УДК 004.932

Р. А. Воробель

ВИКОРИСТАННЯ ТРИКУТНИХ НОРМ ДЛЯ ПОБУДОВИ АЛГЕБР З ОПЕРАЦІЯМИ ЛОГАРИФМІЧНОГО ТИПУ

Method for algebras construction, which are base strict additive generators of triangular *t*-norms is presented. Logarithmic type functions are used for such generators. Construction of algebras for set [0, *M*] and set (0, ∞) are shown. Examples for new logarithmic type algebras are presented.

Keywords: *image processing algebra, strict triangular norms, additive generators.*

Описано спосіб конструювання алгебр, які будуються на основі адитивних генераторів строгих трикутних *t*-норм. Як генератори використано функції логарифмічного типу. Розглянуто конструювання алгебр з операціями на множині [0, *M*] та (0, ∞). Наведено приклади нових алгебр з операціями логарифмічного типу.

Ключові слова: *алгебра обробки зображень, строгі трикутні норми, адитивні генератори.*

Розвиток обробки зображень спричинився до широкого використання моделей, які випливають з фізичних законів проходження світла через частково поглинаюче середовище. Прикладом цього є різні типи моделей опрацювання зображень, які базуються на їх логарифмічній обробці (ЛОЗ) [1, 4–5, 7–10, 12–15] та відрізняються областю визначення вхідних величин. Вони можуть бути задані на проміжках $[0, M]$, $(-M, M)$, де $M > 0$, $(0, \infty)$.

Характерною ознакою так побудованих моделей є те, що вони відтворюють алгебраїчну структуру (алгебру), арифметичні операції якої відображають нелінійні властивості наперед заданих функцій логарифмічного типу. Крім того, як зазначено у працях [5, 14, 15], ці алгебри базуються на використанні трикутних норм [6, 11]. Детальний спосіб побудови алгебр, вхідні величини яких задані на інтервалі $(-M, M)$, описано у роботі [3]. Тут же розглянемо способи конструювання алгебр з операціями на проміжку $[0, M]$ та $(0, \infty)$. З робіт [3, 6, 11, 14, 15] випливає, що для наперед заданої бієкції $s_a(u)$, яка є адитивним генератором строгої трикутної *s*-норми *S* [6, 11] і характеризується властивістю $s_a[0,1] \to [0, \infty]$, причому $s_a(0) = 0$, операція додавання в загальному випадку визначається строгою трикутною *s*-нормою *S*:

$$\forall u, v \in [0, M]$$

$$u \oplus_{s_a} v = S_{s_a}(u, v) = s_a^{-1}\left(s_a\left(\frac{u}{M}\right) + s_a\left(\frac{v}{M}\right)\right), \tag{1}$$

а операція множення на додатний скаляр $\alpha \in R^+$ описується виразом

$$\alpha \otimes_{s_a} u = s_a^{-1}(\alpha \cdot s_a(u)), \tag{2}$$

причому так означена алгебра $([0, M]; \oplus_{s_a}, \otimes_{s_a})$ характеризується ізоморфізмом

$$\varphi_{s_a}(u) = M \cdot s_a(u), \tag{3}$$

а добуток величин *u* та *v* визначається як

$$u * v = \varphi_{s_a}^{-1}(\varphi_{s_a}(u) \cdot \varphi_{s_a}(v)). \tag{4}$$

Тобто операції алгебри (1)–(2), задані на множині $[0, M]$, базуються на строгій трикутній *s*-нормі *S*. Покажемо, що на множині $[0, M]$ можна побудувати алгебри, які базуються не на строгій трикутній *s*-нормі *S*, а на строгій трикутній *t*-нормі *T*, а потім розглянемо конструювання подібних алгебр на множині $(0, \infty)$.

1. Алгебри на основі строгих трикутних *t*-норм. Нехай $u, v \in B = [0, M]$, де $M > 0$. На множині *B* означимо операції додавання та множення на скаляр.

