ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.12.003
УДК 517.9

С.М. Чуйко [1], О.В. Несмелова [2]

[1] Донбасский государственный педагогический университет, Славянск
[2] Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск
E-mail: chujko-slav@ukr.net, star-o@ukr.net

Метод Ньютона—Канторовича в теории автономных нетеровых краевых задач в случае параметрического резонанса

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины И.И. Скрыпником

Найдены конструктивные условия разрешимости и схема построения решений нелинейной автономной краевой задачи в случае параметрического резонанса. Построена сходящаяся итерационная схема для нахождения приближений к решению нелинейной автономной нетеровой краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случае параметрического резонанса. В качестве примера применения построенной итерационной схемы приведены приближения к решению периодической краевой задачи для автономного уравнения типа Дюффинга с параметрическим возмущением. Для контроля точности найденных приближений к решению периодической краевой задачи для автономного уравнения типа Дюффинга использованы невязки в исходном уравнении.

Ключевые слова: *нелинейная автономная краевая задача, параметрический резонанс, уравнение типа Дюффинга.*

1. Постановка задачи. Исследована задача о нахождении решений [1—3]

$$z(t,\varepsilon): z(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[a,b(\varepsilon)],\ z(t,\cdot)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0],\ b(\varepsilon),h(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случае параметрического резонанса [4, 5]

$$dz/dt = Az + f + \varepsilon Z(z,h(\varepsilon),\varepsilon), \qquad (1)$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),h(\varepsilon),\varepsilon),\quad \alpha\in\mathbb{R}^m. \qquad (2)$$

Решения нетеровой $(m \neq n)$ краевой задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения

$$z_0(t)\in\mathbb{C}^1[a,b_0],\quad b_0 = b(0),\quad h_0 = b(0)\in\mathbb{R}^q$$

порождающей задачи

$$dz_0/dt = Az_0 + f, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \tag{3}$$

Здесь A — постоянная $(n\times n)$-мерная матрица; $Z(z, h(\varepsilon), \varepsilon)$ — нелинейная вектор-функция, дважды непрерывно-дифференцируемая по неизвестным $z(t,\varepsilon)$ и $h(\varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно-дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — линейный и $J(z(\cdot,h(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)$ — нелинейный векторный функционалы $\ell z(\cdot,\varepsilon)$, $J(z(\cdot,h(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon): \mathbb{C}[a,b(\varepsilon)] \to \mathbb{R}^m$, причем второй функционал дважды непрерывно-дифференцируем по неизвестным $z(t,\varepsilon)$ и $h(\varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи и по малому параметру ε в малой окрестности решения порождающей задачи и на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Поставленная задача обобщает традиционные периодические краевые задачи в случае параметрического резонанса [4, 6] на случай общей нетеровой краевой задачи и продолжает исследование автономной нетеровой краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случае параметрического резонанса [5].

В критическом случае $(P_{Q^*} \neq 0)$ при условии

$$P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} = 0 \tag{4}$$

порождающая задача (3) имеет семейство решений [1]

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G[f;\alpha](t), \quad X_r(t) = X(t)P_{Q_r}, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $Q := \ell X(\cdot)$ — $(m\times n)$-матрица, $rank\, Q = n_1$, $n - n_1 := r$, P_{Q^*} — $(m\times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*}: \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$, $X(t)$ — нормальная $(X(a) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (3); P_{Q_r} — $(n\times r)$-матрица, составленная из r-линейно-независимых столбцов $(n\times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q: \mathbb{R}^n \to N(Q)$;

$$G[f;\alpha](t) = X(t)Q^+\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} + K[f](t)$$

— обобщенный оператор Грина задачи (3), Q^+ — псевдообратная по Муру—Пенроузу [1] матрица,

$$K[f](t) = X(t)\int_a^t X^{-1}(s) f ds$$

— оператор Грина задачи Коши для дифференциальной системы (3); I_n — единичная $(n\times n)$-матрица; матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из d-линейно-независимых столбцов матрицы-ортопроектора $P_{Q_d^*}$. В критическом случае задача (1), (2) существенно отличается от аналогичных неавтономных краевых задач; в отличие от последних, правый конец $b(\varepsilon)$ промежутка $[a, b(\varepsilon)]$, на котором ищем решение задачи (1), (2), неизвестен и подлежит определению в процессе построения решения. Совершая в задаче (1), (2) замену независимой переменной [3]

$$t = a + (\tau - a)(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)), \quad b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \quad \beta(0) = \beta^*,$$

