

ВЫДЕЛЕНИЕ ТЕПЛА ПРИЛИВНОГО ТРЕНИЯ  
НА СТАДИИ ФОРМИРОВАНИИ ЗЕМЛИ

Ю.В. Хачай, О.А. Хачай, А.Н. Антипин

*Институт геофизики им. Ю.П. Булашевича УрО РАН, ул. Амундсена, 100, г. Екатеринбург, 620016, Российская Федерация, e-mail: yu-khachay@yandex.ru; olgakhachay@yandex.ru*

Современные исследования показали важность учета вклада внутренних источников энергии и процессов теплопереноса во внутренние оболочки протопланеты и их влияния на динамику формирования Земли. В качестве основных рассматриваются вклады потенциальной энергии, сопровождающей формирование конденсированного тела из протопланетного облака; энергии естественного радиоактивного распада короткоживущих радиоактивных элементов и энергии гравитационного сжатия. Однако следует обратить внимание на то, что формирование Земли происходило по сути в двойной системе Земля–Луна. Поэтому важно учитывать выделение энергии вязкого трения лунных приливов, которое существенно изменялось на стадии вещественной аккумуляции системы. Предложенная ранее модель дифференциации вещества Солнечного протопланетного облака в процессе вещественной аккумуляции планет земной группы опирается на численные результаты решения краевой задачи для системы уравнений, описывающей баланс импульса энергии, массы, температуры и давления во внутренних областях растущих Земли и Луны.

**Ключевые слова:** краевая задача для системы дифференциальных уравнений, алгоритм ее численного решения, вклад диссипации приливной энергии.

**Введение.** Для описания роста массы протопланет использовалось уравнение Сафронова [4]

$$\frac{\partial m}{\partial t} = 2(1 + 2\theta)r^2\omega\left(1 - \frac{m}{M}\right)\sigma, \quad (1)$$

где  $m$  – текущее значение массы растущего тела;  $M$  – конечная масса планеты;  $r$  – радиус растущей протопланеты;  $\theta$  – статистический параметр, который учитывает распределение тел и частиц по массам и скоростям в “зоне питания” протопланеты;  $\sigma$  – поверхностная плотность вещества протопланетного облака на орбите растущего тела;  $\omega$  – угловая скорость орбитального вращения;  $t$  – момент времени. Изменение температуры  $\Delta T$  во внутренних частях растущих планет описывалось системой уравнений

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}(\nabla \vec{V})\right) = -\nabla P + \mu \Delta \vec{V} + 2\rho \vec{V} \times \vec{\Omega} - \rho \nabla W, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}(\nabla T) = \chi \Delta T + Q_1, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\rho$  – плотность среды;  $\vec{V}$  – объемная скорость течения среды;  $P$  – давление;  $M$  – кинематическая вязкость среды;  $\vec{\Omega}$  – угловая скорость вращения;  $W$  – потенциал вращающегося тела;  $T$  – температура среды в данной точке в момент времени  $t$ ;  $Q_1$  – нормированная суммарная мощность выделения удельной внутренней энергии. Использование приближения Буссинеска существенно упрощает

рассмотрение уравнений (2)–(4), а в уравнении баланса энергии здесь учитываются адиабатическое нагревание и выделение энергии радиоактивных источников  $Q_1$ , но не принимается во внимание вклад диссипации энергии вязкого трения.

Численно решается система уравнений в сферическом секторе, на боковых поверхностях заданы условия периодичности, а на внешней поверхности растущего радиуса вычисляются условия [5].

$$k\rho \frac{\gamma M}{r} \frac{dr}{dt} = \varepsilon \sigma [T^4 - T_1^4] + \rho c_p [T - T_1] \frac{dr}{dt}, \quad (5)$$

где  $\rho$  – плотность вещества;  $\gamma$  – гравитационная постоянная;  $M$  – масса растущей планеты;  $r$  – ее радиус;  $T$  и  $T_1$  – соответственно, температуры поверхности тела и внешней среды;  $\varepsilon$  – коэффициенты проницаемости;  $c_p$  – коэффициент удельной теплоемкости;  $k$  – доля преобразования потенциальной энергии в тепловую.