Операція додавання. Вважатимемо, що операція додавання реалізується строгою *t*-нормою $T(u,v)$, тобто її можна описати виразом

$$u \langle + \rangle_{t_a} v = T(u, v) = t_a^{-1}(t_a(\frac{u}{M}) + t_a(\frac{v}{M})), \tag{5}$$

де $t_a(\cdot)$ – це адитивний генератор строгої *t*-норми $T(u,v)$, тобто бієкція $t[0,1] \to [0, \infty)$, яка характеризується властивістю $t(0) = \infty$. За означенням [6, 11] трикутна *t*-норма є асоціативною і комутативною (симетричною) функцією, яка має за нейтральний елемент $\theta = M$ і з множиною $[0, M]$ утворює комутативну групу.

Операція віднімання. Виходячи з роботи [2] для знаходження явного виразу операції віднімання, використаємо таке аналітичне представлення її модуля:

$$| u \langle - \rangle_{t_a} v | = t_a^{-1}(t_a | (\frac{u}{M}) - t_a(\frac{v}{M}) |). \tag{6}$$

Безпосереднє ж значення різниці визначатиметься за виразом

$$u \langle - \rangle_{t_a} v = M \cdot (\frac{1}{M} \cdot | u \langle - \rangle_{t_a} v |)^{sign(v-u)} = M \cdot (\frac{1}{M} \cdot (t_a^{-1}(t_a | (\frac{u}{M}) - t_a(\frac{v}{M}) |)))^{sign(v-u)}, \tag{7}$$

де

$$sign(x) = \begin{cases} -1, & \text{ÿêù î } x < 0, \\ 0, & \text{ÿêù î } x = 0, \\ 1, & \text{ÿêù î } x > 0. \end{cases}$$

Операція множення на дійсний скаляр $\alpha \in R$. Для визначення виразу, який би описував операцію множення на скаляр, звернемося до підходу, поданого у роботі [3]. Тоді, розглядаючи адитивний генератор *t*-норми $T(u, v)$ $t_a(u)$ як бієкцію, можемо записати і показати, що для дійсних $\alpha \in R$ і $u \in [0, M]$

$$\alpha \langle \times \rangle_{t_a} u = t_a^{-1}(\alpha \cdot t_\alpha(\frac{u}{M})). \tag{8}$$

Операція множення вектора *u* на скаляр $\alpha \in R$ (8) є дистрибутивною як відносно додавання векторів, так і додавання скалярів, множення на скаляри асоціативне та в множині *B* існує однозначний одиничний елемент $1 \langle \times \rangle_{t_a} u = u$.

Вище описані дві арифметичні операції додавання $\langle + \rangle_{t_a}$ (5) та множення на скаляр $\langle \times \rangle_{t_a}$ (8) формують на множині *B* структуру векторного простору з ізоморфізмом

$$\varphi_{t_a}(u) = M \cdot t_a(u). \tag{9}$$

Операція добутку. $\forall u, v \in B$ добуток $u \langle \cdot \rangle_{t_a} v$ визначається за виразом

$$u \langle \cdot \rangle_{t_a} v = \varphi_{t_a}^{-1}(\varphi_{t_a}(u) \cdot \varphi_{t_a}(v)). \tag{10}$$

Нейтральним елементом для добутку є $\varphi_{t_a}^{-1}(1)$.

Три операції – додавання $\langle + \rangle_{t_a}$ (5), множення на скаляр $\langle \times \rangle_{t_a}$ (8) та добуток $\langle \cdot \rangle_{t_a}$ (10) – формують на множині *B* структуру дійсної алгебри.

2. Алгебри з операціями на множині $(0,\infty)$**.** У роботі [12] описано алгебру, яка використовує за додавання операцію множення: $\forall u,v \in E=(0,\infty)$ і $M>0$:

$$u\langle + \rangle_1 v = \frac{u \cdot v}{M}. \tag{11}$$

У цьому разі нейтральним елементом для додавання є $\theta = M$, а кожен елемент множини *E* має протилежний елемент *w*, який визначається як

$$w = \frac{M^2}{v},$$

що верифікується рівнянням

$$u\langle + \rangle_1 w = \theta.$$

Додавання (11) є асоціативне, комутативне, має нейтральний елемент θ та кожен елемент множини *E* має відповідний йому протилежний елемент *w*. Отже, операція (11) є структурою комутативної групи.

