УДК 517.5

А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА СУМАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

On classes of the Poisson integrals of functions belonging to unit balls of the spaces C or L, we find asymptotic equalities for upper bounds of approximations by the Vallée Poussin sums in uniform and integral metrics, respectively.

На класах інтегралів Пуассона функцій, що належать одиничним кулям просторів C або L, знайдено асимптотичні рівності для верхніх меж наближень сумами Валле Пуссена в рівномірній та інтегральній метриках відповідно.

Нехай $L = L_1$ — простір 2π-періодичних сумовних на $(0, 2\pi)$ функцій із нормою

$$\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt,$$

C — простір неперервних 2π-періодичних функцій із нормою

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|,$$

$M = L_\infty$ — простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій f, у якому норма задана рівністю

$$\|f\|_M = \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f(t)|.$$

Інтегралом Пуассона функції $\varphi \in L$ називають функцію $f(x)$, яка задається згорткою

$$f(x) = \mathcal{J}^q_\beta(\varphi; x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) P_{q,\beta}(t)\,dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

із твірним ядром

$$P_{q,\beta}(t) \overset{\text{df}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad q \in (0, 1), \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Функція $P_{q,\beta}(t)$ — відоме ядро Пуассона з параметрами q і β. Зауважимо, що функції f вигляду (1) допускають аналітичне продовження до функцій $f(z) = f(x+iy)$, аналітичних у смузі $|\operatorname{Im} z| \le \ln\frac{1}{q}$ комплексної площини (див., наприклад, [1, с. 35]).

Множину всіх функцій, що зображуються у вигляді (1) при $\varphi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина із L, будемо позначати через $L^q_\beta\mathfrak{N}$. Позначивши через U^0_p, $p = 1, \infty$, множини вигляду

$$U^0_p = \left\{\varphi \in L_p : \|\varphi\|_p \le 1, \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt = 0\right\}, \quad p = 1, \infty,$$

покладемо $L^q_\beta U^0_p = L^q_{\beta,p}$.

© А. С. СЕРДЮК, 2004

Нехай $f \in L$ і

$$S[f(x)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ряд Фур'є функції f. Поліноми вигляду

$$V_{n,p}(f) = V_{n,p}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)}\bigl(a_k \cos kx + b_k \sin kx\bigr),$$

де

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 1 \le k \le n-p; \\ 1 - \dfrac{k-n+p}{p}, & n-p+1 \le k \le n-1, \end{cases}$$

називаються сумами Валле Пуссена (див., наприклад, [1, с. 47]). При $p = 1$ поліноми $V_{n,p}(f;x)$ є звичайними частковими сумами Фур'є $S_{n-1}(f;x)$ порядку $n-1$ функції $f(x)$:

$$S_{n-1}(f) = S_{n-1}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\bigl(a_k \cos kx + b_k \sin kx\bigr).$$

У загальному ж випадку суми Валле Пуссена $V_{n,p}(f)$ виражаються через часткові суми Фур'є $S_k(f)$ за допомогою рівності

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x). \tag{3}$$

Якщо $p = n$, то, як випливає з (3), суми $V_{n,p}(f;x)$ перетворюються у відомі суми Фейєра $\sigma_n(f;x)$ порядку $n-1$:

$$\sigma_{n-1}(f) = \sigma_{n-1}(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x).$$

Перші оцінки величин $\|f - V_{n,p}(f)\|_C$ отримав у 1919 р. Валле Пуссен [2]. Пізніше дослідження у даному напрямку, коли величини $\|f - V_{n,p}(f)\|_C$ оцінюються через найкращі наближення тригонометричними поліномами, було продовжено у роботах С. М. Нікольського [3], С. Б. Стечкіна [4, 5], О. Д. Габісонії [6] та ін.

Мета даної роботи полягає у знаходженні асимптотичних рівностей для величин

$$\mathscr{E}\Bigl(L^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\Bigr)_C = \sup_{f \in L^q_{\beta,\infty}} \|f - V_{n,p}(f)\|_C \tag{4}$$

і

$$\mathscr{E}\Bigl(L^q_{\beta,1}; V_{n,p}\Bigr)_1 = \sup_{f \in L^q_{\beta,1}} \|f - V_{n,p}(f)\|_1 \tag{5}$$

при $n - p \to \infty$ і довільних значеннях параметрів $p \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$ та $q \in (0, 1)$.