В публикации [5] показано, что выделение энергии при распаде короткоживущих радиоактивных элементов уже в небольшом теле, размером более 50 км, достаточно, чтобы температура внутри такого планетного зародыша стала выше температуры плавления железа. Это обеспечивает реализацию процесса дифференциации вещества и развитие конвекции во внутренних оболочках. По мере роста Земли формирующаяся область внешне-го ядра оставалась в расплавленном состоянии.

Последовательно сменяясь по мере роста протопланеты, основной вклад тепла сначала обеспе-

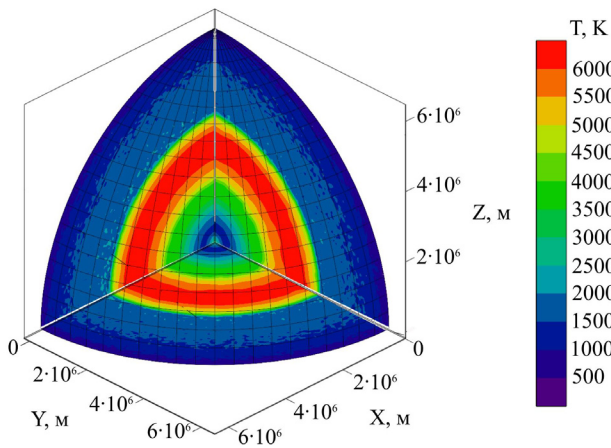


Рис. 1. Пример распределения температуры и начальных тепловых неоднородностей в протопланете к концу ее аккумуляции энергии без учета тепла приливного трения

Fig. 1. An example of temperature and initial heterogeneities distribution into the proto planet of the Earth to the end of the energy accumulation without account of tidal friction heat.

чивали короткоживущие радиоактивные источники, затем — подогрев сверху за счет превращения части кинетической энергии в потенциальную во время соударений с растущей Землей и, наконец, нагревание теплом. Использование 3D модели при решении системы уравнений (2)–(4) с граничным условием (5) позволило проследить возникновение и развитие тепловых неоднородностей в растущем ядре и мантии Земли. Подобные результаты получены для Луны. Приповерхностные тепловые неоднородности, образующиеся за счет случайного распределения падения тел на формирующуюся планету, не успевают гомогенизироваться и обуславливают сложную структуру распределения концентрационных и тепловых неоднородностей (рис. 1, 2). В тоже время Земля и Луна образуют тесную двойную систему. Поэтому их термическую эволюцию на стадии аккумуляции энергии надо анализировать совместно. На необходимость учета выделения тепла, обусловленного затуханием приливов на этапе аккумуляции энергии Земли, обращено внимание в работах [3, 6].

**Постановка задачи и решение.** Для математического описания термической эволюции растущих в процессе аккумуляции энергии прото Земли и прото Луны как тесной двойной системы, необходимо учесть эволюцию орбиты спутника — Луны, связанную с приливным взаимодействием, и диссипацию энергии вязкого трения течений вязкой жидкости, возбуждаемых этим взаимодействием. В отличие от модели, для описания которой еще применимо приближение Буссинеска для несжимаемой вязкой жидкости, для двойной системы уже нельзя использовать приближение несжимаемости в уравнениях (2), (4). В рассматриваемой модели приливным взаимодействием Солнца и планет будем пренебрегать, что позволит использовать результаты анализа тесной двойной системы.

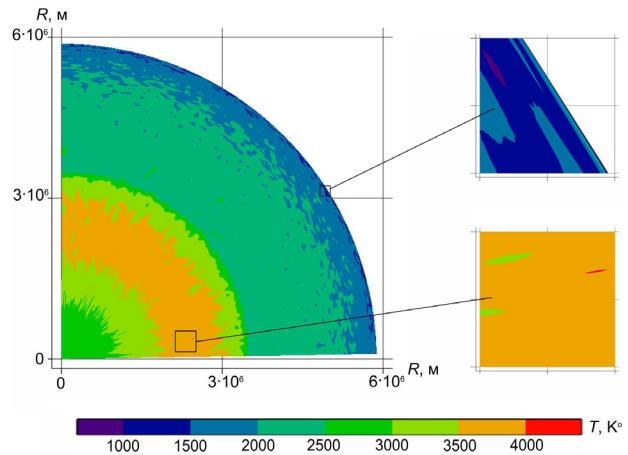


Рис. 2. Распределение температуры земных недр к окончанию аккумуляции энергии по срезу 3D сектора (без учета тепла диссипации энергии приливного трения)