приходим к задаче об отыскании решения

$$z(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[a,b_0],\quad z(\tau,\cdot)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0],\quad \beta(\varepsilon),\quad h(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

системы дифференциальных уравнений

$$dz(\tau,\varepsilon)/dt = Az(\tau,\varepsilon)+f+\varepsilon Z(z(\tau,\varepsilon),h(\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\beta(\varepsilon)[Az(\tau,\varepsilon)+\varepsilon Z(z(\tau,\varepsilon),h(\varepsilon),\varepsilon)],$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\ell z(\cdot,\varepsilon)=\alpha+\varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),h(\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\beta(\varepsilon)[\alpha+\varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),h(\varepsilon),\varepsilon)].$$

Далее, совершая замену неизвестной

$$z(\tau,\varepsilon)=z_0(\tau,c_r)+x(\tau,\varepsilon),\quad h(\varepsilon)=h_0+\mu(\varepsilon),\quad \beta(\varepsilon)=\beta_0+\eta(\varepsilon),$$

приходим к задаче об отыскании решения

$$x(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[a,b_0],\quad x(\tau,\cdot)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0],\quad \mu(\varepsilon),\eta(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

системы дифференциальных уравнений

$$dx(\tau,\varepsilon)/d\tau = Ax(\tau,\varepsilon)+\varepsilon Y(z_0(t,c_r)+x(\tau,\varepsilon),h_0+\mu(\varepsilon),\beta_0+\eta(\varepsilon),\varepsilon), \tag{5}$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\ell x(\cdot,\varepsilon)=\varepsilon H(z_0(\cdot,c_r)+x(\cdot,\varepsilon),h_0+\mu(\varepsilon),\beta_0+\eta(\varepsilon),\varepsilon). \tag{6}$$

Здесь

$$Y(z_0(\tau,c_r)+x(\tau,\varepsilon),h_0+\mu(\varepsilon),\beta_0+\eta(\varepsilon),\varepsilon):=(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))\times$$
$$\times Z(z_0(\tau,c_r)+x(\tau,\varepsilon),h_0+\mu(\varepsilon),\varepsilon)+\beta(\varepsilon)A(z_0(\tau,c_r)+x(\tau,\varepsilon)),$$

$$H(z_0(\cdot,c_r)+x(\cdot,\varepsilon),h_0+\mu(\varepsilon),\beta_0+\eta(\varepsilon),\varepsilon):=(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))\times$$
$$\times J(z_0(\cdot,c_r)+x(\cdot,\varepsilon),h_0+\mu(\varepsilon),\varepsilon)+\alpha\beta(\varepsilon):\mathbb{C}[a,b_0]\to\mathbb{R}^m.$$

В критическом $(P_{Q^*}\neq 0)$ случае при условии (4) краевая задача (5), (6) разрешима при условии

$$P_{Q_d^*}\{H(z_0(\cdot,c_r)+x(\cdot,\varepsilon),h_0+\mu(\varepsilon),\eta(\varepsilon),\varepsilon)- \tag{7}$$
$$-\ell K[Y(z_0(t,c_r)+x(\tau,\varepsilon),h_0+\mu(\varepsilon),\beta_0+\eta(\varepsilon),\varepsilon)](\cdot)\}=0.$$

Обозначим вектора

$$\breve{c}_0:=\begin{bmatrix} c_r \\ \beta_0 \\ h_0 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{r+q+1},\ \breve{c}_0^*:=\begin{bmatrix} c_r^* \\ \beta_0^* \\ h_0^* \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{r+q+1},\ \breve{c}(\varepsilon):=\begin{bmatrix} c_r(\varepsilon) \\ \mu(\varepsilon) \\ \eta(\varepsilon) \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{r+q+1}.$$