Відмітимо, що задача відшукання асимптотичних оцінок для верхніх меж наближень сумами $V_{n,p}(f)$ у чебишовській метриці на тих чи інших функціональних компактах вивчалась багатьма авторами, починаючи з А. М. Колмогорова [7], котрий є фундатором даної проблематики. При цьому найбільш повні і завершені результати для класів Вейля – Надя W_β^r одержав С. О. Теляковський [8 – 12]. Більш детально ознайомитись з відомими результатами у даному напрямку й історією питання можна, наприклад, в роботах [2 – 22].

Що стосується класів інтегралів Пуассона $L^q_{\beta,\infty}$, то асимптотичні рівності величин $\mathcal{E}\left(L^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right)_C$ вдалось отримати В. І. Рукасову та О. О. Новікову [19] при $p \to \infty$ і $n-p \to \infty$. У цьому випадку порядок верхніх меж наближень сумами Валле Пуссена на таких класах більший за порядок найкращих наближень тригонометричними поліномами. При фіксованих значеннях параметра $p(p \not\to \infty)$ суми Валле Пуссена наближають функції з класу $L^q_{\beta,\infty}$ за порядком не гірше за найкращі наближення на цих класах, що зумовлює актуальність такого випадку у порівнянні з попереднім, коли $p \to \infty$.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n, p \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n-p \to \infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(L^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right)_C = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q} + O(1)\frac{q}{(1-q)^s(n-p+1)}\right), \tag{6}$$

в якій

$$K_{p,q} \overset{\mathrm{df}}{=} \int_0^\pi \frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos t + q^2}\,dt, \tag{7}$$

$$s = s(p) = \begin{cases} 1, & p = 1; \\ 3, & p = 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

а $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена по* n, q, p *і* β.

Доведення. Нехай $f \in L^p_{\beta,\infty}$. На підставі рівностей (1) – (3) маємо

$$\rho_{n,p}(f;x) \overset{\mathrm{df}}{=} f(x) - V_{n,p}(f;x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{\infty} q^j \cos\left(jt - \frac{\beta\pi}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} P_{q,\beta,k+1}(t)\,dt, \tag{8}$$

де

$$P_{q,\beta,m}(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{j=m}^{\infty} q^j \cos\left(jt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad q \in (0,1), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Оскільки (див. [23, с. 801])

$$P_{q,\beta,m}(t) = \frac{q^m \cos\left(mt + \theta(t) - \beta\pi/2\right)}{\sqrt{1-2q\cos t + q^2}}, \tag{9}$$

де функції $\theta(t) = \theta(q,t)$ означаються рівностями

$$\frac{1 - q\cos t}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}} = \cos\theta(t), \tag{10}$$

$$\frac{q\sin t}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}} = \sin\theta(t), \tag{10'}$$

то, покладаючи

$$Z_q(t) \overset{\text{df}}{=} (1-2q\cos t+q^2)^{-1/2}, \tag{11}$$

із (8) – (11) отримуємо

$$\rho_{n,p}(f;x) = \frac{1}{\pi p}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)Z_q(t)\sum_{k=n-p}^{n-1} q^{k+1}\cos\left((k+1)t + \theta(t) - \frac{\beta\pi}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi p}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)Z_q(t)\left\{\sum_{k=n-p+1}^{\infty} q^k\cos\left(kt + \theta(t) - \frac{\beta\pi}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=n+1}^{\infty} q^k\cos\left(kt + \theta(t) - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi p}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)Z_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)\,dt, \tag{12}$$

де

$$\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t) \overset{\text{df}}{=} \sum_{k=n-p+1}^{n} q^k\cos\left(kt + \theta(t) - \frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{13}$$

Внаслідок співвідношень двоїстості (див., наприклад, [24, с. 214; 25, с. 130]) із рівності (12) випливає рівність

$$\sup_{\substack{\|\varphi\|_\infty \le 1 \\ \varphi\perp 1}} \left\|\rho_{n,p}(f)\right\|_C = \min_{c\in\mathbb{R}}\left\|\frac{1}{\pi p}Z_q(\cdot)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot) - c\right\|_1. \tag{14}$$

