аналогично).

Пусть $\varphi(\cdot)\in F_m$, тогда

$$\int_0^l \varphi^2(x)\,dx = \int_0^{l/q}\varphi^2(x)\,dx + \int_{l/q}^{2l/q}\varphi^2(x)\,dx+\ldots+\int_{(q-1)l/q}^{l}\varphi^2(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{l/q}\varphi^2(x)\,dx + \int_0^{l/q}\varphi^2\left(\frac{2l}{q}-x\right)dx + \int_0^{l/q}\varphi^2\left(\frac{2l}{q}+x\right)dx+\ldots+\int_0^{l/q}\varphi^2\left((q-1)\frac{l}{q}+x\right)dx.$$

Отсюда

$$\int_0^l \varphi^2(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{l/q} q\varphi^2(x)\,dx - 2\int_0^{l/q}(M_1(x)-M_2(x)+M_1(x)+\ldots+M_1(x))\varphi(x)\,dx + \int_0^{l/q}\overline{M}(x)\,dx,$$

где

$$\overline{M}(x) = M_1^2(x)+(M_2(x)-M_1(x))^2+\ldots+\left(M_{q-1}(x)-M_{q-2}(x)+\ldots+(-1)^q M_1(x)\right)^2.$$

Если последнее равенство переписать в виде

$$\int_0^l \varphi^2(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{l/q}\left[q\varphi^2(x)\,dx-2(M_1(x)-M_2(x)+M_1(x)+\ldots+M_1(x))\varphi(x)+\overline{M}(x)\right]dx,$$

то станет ясно, что решением задач $\min\|\varphi(\cdot)\|$ $(\min\|\psi(\cdot)\|)$ при $\varphi(\cdot)\in F_m$ $(\psi(\cdot)\in G_m)$ являются функции

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{q-1}\frac{(-1)^{q-1-i}iM_{q-i}(x)}{q}, \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^{q-1}\frac{(-1)^{q-1-i}iN_{q-i}(x)}{q}, \quad 0\le x\le\frac{l}{q}.$$

Функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ для $x\in\left[\frac{l}{q}, l\right]$ определяются из соотношений (21).

Проверим следующие равенства:

$$\left(\varphi^0,\psi^0\right) = \left(\varphi,\psi^0\right) = \left(\varphi^0,\psi\right), \quad \varphi(\cdot)\in F_m, \quad \psi(\cdot)\in G_m. \tag{22}$$

Заметим, что

$$\int_0^l \varphi^0(x)\psi^0(x)\,dx = \int_0^{l/q}\Big[M_1(x)N_1(x)+(M_2(x)-M_1(x))(N_2(x)-N_1(x))+\ldots$$

$$\ldots+\left(M_{q-1}(x)-M_{q-2}(x)+\ldots+(-1)^q M_1(x)\right)\times$$

$$\times\left(N_{q-1}(x)-N_{q-2}(x)+\ldots+(-1)^q N_1(x)\right)-q\varphi^0(x)\psi^0(x)\Big]dx.$$

Далее, учитывая, что $\psi(x)\in G_m$, получаем

$$\int_0^l \varphi^0(x)\psi(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{l/q}\Big[\Big(q\varphi^0(x)-M_1(x)+M_2(x)-M_1(x)+\ldots+M_{q-1}(x)-M_{q-2}(x)+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^q M_1(x)\Big)\varphi(x)+\left(M_1(x)-\varphi^0(x)\right)N_1(x)+\left(M_2(x)-M_1(x)+\varphi^0(x)\right)\times$$

$$\times\left(N_2(x)-N_1(x)\right)+\ldots+\left(M_{q-1}(x)-M_{q-2}(x)+\ldots+(-1)^q M_1(x)+\varphi^0(x)\right)\times$$

$$\times\left(N_{q-1}(x)-N_{q-2}(x)+\ldots+(-1)^q N_1(x)\right)\Big]dx.$$

Поскольку выражение в первой скобке (коэффициент перед $\varphi(x)$) равно нулю, после несложных преобразований имеем

$$\int_0^l \varphi^0(x)\psi(x)\,dx = \int_0^{l/q}\Big[M_1(x)N_1(x)+(M_2(x)-M_1(x))(N_2(x)-N_1(x))+\ldots$$

$$\ldots+\left(M_{q-1}(x)-M_{q-2}(x)+\ldots+(-1)^q M_1(x)\right)\times$$

$$\times\left(N_{q-1}(x)-N_{q-2}(x)+\ldots+(-1)^q N_1(x)\right)-q\varphi^0(x)\psi^0(x)\Big]dx. \tag{23}$$