В силу непрерывности по z, β и по h нелинейной функции $Y(z,\beta(\varepsilon),h(\varepsilon),t,\varepsilon)$ и нелинейного векторного функционала $H(z(\cdot,\varepsilon),h(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи (3), начального значения h_0 функции $h(\varepsilon)$ и начального значения β_0 функции $\beta(\varepsilon)$, приходим к следующему уравнению:

$$\mathcal{F}(\breve{c}_0):=P_{Q_d^*}\{\alpha\beta_0+J(z_0(\cdot,c_r),h_0,0)-\ell K[\beta_0 Az_0(s,c_r)+Z(z_0(s,c_r),h_0,s,0)](\cdot)\}=0.$$

Необходимые условия существования решения автономной нетеровой краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса определяет следующая лемма, являющаяся обобщением соответствующего утверждения [1, 3] на случай параметрического резонанса, а также [5] на случай автономной краевой задачи (1), (2).

Лемма 1. *Пусть нетерова* $(m\neq n)$ *краевая задача* (1), (2) *представляет критический* $(P_{Q^*}\neq 0)$ *случай и выполнено условие разрешимости* (4) *порождающей задачи* (3). *Предположим также, что в малой окрестности порождающего решения*

$$z_0(t,c_r^*)\in\mathbb{C}^1[a,b_0^*],\quad b_0^*=b(0),\quad h_0^*=h(0)\in\mathbb{R}^q$$

слабонелинейная краевая задача (1), (2) *имеет решение*

$$z(t,\varepsilon):z(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[a,b(\varepsilon)],\quad z(t,\cdot)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0],\quad b(\varepsilon),h(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

при этом в достаточно малой окрестности вектора h_0^* *существует собственная функция* $h(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$. *Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{F}(\breve{c}_0^*)=0. \tag{8}$$

По аналогии с нетеровыми слабонелинейными краевыми задачами в критическом случае [1, 3], а также периодическими краевыми задачами [6—8], уравнение (8) будем называть уравнением для порождающих констант задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса. Предположим, что уравнение (8) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений $\breve{c}_0\in\mathbb{R}^{r+q+1}$ уравнения (8), приходим к задаче об отыскании решения

$$x(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[a,b_0],\quad x(\tau,\cdot)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0],\quad \mu(\varepsilon),\eta(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

задачи (5), (6) в окрестности порождающего решения

$$z_0(t,c_r^*)=X_r(t)c_r^*+G[f;\alpha](t),\quad c_r^*\in\mathbb{R}^r,$$

а также функций

$$h(\varepsilon):=h_0^*+\mu(\varepsilon),\quad \beta(\varepsilon)=\beta_0^*+\eta(\varepsilon),\quad \mu(\varepsilon),\quad \eta(\varepsilon)\in C[0,\varepsilon_0]$$

в окрестности точек h_0^* и β_0^*. В критическом случае $(P_{Q^*}\neq 0)$ при условии (4) для построения операторной системы, используемой для решения краевой задачи (5), (6) применена линеаризация условия разрешимости (7), при этом в случае простоты корней [1, 7] уравнения для порождающих констант (8)

$$P_{C_0^*(\breve{c}_0)} P_{Q_d^*} = 0, \quad C_0(\breve{c}_0^*) = \mathcal{F}'_{\breve{c}(\varepsilon)}(\breve{c}_0)$$

для решения операторной системы строилась итерационная схема, соответствующая методу простых итераций [1,5,7,8]. При этом, в частности, в случае нахождения приближений к периодическому решению при помощи итерационной схемы, соответствующей методу простых итераций, появлялись вековые члены. Причиной этого явления являлась линеаризация условия разрешимости (7), обеспечивающая лишь приближенные решения этого уравнения.

2. Итерационная схема. Для нахождения решения

$$x(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad h(\varepsilon) = h_0^* + \mu(\varepsilon),$$

$$x^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon \cdot G[Y(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon),$$

$$H(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon)](\tau).$$

краевой задачи (5), (6) применим метод Ньютона—Канторовича [9, 10].