Fig. 2. Temperature distribution of the Earth's interior to the end of energy accumulation by 3D sector (without account the dissipation energy heat of tidal friction)

Для системы Земля–Луна можно применить приближение для закона сохранения количества движения без учета взаимодействия с Солнцем, обеспечивающего солнечный прилив [3]:

$$I \Omega + \frac{M_1 \cdot m_1}{M_1 + m_1} L^2 \omega = \text{const}, \quad (6)$$

где  $I$  — момент инерции растущей Земли;  $\Omega(t)$  — угловая скорость ее вращения вокруг собственной оси в момент времени  $t$ ;  $\omega(t)$  — угловая скорость орбитального движения Луны вокруг Земли для этого же момента времени;  $M_1$  — масса Протоземли для момента времени ( $t$ );  $m_1$  — масса Протолуны в этот же момент времени ( $t$ );  $L(t)$  — расстояние между центрами масс Земли и Луны.

Для энергии собственного движения Земли  $E_\Omega$  и полной энергии орбитального движения Луны  $E_\omega$  можно использовать выражения

$$E_\Omega = I \frac{\Omega^2}{2}, \quad E_\omega = -\gamma \frac{M_1(t) m_1(t)}{2L}. \quad (7)$$

Для описания динамики системы Земля–Луна необходимо вычислить диссипативную функцию  $\Phi$  из полного уравнения для каждой из областей расплава, как видно из результатов для более простой модели (рис. 1, 2), и каждого момента времени. Функция, описывающая диссипацию энергии в вязкой жидкости в декартовой системе координат, имеет вид:

$$\Phi = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 \right] + \lambda \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2, \quad (8)$$

где  $\mu$  и  $\lambda$  – коэффициенты первой и второй вязкости;  $u_x, u_y, u_z$  – проекции скорости в декартовых координатах. При этом уравнение баланса температуры принимает вид

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}(\nabla T) \right) = \lambda \Delta T + Q_1 + \Phi, \quad (9)$$

где  $c$  – удельная теплоемкость;  $\lambda$  – теплопроводность;  $\Phi$  – мощность внутренних источников тепла за счет диссипации энергии вращения.

Алгоритм решения этой нелинейной системы уравнений следующий. Для каждого момента времени, согласно уравнению (1), находится новое значение масс Земли и Луны при фиксированном шаге по координате  $r$ . Вычисляются новые граничные условия для прото Земли и подобные для прото Луны. Решается прямая задача для тела с увеличившимся радиусом, причем в качестве начальных условий используются поля температур, вектора скорости и давления. Вычисляются распределения температуры плавления и функции  $\Phi$  в уравнении (9) от нового распределения температур и давления. Производятся итерации до обеспечения заданной точности решения. Решается система (6)–(7) и определяются новые параметры орбиты спутника, после чего осуществляется следующий шаг по пространственной сетке. Однако для решения этой нелинейной краевой задачи требуется необходимое количество итераций на каждом временном шагу. При этом очень грубые оценки зависимостей вязкости от температуры и давления приводят к труднопреодолимым вычислительным сложностям. В связи с изложенным ограничимся оценкой, которую можно получить, применив феноменологический подход и приближение добротности внутренних областей Земли и Луны, опираясь на результаты, приведенные в работах [2, 3]. Используем добротность  $Q$  как долю диссипирующей в тепло энергии за один период колебаний  $E$ :

$$Q^{-1} = \frac{\delta E}{2\pi E}. \quad (10)$$

Эта функция оценивается по современным сейсмическим результатам о затухании собственных колебаний Земли для модельного гидростатического давления и оценкам современной температуры [7]. Приливное взаимодействие перераспределяет моменты количества движения между телами, образующими замкнутую систему, и современное его значение хорошо известно. При этом вращательная энергия не сохраняется, а диссипирует в тепло и должна учитываться как источниковый член в уравнении (9).