Таким же способом получим выражение вида (23) и для $\left(\varphi(x),\psi^0(x)\right)$, $\varphi(\cdot)\in F_m$. Теперь с помощью этого выражения установим равенство (22), которое доказывает теорему.

***Замечание* 1.** Реализуемые функции $m_j(t)$, $0\le t\le T$, $j=1,\ldots,s$, можно найти, например, экспериментальным путем, т. е. наблюдением в течение времени T, законами колебания точек $x_1,\ldots,x_s$ или выделением их из решения соответствующей задачи.

Пример. Упругий однородный круговой цилиндрический стержень длины L совершает крутильные колебания, т. е. его поперечные сечения остаются плоскими и поворачиваются, вращаясь вокруг оси стержня.

Если прямую Ox направить по оси стержня и через $Z(t,x)$ обозначить угол поворота сечения, соответствующего x в момент t, то получим задачу (1) – (3), где $a=\sqrt{\dfrac{GJ}{K}}$, G — постоянная величина (модуль сдвига), J — полярный момент инерции, K — осевой момент инерции единицы длины стержня.

Допустим, что какой-нибудь механизм, который прикреплен к сечению стержня в соответствующей точке $x=x_0$, должен колебаться по закону

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\varphi_n^0\cos\lambda_n t+\psi_n^0\sin\lambda_n t\right)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin\lambda_n((t-\tau)d\tau)\sin\frac{\pi n x_0}{L},$$

$$0\le t\le T,$$

где φ_n^0, ψ_n^0, $f_n(\cdot)$ — коэффициенты Фурье функций $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$, $f(t,\cdot)$ по системе $\left\{\sin\frac{\pi n x_0}{L}\right\}$, $0 \le x \le L$.

Предположим, что расходы поворота и скорости поворота сечения стержня в начале процесса пропорциональны значениям $\|\varphi(\cdot)\|$ и $\|\psi(\cdot)\|$ соответственно. Тогда при $\gamma = 0$ из (7) имеем

$$\min_{\varphi(\cdot)} \max_{\psi(\cdot)} K(\varphi(\cdot)\psi(\cdot)) = \alpha \min_{\varphi(\cdot)} \|\varphi(\cdot)\| - \beta \min_{\psi(\cdot)} \|\psi(\cdot)\|.$$

Таким образом, в этом случае приходим к следующему: минимизируя расходы, обеспечить соответственно $(m(t),\ 0 \le t \le T)$ колебание механизма в течение времени T. Тогда из теорем следует, что, используя функцию $m(t)$, $0 \le t \le T$, можно явно указать оптимальные управления (относительно расхода) $(\varphi(\cdot)\psi(\cdot))$ игроков.

***Замечание* 2.** Для дискретного случая можно было бы рассмотреть аналогичный пример.

1. *Черноусько Ф. Л.* Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами // Прикл. математика и механика. – 1992. – **56**, вып. 5. – С. 810 – 826.
2. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
3. *Авдонин С. А., Иванов С. А.* Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент: Уч. пос. – Киев: УМК ВО, 1989. – 244 с.
4. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
5. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 415 с.
6. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
7. *Охезин С. П.* Задача управления формой области в гиперболической системе // Изв. РАН. Техн. кибернетика. – 1992. – № 1. – С. 204 – 206.
8. *Авдонин С. А., Иванов С. А.* Стартовое и точечное управления колебаниями прямоугольной мембраны // Автоматика. – 1990. – № 6. – С. 68 – 71.
9. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний. – М.: Наука, 1972. – 472 с.

Получено 04.04.2002