Лемма 2. *Предположим, что для уравнения*

$$\mathcal{F}(\breve{c}(\varepsilon)) = 0 \tag{9}$$

выполнены следующие условия.

1. Нелинейная вектор-функция $\mathcal{F}(\breve{c}(\varepsilon)) : \mathbb{R}^{r+q+1} \to \mathbb{R}^d$, *дважды непрерывно дифференцируемая в окрестности нуля, имеет корень* $\breve{c}(\varepsilon)$.

2. В окрестности нуля имеют место неравенства

$$\| J_j^+ \| \leqslant \sigma_1(j), \quad \| d^2\mathcal{F}(\xi_j; \breve{c}(\varepsilon) - \breve{c}_j(\varepsilon)) \| \leqslant \sigma_2(j) \cdot \| \breve{c}(\varepsilon) - \breve{c}_j(\varepsilon) \|.$$

3. Существует константа

$$\theta := \sup_{j \in N} \left(\frac{\sigma_1(j)\sigma_2(j)}{2} \right).$$

Тогда при условиях

$$P_{J_j^*} = 0, \quad J_j := \mathcal{F}''(\breve{c}_j(\varepsilon)) \in \mathbb{R}^{d\times(r+q+1)}, \quad \theta \cdot |\breve{c}(\varepsilon)| < 1 \tag{10}$$

для нахождения решения $\breve{c}(\varepsilon)$ *уравнения* (9) *применима итерационная схема*

$$\breve{c}_{j+1}(\varepsilon) = \breve{c}_j(\varepsilon) - J_j^+ \mathcal{F}(\breve{c}_j(\varepsilon)), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

при этом скорость сходимости последовательности $\{\breve{c}_j(\varepsilon)\}$ *к решению* $\breve{c}(\varepsilon)$ *уравнения* (9) *квадратичная. Здесь* $P_{J_j^*} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{N}(J_j^*)$ *— ортопроектор матрицы* J_k^*.

Заметим, что условие (10) равносильно требованию полноты матрицы J_k и возможно лишь в случае $d \leqslant p + q + 1$.

Теорема. *Предположим, что для порождающей задачи* (3) *имеет место критический случай* ($P_{Q^*} \neq 0$) *и выполнено условие ее разрешимости* (4). *Предположим также, что для* *уравнения* (9) *выполнены условия леммы 2. Тогда для каждого корня* $c_r^* \in \mathbb{R}^r$, $h_0^* \in \mathbb{R}^q$ *уравнения для порождающих констант* (8) *в окрестности порождающего решения* $z_0(\tau, c_r^*)$, *а также в окрестности точек* h_0^* *и* β_0^* *для нахождения по меньшей мере одного решения*

$$z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b_0], \quad z(\tau, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad h(\varepsilon), \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

задачи (1), (2) *в случае параметрического резонанса применима итерационная схема*

$$\begin{gathered} z_{k+1}(\tau, \varepsilon) = z_0(\tau, c_r^*) + x_{k+1}(\tau, \varepsilon), \quad \beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_0^* + \eta_{k+1}(\varepsilon), \quad h_{k+1}(\varepsilon) = h_0^* + \mu_{k+1}(\varepsilon), \\ x_{k+1}(\tau, \varepsilon) = X_r(\tau) c_{r_{k+1}}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(\tau, \varepsilon), \quad \mathcal{F}(\breve{c}_{k+1}(\varepsilon)) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \\ x_{k+1}^{(1)}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \cdot G[Y(z_0(s, c_r^*) + x_k(s, \varepsilon), h_0^* + \mu_k(\varepsilon), \beta_0^* + \eta_k(\varepsilon), \varepsilon), \\ H(z_0(\cdot, c_r^*) + x_k(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu_k(\varepsilon), \beta_0^* + \eta_k(\varepsilon), \varepsilon)](\tau). \end{gathered} \tag{12}$$

Длина отрезка $[0, \varepsilon^*]$, на котором применима итерационная схема (12), может быть оценена из условия (10).