Беручи до уваги співвідношення (4), (7) і (14), можемо записати

$$\mathcal{E}\left(L^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right)_C = \inf_{c\in\mathbb{R}}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\pi p}Z_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t) - c\right|dt. \tag{15}$$

Подамо функцію $\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)$ у зручному для подальших досліджень вигляді

$$\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t) =$$

$$= \sum_{k=n-p+1}^{\infty} q^k\cos\left(kt + \theta(t) - \frac{\beta\pi}{2}\right) - \sum_{k=n+1}^{\infty} q^k\cos\left(kt + \theta(t) - \frac{\beta\pi}{2}\right) =$$

$$= \cos\theta(t)\left(P_{q,\beta,n-p+1}(t) - P_{q,\beta,n+1}(t)\right) -$$

$$- \sin\theta(t)\left(P_{q,\beta-1,n-p+1}(t) - P_{q,\beta-1,n+1}(t)\right). \tag{16}$$

Застосовуючи формулу (9) до кожної з функцій $P_{q,\beta,n-p+1}(t)$, $P_{q,\beta-1,n-p+1}(t)$, $P_{q,\beta,n+1}(t)$ та $P_{q,\beta-1,n+1}(t)$ і проводячи елементарні спрощення, із (16) отримуємо

$$\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t) = Z_q(t)\left(q^{n-p+1}\cos\left((n-p+1)t + 2\theta(t) - \frac{\beta\pi}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - q^{n+1}\cos\left((n+1)t + 2\theta(t) - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= Z_q(t)q^{n-p+1}\left(\cos\left((n-p+1)t - \frac{\beta\pi}{2}\right)G_{p,q}(t) - \sin\left((n-p+1)t - \frac{\beta\pi}{2}\right)H_{p,q}(t)\right), \tag{17}$$

де функції $G_{p,q}(t)$ та $H_{p,q}(t)$ означаються таким чином:

$$G_{p,q}(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \cos 2\theta(t) - q^p\cos\left(pt + 2\theta(t)\right), \tag{18}$$

$$H_{p,q}(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sin 2\theta(t) - q^p\sin\left(pt + 2\theta(t)\right). \tag{18$'$}$$

Наведемо результат, що є здійсненою С. Б. Стєчкіним у [25, с. 137] деякою видозміною відомої леми Фейєра [26] і необхідний для подальшого викладу.

Лема 1. *Нехай функції $g(t)$ та $h(t)$ мають період 2π і є функціями обмеженої варіації на $[-\pi, \pi]$ $(g, h \in \bigvee[-\pi, \pi])$. Якщо функція $\Phi(t)$ зображується у вигляді*

$$\Phi(t) = g(t)\cos(mt+\alpha) + h(t)\sin(mt+\alpha), \qquad m \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

то

$$\mathcal{J}_1 = \int_{-\pi}^{\pi}|\Phi(t)|dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}r(t)\,dt + O(Km^{-1}), \tag{19}$$

$$\mathcal{J}_2 = \inf_{c\in\mathbb{R}}\int_{-\pi}^{\pi}|\Phi(t)-c|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}r(t)\,dt + O(Km^{-1}), \tag{20}$$

$$\mathcal{J}_3 = \sup_h\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|\Phi(t+h)-\Phi(t)|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}r(t)\,dt + O(Km^{-1}), \tag{21}$$

де

$$r(t) = \sqrt{g^2(t) + h^2(t)}, \qquad K = \bigvee_{-\pi}^{\pi}(g) + \bigvee_{-\pi}^{\pi}(h).$$

Виходячи з формули (17), застосуємо лему 1 до функції

$$\Phi(t) = \frac{1}{\pi p}Z_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t),$$