**Заключение.** Из приведенного рассмотрения можно получить следующие качественные оценки. Поскольку угловая скорость орбитального движения спутника намного больше угловой скорости собственного вращения планеты, согласно закону сохранения момента количества движения (6) приливное взаимодействие по мере увеличения массы центрального тела обеспечивало передачу орбитального момента количества движения спутника центральному массивному телу. Следовательно, теряя орбитальный момент, спутник должен был приближаться к центральному телу вплоть до орбиты Роша. Задача о поведении спутника на пределе Роша требует аккуратного математического исследования. Вследствие продолжающейся передачи орбитального момента спутника на центральное тело его собственная угловая скорость продолжала расти. Это должно было привести к увеличению орбитальной угловой скорости спутника, а также радиуса его орбиты, что и наблюдается до настоящего времени. Таким образом, влияние диссипации вязкого трения наиболее существенно могло проявиться на стадии формирования внешнего ядра Земли. Полученные результаты зависят от параметров, прежде всего, зависимости вязкости от температуры и давления, значения которых известны с большой степенью неопределенности. Их предстоит уточнить в результате дальнейших физико-математических и косвенных геологических исследований.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №16-05-00540.

#### Список библиографических ссылок

1. Анфилогов В.Н., Хачай Ю.В. Возможный вариант дифференциации вещества на начальном этапе формирования Земли. *ДАН*, 2005. Т. 403, № 6. С. 803–806.
2. Жарков В.Н., Трубицин В.П. Физика планетных недр. М.: Наука, 1980. 448 с.
3. Рускол Е.Л. Происхождение Луны. М.: Наука, 1975. 188 с.
4. Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука, 1969. 168 с.
5. Anfilogov V., Khachay Y. Some Aspects of the Solar System Formation. *SpringerBriefs of the Earth Sciences*, 2015. 75p.
6. Khachay Yu.V., Nachay O.A. Heat production by the viscous dissipation of energy at the stage of accumulation of the Earth. *Geophysical Research Abstracts*, 2016. Vol. 18, EGU2016-2825.
7. Schubert G., Turcotte D., Olson P. Mantle convection in the Earth and planets. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 940 p.

Поступила в редакцию 13.07.2017 г.

## ВИДІЛЕННЯ ТЕПЛА ПРИПЛИВНОГО ТЕРТЯ НА СТАДІЇ ФОРМУВАННЯ ЗЕМЛІ

*Ю.В. Хачай, О.О. Хачай, О.М. Антунін*

*Інститут геофізики ім. Ю.П. Булашевич УрО РАН, вул. Амундсена, 100, г. Екатеринбург, 620016, Російська Федерація, e-mail: yu-khachay@yandex.ru; olgakhachay@yandex.ru*

Сучасні дослідження показали важливість урахування внеску внутрішніх джерел енергії і процесів тепломасоперенесення у внутрішні оболонки протопланети і їх впливу на динаміку формування Землі. Як основні розглянуто внески потенціальної енергії, що супроводжує формування конденсованого тіла з протопланетної хмари; енергії природного радіоактивного розпаду короткоіснуючих радіоактивних елементів і енергії гравітаційного стиснення. Втім слід звернути увагу на те, що формування Землі відбувалося по суті у подвійній системі Земля–Місяць. Тому важливо враховувати виділення енергії в'язкого тертя місячних припливів, яке істотно змінювалося на стадії акумуляції системи. Модель диференціації речовини Сонячної протопланетної хмари в процесі речовинної акумуляції планет земної групи, яку запропоновано раніше, ґрунтується на чисельних результатах розв'язку крайової задачі для системи рівнянь, що описує баланс імпульсу енергії, маси, температури і тиску у внутрішніх зонах зростаючих Землі і Місяця.

**Ключові слова:** крайова задача для системи диференціальних рівнянь, алгоритм чисельного розв'язку, внесок дисипації приливної енергії.