3. Автономная периодическая задача для уравнения типа Дюффинга с параметрическим возбуждением. Условия доказанной теоремы выполняются в случае автономной периодической задачи для уравнения типа Дюффинга с параметрическим возбуждением

$$y'' + y = \varepsilon y^3 + \varepsilon h(\varepsilon)(y' + y'^3). \tag{13}$$

Заметим, что в отличие от статьи [5] уравнение типа Дюффинга (13) с параметрическим возбуждением является автономным. Уравнение (13) приводится к виду (1) при

$$z(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} z^{(a)}(t, \varepsilon) \\ z^{(b)}(t, \varepsilon) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z(z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ h(\varepsilon) z^{(b)}(t, \varepsilon) + h(\varepsilon)(z^{(b)}(t, \varepsilon))^3 + (z^{(a)}(t, \varepsilon))^3 \end{bmatrix}.$$

Порождающая периодическая задача для уравнения типа Дюффинга (13) с параметрическим возбуждением разрешима и при соответствующей фиксации начала отсчета независимой переменной имеет общее решение [2]

$$z_0(t, c_r) = X_r(t) c_r, \quad X_r(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \quad c_r \in \mathbb{R}^1.$$

Уравнение для порождающих констант (8) в случае периодической задачи для уравнения типа Дюффинга (13) с параметрическим возбуждением

$$\pi c_r (3 c_r^2 - 8 \beta_0) = 0, \quad \pi c_r h_0 (3 c_r^2 + 4) = 0$$

имеет простой корень [1, 3, 5, 7]

$$c_r^* = \frac{1}{10}, \quad \beta_0^* = \frac{3}{800}, \quad h_0^* = 0, \quad C_0(\breve{c}_0^*) = \frac{\pi}{4000}\begin{bmatrix} 0 & -800 & 0 \\ 403 & 0 & 403 \end{bmatrix}.$$

На первом шаге итерационной схемы (12) в силу полноты ранга матрицы J_0 условие (10) выполнено. Положим $\varepsilon := 0,1.$ Первое приближение к решению периодической задачи для уравнения (13) имеет вид

$$y_1(\tau,\varepsilon) = c_{r_1}(\varepsilon)\cos\tau + y_1^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad h_1(\varepsilon) = h_0^* + \mu_1(\varepsilon), \quad y_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{32\,000}(\cos\tau - \cos 3\tau),$$

где

$$c_{r_1}(\varepsilon) \approx -\frac{8413}{25\,079\,771\,422}, \quad \beta_1(\varepsilon) \approx \frac{7\,140\,587}{1\,903\,038\,646}, \quad h_1(\varepsilon) = \mu_1(\varepsilon) = 0.$$

На втором шаге итерационной схемы (12) в силу полноты ранга матрицы J_1 условие (10) также выполнено, при этом

$$y_2(\tau,\varepsilon) = c_{r_2}(\varepsilon)\cos\tau + y_2^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad h_2(\varepsilon) = h_0^* + \mu_2(\varepsilon).$$

Здесь

$$y_2^{(1)}(\tau,\varepsilon) \approx \frac{155\,839\cos\tau}{49\,833\,136\,807} - \frac{112\,138\cos 3\tau}{35\,857\,607\,281} + \frac{67\cos 5\tau}{685\,548\,603\,382} -$$

$$-\frac{\cos 7\tau}{654\,850\,200\,560\,485} - \frac{\cos 9\tau}{104\,778\,954\,869\,870\,365\,088},$$

а также

$$c_{r_2}(\varepsilon) \approx -\frac{34\,312}{102\,284\,783\,173}, \quad \beta 2(\varepsilon) \approx \frac{31\,802\,653}{8\,475\,728\,456}, \quad h_2(\varepsilon) = \mu_2(\varepsilon) = 0.$$

На третьем шаге итерационной схемы (12) в силу полноты ранга матрицы J_2 условие (10) также выполнено, при этом

$$y_3(\tau,\varepsilon) = c_{r_3}(\varepsilon)\cos\tau + y_3^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad h_3(\varepsilon) = h_0^* + \mu_3(\varepsilon).$$