поклавши

$$g(t) = \frac{q^{n-p+1}}{\pi p}Z_q^2(t)G_{p,q}(t), \qquad h(t) = -\frac{q^{n-p+1}}{\pi p}Z_q^2(t)H_{p,q}(t),$$

$$m = n - p + 1, \qquad \alpha = -\frac{\beta\pi}{2}.$$

На підставі формули (20) маємо

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{\pi p} Z_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t) - c \right| dt =$$

$$= \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{2}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} Z_q^2(t)\sqrt{G_{p,q}^2(t)+H_{p,q}^2(t)}\,dt\right. +$$

$$+ \left. O(1)\left(\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(Z_q^2 G_{p,q}\right) + \bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(Z_q^2 H_{p,q}\right)\right)\frac{1}{n-p+1}\right), \tag{22}$$

причому величина $O(1)$ в (22) рівномірно обмежена по n, p, β і q. Оскільки, згідно з (18), (18′), (10) і (10′)

$$\sqrt{G_{p,q}^2(t)+H_{p,q}^2(t)} = \sqrt{1-2q^p\cos pt+q^{2p}} = \left(Z_{q^p}(pt)\right)^{-1}, \tag{23}$$

то на підставі (15) і (22) отримуємо рівність

$$\mathcal{E}_n\left(L_{\beta,\infty}^q; V_{n,p}\right)_C =$$

$$= \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{2}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{Z_q^2(t)}{Z_{q^p}(pt)}\,dt + O(1)\left(\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(Z_q^2 G_{p,q}\right) + \bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(Z_q^2 H_{p,q}\right)\right)\frac{1}{n-p+1}\right). \tag{24}$$

Оцінимо залишковий член у формулі (24). У першу чергу відмітимо, що при $p = 1$

$$Z_q^2(t)G_{p,q}(t) = Z_q(t)\cos\theta(t) = g_q(t), \tag{25}$$

$$Z_q^2(t)H_{p,q}(t) = Z_q(t)\sin\theta(t) = h_q(t), \tag{26}$$

де

$$h_q(t) \overset{\text{df}}{=} \frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2},$$

$$g_q(t) \overset{\text{df}}{=} \frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}.$$

Оскільки

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}(g_q) = \frac{4q}{(1+q)(1-q)} \le \frac{4q}{1-q}, \tag{27}$$

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}(h_q) \le \frac{4q}{1-q}, \tag{28}$$

то на підставі рівностей (25) і (26) маємо

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(Z_q^2 G_{1,q}\right) + \bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(Z_q^2 H_{1,q}\right) = O(1)\frac{q}{1-q}. \tag{29}$$

Нехай далі $p = 2, 3, \ldots$. З урахуванням рівностей (10), (25) і (26) отримуємо

$$\cos 2\theta(t) = 1 - 2q\sin t\, h_q(t), \tag{30}$$

$$\sin 2\theta(t) = 2q \sin t\, g_q(t). \tag{31}$$

Застосовуючи формулу

$$\bigvee_a^b (f_1 f_2) \le \bigvee_a^b (f_1) \sup\{|f_2|\} + \bigvee_a^b (f_2) \sup\{|f_1|\}, \tag{32}$$

у якій f_1 і f_2 — довільні функції з обмеженою варіацією на $[a, b]$, та враховуючи рівності (18), (18′) і оцінки (27), (28), можемо записати

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(G_{p,q}\right) \le \bigvee_{-\pi}^{\pi}(\cos 2\theta(t)) + q^p\left(\bigvee_{-\pi}^{\pi}(\cos pt \cos 2\theta(t)) + \right.$$

$$\left. + \bigvee_{-\pi}^{\pi}(\sin pt \sin 2\theta(t))\right) \le 2q(1+q^p)\left(4\left\|h_q\right\|_C + \bigvee_{-\pi}^{\pi}(h_q)\right) + 8q^p p +$$

$$+ 2q^{p+1}\left(4\left\|g_q\right\|_C + \bigvee_{-\pi}^{\pi}(g_q)\right) = O(1)\left(\frac{q^2}{1-q} + q^p p\right) = O(1)\frac{q^2}{1-q}. \tag{33}$$