Віднімання визначається як

$$u\langle - \rangle_1 v = \frac{u}{v}\cdot M. \tag{12}$$

Множення на дійсний скаляр $\alpha \in R$ визначається як

$$\alpha\langle \times \rangle_1 u = M\cdot\left(\frac{u}{M}\right)^{\alpha}. \tag{13}$$

Операція додавання (11) з операцією множення на скаляр (13) формують структуру дійсного векторного простору. Операцію добутку $u\langle \cdot \rangle v$ визначають за виразом

$$u\langle \cdot \rangle_1 v = M\cdot e^{M\cdot\ln\left(\frac{u}{M}\right)\cdot\ln\left(\frac{v}{M}\right)}. \tag{14}$$

Вона має за нейтральний елемент $z = M\cdot e^{1/M}$.

Три операції (11), (13) і (14) на множині *E* формують структуру дійсної алгебри. Однак описана алгебра не є параметричною і не дає змоги отримувати її модифікації. Тому розглянемо спосіб конструювання алгебр на множині $(0,\infty)$.

Побудова алгебр з операціями на множині (0, ∞). Нехай задана функція-генератор (бієкція) логарифмічного типу, тобто така, що $t_g(0,\infty)\to(-\infty,\infty)$, причому $t_g(0)=-\infty,\ t_g(1)=0,\ t_g(\infty)=\infty$, та число $M>0$. Тоді, за аналогією до побудови операції додавання (1) і (5) на інших множинах, опишемо вирази для аналітичного представлення арифметичних операцій.

Операція додавання. $\forall u,v \in E=(0,\infty)$,

$$u\langle + \rangle_{t_g} v = t_g^{-1}\left(t_g\left(\frac{u}{M}\right)+t_g\left(\frac{v}{M}\right)\right). \tag{15}$$

Операція віднімання. Відповідно до виразів (6)–(7) безпосереднє значення різниці визначатимемо за виразом

$$u\langle - \rangle_{t_g} v = M\cdot\left(\frac{1}{M}\cdot|u\langle - \rangle_{t_g} v|\right)^{sign(v-u)} = M\cdot\left(\frac{1}{M}\cdot\left(t_g^{-1}\left(t_g\left|\left(\frac{u}{M}\right)-t_g\left(\frac{v}{M}\right)\right|\right)\right)\right)^{sign(v-u)}, \tag{16}$$

Операція множення на дійсний скаляр $\alpha \in R$. За аналогією до виразів (4) та (8) отримуємо: $\forall u \in E$ і $\alpha \in R$

$$\alpha \langle \times \rangle_{t_g} u = t_g^{-1}(\alpha \cdot t_g(u)). \tag{17}$$

Операція множення вектора u на скаляр $\alpha \in R$ (17) є дистрибутивною як відносно додавання векторів, так і додавання скалярів, множення на скаляри асоціативне та в множині E існує однозначний одиничний елемент $1\langle \times \rangle_{t_a} u = u$.

Дві операції – додавання $u\langle + \rangle_{t_g} v$ (15) і множення на додатний скаляр $\alpha \langle \times \rangle_{t_g} u$ (17) – утворюють на множині E структуру дійсного векторного простору, яка характеризується ізоморфізмом

$$\psi_{t_g}(u) = M \cdot t_g(u). \tag{18}$$

Операція добутку. Для всіх $u, v \in E$ добуток $u\langle \cdot \rangle_{t_g} v$ визначається виразом

$$u\langle \cdot \rangle_{t_g} v = \psi_{t_g}^{-1}(\psi_{t_g}(\frac{u}{M}) \cdot \psi_{t_g}(\frac{v}{M})), \tag{19}$$

а нейтральним елементом добутку є $\psi_{t_g}^{-1}(1)$.

Три операції – додавання $u\langle + \rangle_{t_g} v$, множення на скаляр $\alpha \langle \times \rangle_{t_g} u$ та добуток $u\langle \cdot \rangle_{t_g} v$ – утворюють на множині E структуру дійсної алгебри. Тому, вибираючи за основу функцію-генератор t_g, яка є бієкцією, з наперед заданими властивостями, але зі збереженням умов $t_g(0) = -\infty$, $t_g(1) = 0$, $t_g(\infty) = \infty$, можемо будувати за допомогою виразів (15), (17) і (19) явні формули для реалізації операцій додавання, множення на скаляр і добутку. Це означає, що такий підхід забезпечує конструювання структури дійсної алгебри на множині $(0, \infty)$, арифметичні операції якої відображають нелінійні властивості функції-генератора t_g. Розглянемо тепер низку прикладів, які ілюструють запропоновані підходи конструювання алгебр.