Здесь

$$y_3^{(1)}(\tau,\varepsilon) \approx \frac{149\,943\cos\tau}{47\,947\,755\,026} - \frac{106\,169\cos 3}{33\,948\,940\,663} + \frac{447\cos 5\tau}{4\,570\,493\,090\,387} +$$

$$+\frac{\cos 7\tau}{327\,064\,274\,993\,900} + \frac{\cos 9\tau}{12\,308\,773\,007\,388\,528\,938},$$

а также

$$c_{r_3}(\varepsilon) \approx -\frac{39\,176}{116\,784\,468\,121}, \quad \beta_3(\varepsilon) \approx \frac{1\,318\,533}{351\,402\,371}, \quad h_3(\varepsilon) = \mu_3(\varepsilon) = 0.$$

Найденные нулевое и первые три приближения к периодическому решению уравнения типа Дюффинга (13) с параметрическим возбуждением и функции $h(\varepsilon)$ характеризуют невязки

$$\Delta_k(\varepsilon) = \| y_k''(t,\varepsilon) + y_k(t,\varepsilon) - \varepsilon y_k^3(t,\varepsilon) -$$

$$-\varepsilon h_k(\varepsilon) y_k'(t,\varepsilon) - \varepsilon h_k(\varepsilon) y_k'^3(t,\varepsilon) \|_{\mathbb{C}[0;\,2\pi(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))]}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

В частности, при $\varepsilon = 0{,}1$ имеем:

$$\Delta_0(0{,}1) \approx 0{,}0000\,25, \quad \Delta_1(0{,}1) \approx 1{,}99\,328 \cdot 10^{-8},$$

$$\Delta_2(0{,}1) \approx 1{,}72\,064 \cdot 10^{-12}, \quad \Delta_3(0{,}1) \approx 1{,}03\,067 \cdot 10^{-16}.$$

Предложенный в статье способ исследования автономных нетеровых краевых задач в случае параметрического резонанса аналогично [11, 12] может быть перенесен на матричные краевые задачи. С другой стороны, этот способ исследования автономных нетеровых краевых задач в случае параметрического резонанса аналогично [13, 14] может быть перенесен на краевые задачи в частных производных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Украины (ГР № 0118U003390).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems, 2-th edition. Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. 298 p.
2. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Москва: Гостехиздат, 1956. 491 с.
3. Boichuk A., Chuiko S. Autonomous Weakly Nonlinear Boundary Value Problems in Critical Cases. *Diff. Equations*. 1992. **10**. P. 1353—1358.
4. Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д. О параметрическом возбуждении электрических колебаний. *Журн. техн. физики*. 1934. **3**. С. 5—29.
5. Chuiko S.M. Nonlinear Noetherian boundary-value problem in the case of parametric resonance. *J. Math. Sci. (N.Y.)*. 2015. **205**, № 6. P. 859—870.
6. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. Москва: Наука, 1987. 328 с.
7. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. Москва: Наука, 1979. 432 с.
8. Чуйко С.М., Кулиш П.В. Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса. *Труды ИПММ НАН Украины*. 2012. **24**. С. 243—252.
9. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. Москва: Наука. 1977. 744 с.
10. Chuiko S.M. To the generalization of the Newton—Kantorovich theorem. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv Nat. Univ. Ser. math., appl. mathematics and mechanics*. 2017. **85**, № 1. P. 62—68.
11. Boichuk A.A., Krivosheya S.A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation. *Diff. Equations*. 2001. **37**, № 4. P. 464—471.
12. Chuiko S.M. The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem. *Siber. Math. J.* 2015. **56**, № 4. P. 752–760.
13. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yefimushkin A. On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane. *J. Math. Sci.* 2016. **214**. P. 200—219.
14. Skrypnik I.I. Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. *Israel J. Math*. 2016. **215**, № 1. P. 163—179.