Аналогічно

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(H_{p,q}\right) \le \bigvee_{-\pi}^{\pi}(\sin 2\theta(t)) + q^p\left(\bigvee_{-\pi}^{\pi}(\sin pt \cos 2\theta(t)) + \right.$$

$$\left. + \bigvee_{-\pi}^{\pi}(\cos pt \sin 2\theta(t))\right) \le 2q(1+q^p)\left(4\left\|g_q\right\|_C + \bigvee_{-\pi}^{\pi}(g_q)\right) + 8q^p p +$$

$$+ 2q^{p+1}\left(4\left\|h_q\right\|_C + \bigvee_{-\pi}^{\pi}(h_q)\right) = O(1)\left(\frac{q}{1-q} + q^p p\right) = O(1)\frac{q}{1-q}. \tag{34}$$

Далі з огляду на (33), (34), очевидні співвідношення

$$\left\|Z_q^2\right\|_C = \frac{1}{(1-q)^2}, \tag{35}$$

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(Z_q^2\right) = \frac{8q}{(1-q)^2(1+q)^2} \le \frac{8q}{(1-q)^2} \tag{36}$$

і формулу (32) легко отримати оцінки

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(Z_q^2 G_{p,q}\right) = O(1)\frac{q}{(1-q)^3}, \tag{37}$$

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(Z_q^2 H_{p,q}\right) = O(1)\frac{q}{(1-q)^3}, \tag{38}$$

де $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені відносно усіх розглядуваних параметрів.

Об'єднавши формули (24), (29), (37) і (38), одержуємо (6).

Теорему доведено.

Із теореми 1 випливають наступні твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $q \in (0, 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n, p \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $p \to \infty$ *і* $n - p \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathscr{E}\left(L_{\beta,\infty}^q; V_{n,p}\right)_C = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q}{(1-q)^3(n-p+1)} + \frac{q^p}{1-q}\right)\right), \tag{39}$$

у якій $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена по* n, q, p *і* β.

Доведення. На підставі очевидних співвідношень

$$1 - q^p \le \sqrt{1-2q^p \cos pt + q^{2p}} \le 1 + q^p$$

можемо записати

$$K_{p,q} = \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1-2q^p \cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos t + q^2}\, dt = \frac{1}{1-q^2}\Big(\pi + O(1)q^p\Big). \tag{40}$$

Тоді з формули (6) отримуємо (39).

При $p \to \infty$ і $n - p \to \infty$, як уже зазначалось, асимптотичні рівності для величин $\mathscr{E}\Big(L^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\Big)_C$ отримано у роботах [19, 22]. Асимптотична формула (39) містить уточнену оцінку залишкового члена у порівнянні з аналогічними формулами з [19, 22].

Як зазначалося вище, при $p = 1$ поліноми $V_{n,p}(f; x)$ перетворюються у часткові суми Фур'є порядку $n-1$ $(V_{n,1}(f; x) = S_{n-1}(f; x))$. У цьому випадку з теореми 1 випливає таке твердження.

Наслідок 2. *Нехай* $q \in (0, 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathscr{E}\Big(L^q_{\beta,\infty}; S_{n-1}\Big)_C = q^n\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)}\right), \tag{41}$$

у якій

$$\mathbf{K}(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 t}}$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду, а величина $O(1)$ *рівномірно обмежена відносно параметрів* n, q *і* β.

Щоб отримати формулу (41) із (6), досить зазначити, що при $p = 1$ $s = s(p) = 1$ і

$$K_{1,q} = \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1-2q\cos t + q^2}}{1-2q\cos t + q^2}\, dt = \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 - 2q\cos t + q^2}} = 2\mathbf{K}(q).$$

Зауважимо, що асимптотична формула (41) відтворює відомий результат С. М. Нікольського [24, с. 221] з уточненим С. Б. Стечкіним [25, с. 139] залишковим членом.

При $p = n$ суми $V_{n,p}(f)$, як уже зазначалось, перетворюються у суми Фейєра $\sigma_{n-1}(f)$ порядку $n-1$ $(V_{n,n}(f) = \sigma_{n-1}(f))$. У цьому випадку формули (6) і (39) дозволяють записати лише точну порядкову рівність

$$\mathscr{E}\Big(L^q_{\beta,\infty}; \sigma_{n-1}\Big)_C = \frac{q}{n}\left(\frac{4}{\pi(1-q^2)} + O(1)\frac{q}{(1-q)^3}\right), \tag{42}$$

у якій $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n, β і q. Точність формули (42) збільшується в міру того, як параметр q зменшується до нуля.