## VISCOUS DISSIPATION OF ENERGY AT THE STAGE OF FORMATION OF THE EARTH

*Yu.V. Khachay, O.A. Hachay, A.N. Antipin*

*Institute of Geophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 100, Amundsen Str., Ekaterinburg, 620016, Russian Federation, e-mail: yu-khachay@yandex.ru; olgakhachay@yandex.ru*

**Purpose** Modern studies have shown the importance of taking into account the contribution of internal energy sources and heat-mass transfer processes in the inner shells of the protoplanet and their influence on the dynamics of the formation of the Earth in the process of its accumulation [1, 5]. Among the major contributors are the potential energy accompanying the formation of a condensed body from a protoplanetary cloud, the energy of naturally radioactive decay of short-lived radioactive elements, and the energy of gravitational compression. However, attention should be paid to the fact that the formation of the Earth took place essentially in the binary system Earth-Moon. Therefore, it is important to take into account the energy release of viscous friction of the lunar tides, which changed significantly during the accumulation phase of the system. In [1, 5], a model for the differentiation of the substance of the solar protoplanetary cloud was proposed in the process of accumulation of terrestrial planets based on the obtained numerical results of the solution of the boundary value problem for a system of equations describing the balance of momentum, mass, temperature and pressure in the inner regions of the growing Earth and Moon in the process of their accumulation (1)–(5).

**Design/ methodology/ approach** In order to investigate the problem, we used the numerical solution of boundary value problems for the 3D system of differential equations. We constructed a non-uniform difference grid for time and space variables and used a standard implicit difference scheme. An iterative process was constructed, which begins with the solution of equation (1), from which the time step is located. Then we included the solution of the problems for equation (2)–(3) with the values of the coefficients in equations (2)–(3) and (6)–(9) calculated from the values at the previous stage, and the internal iteration cycle. After the specified relative accuracy is achieved, a step is taken along the selected radius, and an external cycle is started.

**Findings** From the above, the following qualitative estimates can be obtained. Since the angular velocity of the orbital motion of the satellite is much greater than the angular velocity of the planet's own rotation, it follows from the law of conservation of angular momentum (6) that the tidal interaction with increasing mass of the central body ensures the transfer of the orbital angular momentum of the satellite to the central massive body. Consequently, losing the orbital moment, the satellite must approach the central body right up to the Roche orbit. The problem of the behavior of a satellite at the Roche limit requires a careful mathematical study. Due to the continuing transfer of the satellite's orbital moment to the central body, its own angular velocity continues to grow. This should lead to an increase in the orbital angular velocity of the satellite and an increase in the radius of its orbit, which is observed up to the present time. Thus, the effect of dissipation of viscous friction must have manifested itself at the stage of formation of the outer core of the Earth. The results obtained depend on the parameters, primarily, the viscosity versus temperature and pressure, the values of which are known with a high degree of uncertainty. They are to be clarified as a result of further physical-mathematical and indirect geological research.

**Practical value/ implications** The results obtained will serve as a basis for constructing new systems of differential equations of Earth's dynamics at the stage of planetary accumulation, as well as revealing the role of the energy dissipation of viscous friction in the differentiation processes of the matter of the interior envelopes of the Earth at the stage of its formation, which provided the features of the MHD processes of the Earth's dynamo and metallogeny of the Earth's lithosphere.



**Keywords:** boundary problem for a system of differential equations, algorithm of numerical solution, contribution of the dissipation of tidal energy.

#### References

1. Anfilogov V.N., Khachay Y.V. A possible variant of matter differentiation at the initial stage of Earth's forming. *DAN*. 2005, V. 403, N 6, pp. 803-806. [in Russian].
2. Zharkov V.N., Trubitsin V.P. Physics of the planetary interior. M., Nauka. 1980. 448 p. [in Russian].
3. Ruskol E.L. Origin of the Moon. M., Nauka. 1975. 188 p. [in Russian].
4. Safronov V.S. Evolution of proto planet cloud and origin of the Earth and planets. M., Nauka, 1969. 168 p. [in Russian].
5. Anfilogov V., Khachay Y. Some Aspects of the Solar System Formation. Springer Briefs of the Earth Sciences. 2015. 75p.
6. Khachay Yu.V., Hachay O.A. Heat production by the viscous dissipation of energy at the stage of accumulation of the Earth. *Geophysical Research Abstracts*. 2016, Vol. 18, EGU2016-2825.
7. Schubert G., Turcotte D., Olson P. Mantle convection in the Earth and planets. Cambridge, Cambridge University Press, 2001. 940 p.

*Received 13/07/2017*