Поступило в редакцию 24.09.2019

REFERENCES

1. Boichuk, A. A. & Samoilenko, A. M. (2016). Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems, 2-th edition. Berlin; Boston: De Gruyter.
2. Malkin, I. G. (1956). Some problems of the theory of nonlinear oscillations. Moscow: Gostekhizdat (in Russian).
3. Boichuk, A. & Chuiko, S. (1992). Autonomous Weakly Nonlinear Boundary Value Problems in Critical Cases. Diff. Equations, 10, pp. 1353-1358.
4. Mandelstam, L. I. & Papaleksi, N. D. (1934). On the parametric excitation of electrical vibrations. Zhurn. tech. Phys., 3, pp. 5-29 (in Russian).
5. Chuiko, S. M. (2015). Nonlinear Noetherian boundary-value problem in the case of parametric resonance. J. Math. Sci. (N.Y.), 205, No. 6, pp. 859-870.
6. Yakubovich, V. A. & Starzhinsky, V. M. (1987). Parametric resonance in linear systems. Moscow: Nauka (in Russian).
7. Grebenikov, E. A. & Ryabov, Yu. A. (1972). Constructive methods of analysis of nonlinear systems. Moscow: Nauka (in Russian).
8. Chuiko, S. M.& Kulish, P. V. (2012). Linear Noetherian boundary value problem in the case of parametric resonance. Trudy IPMM NAN Ukrainy. 24, pp. 243-252 (in Russian).
9. Kantorovich, L. V. & Akilov, G. P. (1977). Functional analysis. Moscow: Nauka (in Russian).
10. Chuiko, S. M. (2017). To the generalization of the Newton—Kantorovich theorem. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv Nat. Univ. Ser. math., appl. mathematics and mechanics. 85, No. 1, pp. 62-68.
11. Boichuk, A. A. & Krivosheya, S. A. (2001). A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation. Diff. Equations, 37, No. 4, pp. 464-471.
12. Chuiko, S. M. (2015). The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem. Siber. Math. J., 56, No. 4, pp. 752-760.
13. Gutlyanskii, V. & Ryazanov, V. & Yefimushkin, A. (2016). On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane. J. Math. Sci., 214, pp. 200-219.
14. Skrypnik, I. I. (2016). Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. Israel J. Math., 215, No. 1, pp. 163-179.

Received 24.09.2019

С.М. Чуйко [1], *О.В. Нєсмєлова* [2]

[1] Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ
[2] Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ
E-mail: chujko-slav@ukr.net, star-o@ukr.net

МЕТОД НЬЮТОНА—КАНТОРОВИЧА В ТЕОРІЇ АВТОНОМНИХ НЕТЕРОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ВИПАДКУ ПАРАМЕТРИЧНОГО РЕЗОНАНСУ

Знайдено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної автономної крайової задачі у випадку параметричного резонансу. Побудовано збіжну ітераційну схему для знаходження наближень до розв'язків нелінійної автономної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу. Як приклад застосування побудованої ітераційної схеми, знайдені наближення до розв'язків періодичної крайової задачі для автономного рівняння типу Дюффінга з параметричним збуренням. Задля контролю точності знайдених наближень до розв'язків періодичної крайової задачі для автономного рівняння типу Дюффінга застосовано нев'язки у вихідному рівнянні.

Ключові слова: *нелінійна автономна крайова задача, випадок параметричного резонансу, рівняння типу Дюффінга.*

S.M. Chuiko [1], *O.V. Nesmelova* [2]

[1] Donbas State Pedagogical University, Slov'yansk
[2] Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Slov'yansk
E-mail: chujko-slav@ukr.net, star-o@ukr.net

THE NEWTON—KANTOROVICH METHOD
IN THE THEORY OF AUTONOMOUS NOETHERIAN
BOUNDARY-VALUE PROBLEMS
IN THE CASE OF PARAMETRIC RESONANCE

We have found constructive conditions of solvability and a convergent iterative scheme for constructive solutions of a nonlinear autonomous Noetherian boundary-value problem in the case of parametric resonance. As an example of applying the scheme, some approximations to the solution of a periodic boundary-value problem for an autonomous equation of the Duffing type with a parametric perturbation are determined. To control the accuracy of the approximations, residuals in the original equation are applied.

Keywords: *nonlinear autonomous boundary-value problem, case of parametric resonance, Duffing-type equation.*