Наступна теорема є аналогом теореми 1 у просторі L.

Теорема 2. *Нехай* $q \in (0, 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n, p \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n - p \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathscr{E}\left(L^q_{\beta,1}; V_{n,p}\right)_1 = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q} + O(1)\frac{q}{(1-q)^s(n-p+1)}\right), \tag{43}$$

у якій константа $K_{p,q}$ *означається формулою* (7),

$$s = s(p) = \begin{cases} 1, & p = 1; \\ 3, & p = 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

а $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена по* n, q, p *і* β.

Доведення. Нехай $f \in L^q_{\beta,1}$. Зрозуміло, що інтегральне зображення (12), що застосовувалось при доведенні теореми 1, має місце і у розглядуваному випадку.

Наведемо твердження з роботи С. М. Нікольського [24, с. 215], необхідне для подальшого викладу.

Лема 2. *Якщо* $K(t) \in L$, *то*

$$\sup_{\substack{\|g\|_1 \le 1 \\ g \perp 1}} \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} K(x-t)g(t)\,dt \right| dx = \frac{1}{2}\max_t \int_0^{2\pi} \left| K(x) - K(t+x) \right| dx. \tag{44}$$

Виходячи із зображення (12) і застосовуючи рівність (44), поклавши в ній $K(t) = Z_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)$, $g(t) = \varphi(t)$, отримуємо формулу

$$\sup_{\substack{\|\varphi\|_1 \le 1 \\ \varphi \perp 1}} \left\| \rho_{n,p}(f) \right\|_1 = \frac{1}{2\pi p}\max_h \left\| Z_q(\cdot + h)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot + h) - Z_q(\cdot)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot) \right\|_1, \tag{45}$$

звідки на підставі співвідношень (4) і (7) випливає рівність

$$\mathscr{E}\left(L^q_{\beta,1}; V_{n,p}\right)_1 = \frac{1}{2\pi p}\max_h \left\| Z_q(\cdot + h)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot + h) - Z_q(\cdot)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot) \right\|_1. \tag{46}$$

Використавши зображення (17), застосуємо лему 1 до функції $\Phi(t) = Z_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)$, поклавши в її умовах

$$g(t) = q^{n-p+1}Z_q^2(t)G_{p,q}(t), \qquad h(t) = -q^{n-p+1}Z_q^2(t)H_{p,q}(t),$$

$m = n - p + 1$ і $\alpha = -\beta\pi/2$. На підставі формул (21) і (23) маємо

$$\frac{1}{2}\max_h \left\| Z_q(\cdot + h)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot + h) - Z_q(\cdot)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot) \right\|_1 =$$

$$= q^{n-p+1}\left(\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{Z_q^2(t)}{Z_{q^p}(pt)}\,dt + O(1)\left(\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(Z_q^2 G_{p,q}\right) + \bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(Z_q^2 H_{p,q}\right)\right)\frac{1}{n-p+1}\right), \tag{47}$$

де $O(1)$ — рівномірно обмежена величина відносно параметрів n, p, β і q. Об'єднавши формули (46) і (47) і використавши оцінки (29), (37) і (38), одержимо (43).

Теорему доведено.

Із теореми 2 випливають наступні твердження, що є аналогами наслідків 1 і 2 в метриці простору L.

***Наслідок* 3.** *Нехай* $q \in (0, 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n, p \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $p \to \infty$ *і* $n - p \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(L^q_{\beta,1}; V_{n,p}\right)_1 =$$

$$= \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q}{(1-q)^3(n-p+1)} + \frac{q^p}{1-q}\right)\right), \qquad (48)$$

у якій $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена по* n, q, p *і* β.

Наслідок 4. *Нехай* $q \in (0, 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(L^q_{\beta,1}; S_{n-1}\right)_1 = q^n\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)}\right), \qquad (49)$$

у якій

$$\mathbf{K}(q) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - q^2\sin^2 t}},$$

а величина $O(1)$ *рівномірно обмежена відносно параметрів* n, q *і* β.

Асимптотична рівність (49) відтворює результат С. М. Нікольського [24, с. 221] з уточненим С. Б. Стєчкіним залишковим членом [25, с. 139]. Відмітимо також, що й оцінка (42) залишається справедливою при заміні $\mathcal{E}\left(L^q_{\beta,\infty}; \sigma_{n-1}\right)_C$ на $\mathcal{E}\left(L^q_{\beta,1}; \sigma_{n-1}\right)_1$.

Також зазначимо, що всі одержані в даній роботі результати залишаються справедливими, якщо замість класів $L^q_{\beta,p} = L^q_\beta U^0_p$, $p = 1, \infty$, розглянути класи $L^q_\beta U_p$, де U_p — одинична куля у просторі L_p, $p = 1, \infty$,

$$U_p = \{\varphi \in L_p : \|\varphi\|_p \le 1\}.$$

Щоб у цьому переконатись, досить при доведенні аналогів теорем 1 і 2 замість рівностей (14) і (45) використати рівності

$$\sup_{\|\varphi\|_\infty \le 1} \left\|\rho_{n,p}(f)\right\|_C = \sup_{\|\varphi\|_1 \le 1} \left\|\rho_{n,p}(f)\right\|_1 = \left\|\frac{1}{\pi p} Z_q(\cdot)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot)\right\|_1,$$

а замість формул (20) і (21) застосувати формулу (19).

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Vallée Poussin Ch. J.* Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. – Paris: Gautier-Villars, 1919. – 150 p.
3. *Никольский С. М.* О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1940. – **4**. – С. 509 – 520.
4. *Стечкин С. Б.* О суммах Валле Пуссена // Докл. АН СССР. – 1951. – **80**. – С. 545 – 548.
5. *Stečkin S. B.* On the approximation of periodic functions by de la Vallée Poussin sums // Anal. math. – 1978. – **4**. – P. 61 – 74.
6. *Габисония О. Д.* О приближении функций многих переменных целыми функциями // Изв. вузов. Математика. – 1965. – **45**, № 2. – С. 30 – 35.
7. *Kolmogoroff A.* Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Funktionen // Ann. Math. – 1935. – **36**, № 2. – S. 521 – 526.
8. *Теляковский С. А.* Приближение дифференцируемых функций суммами Валле Пуссена // Докл. АН СССР. – 1958. – **121**, № 3. – С. 426 – 429.
9. *Теляковский С. А.* Приближение функций, дифференцируемых в смысле Вейля, суммами Валле Пуссена // Там же. – 1960. – **131**, № 2. – С. 259 – 262.

10. *Теляковский С. А.* О приближение дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 2. – С. 213 – 242.
11. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **62**. – С. 61 – 97.
12. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. II // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – **27**, № 2. – С. 253 – 272.
13. *Тиман А. Ф.* Обобщение некоторых результатов А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского // Докл. АН СССР. – 1951. – **81**, № 4. – С. 509 – 511.
14. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
15. *Ефимов А. В.* О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – **23**, № 5. – С. 737 – 770.
16. *Ефимов А. В.* О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена. II // Там же. – 1960. – **24**, № 3. – С. 431 – 468.
17. *Рукасов В. И.* Приближение функций класса $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 4. – С. 478 – 483.
18. *Рукасов В. И.* Приближения операторами Валле Пуссена функций, заданных на действительной оси // Там же. – 1992. – **44**, № 5. – С. 682 – 690.
19. *Рукасов В. И., Новиков О. А.* Приближение аналитических функций суммами Валле Пуссена // Ряди Фур'є: теорія і застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – **20**. – С. 228 – 241.
20. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – **40**, ч. II. – 468 с.
21. *Рукасов В. І., Чайченко С. О.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1653 – 1668.
22. *Рукасов В. И.* Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций // Там же. – 2003. – **55**, № 6. – С. 806 – 816.
23. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Неравенства Лебега для интегралов Пуассона // Там же. – 2000. – **52**, № 6. – С. 798 – 808.
24. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**. – С. 207 – 256.
25. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126 – 151.
26. *Fejer L.* Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreiher // J. reine und angew. Math. – 1910. – **138**. – S. 22 – 53.

Одержано 01.04.2003