3. Приклади. 3.1. ***Алгебра на основі адитивного генератора трикутної t-норми Гамахера з операціями на множині*** B=[0, M]. Нехай $u, v \in [0, M]$. Адитивним генератором t-норми Гамахера [11] є функція $t_a(u) = \dfrac{M-u}{u}$, де $M > 0$. Оберненою до $t_a(u)$ є функція $t_a^{-1}(u) = \dfrac{M}{1+u}$.

Операція додавання для $u, v \in [0, M]$ описуватиметься відповідно до виразу (5) t-нормою Гамахера

$$u\langle + \rangle_{t_a} v = T(u,v) = t_a^{-1}(t_a(\frac{u}{M}) + t_a(\frac{v}{M})) = \frac{M}{1 + \frac{M-u}{u} + \frac{M-v}{v}} = \frac{u \cdot v}{u + v - u \cdot v / M} \tag{20}$$

і нейтральним елементом для додавання є $\theta = M$.

Операція віднімання відповідно до виразу (7) визначатиметься як

$$u\langle - \rangle_{t_a} v = M \cdot (\frac{1}{M} \cdot |u\langle - \rangle_{t_a} v|)^{sign(v-u)} = M \cdot (\frac{1}{M} \cdot (t_a^{-1}(t_a\,|(\frac{u}{M}) - t_a(\frac{v}{M})|)))^{sign(v-u)} =$$

$$= M \cdot (\frac{1}{1 + |\frac{M-u}{u} - \frac{M-v}{v}|})^{sign(v-u)} = M \cdot (\frac{u \cdot v / M}{M \cdot |v-u| + u \cdot v / M})^{sign(v-u)}. \tag{21}$$

Протилежним елементом є $w = \frac{M \cdot u}{2u - M}$, що верифікується рівнянням $u \langle + \rangle_{t_a} w = \theta \equiv M$.

Операція множення на дійсний скаляр $\alpha \in R$ відповідно до виразу (8) визначатиметься як

$$\alpha \langle \times \rangle_{t_a} u = t_a^{-1}(\alpha \cdot t_\alpha (\frac{u}{M})) = \frac{M}{1 + \alpha \frac{M - u}{u}} = \frac{M \cdot u}{u + \alpha \cdot (M - u)}. \quad (22)$$

Верифікація того, що скаляр може бути дійсний (набувати додатні чи від'ємні значення), здійснюється рівнянням $(\alpha \langle \times \rangle_{t_a} u) \langle + \rangle_{t_a} (-\alpha \langle \times \rangle_{t_a} u) = \theta \equiv M$.

Дві арифметичні операції додавання $\langle + \rangle_{t_a}$ (20) та множення на скаляр $\langle \times \rangle_{t_a}$ (22) формують на множині *B* структуру векторного простору з ізоморфізмом

$$\varphi_{t_a}(u) = M \cdot t_a(u) = \frac{M \cdot (M - u)}{u} \quad (23)$$

та оберненою до $\varphi_{t_a}(u)$ функцією

$$\varphi_{t_a}^{-1}(u) = \frac{M^2}{M + u}. \quad (24)$$

Операція добутку. Беручи до уваги вирази (23)–(24), з формули (10) отримуємо для функції генератора *t*-норми Гамахера такий явний вираз операції добутку:

$$u \langle \cdot \rangle_{t_a} v = \varphi_{t_a}^{-1}(\varphi_{t_a}(u) \cdot \varphi_{t_a}(v)) = \frac{M^2}{M + \frac{M \cdot (M - u)}{u} \cdot \frac{M \cdot (M - v)}{v}} =$$

$$= \frac{M \cdot u \cdot v}{u \cdot v + M \cdot (M - u) \cdot (M - v)} \quad (25)$$

з нейтральним елементом $\varphi_{t_g}^{-1}(1) = \frac{M^2}{1 + M}$.

Три операції – додавання (20), множення на скаляр (22) і добутку (25) – формують на множині $B = [0, M]$ структуру дійсної алгебри.

3.2. ***Алгебра на основі адитивного генератора алгебричної трикутної t-норми з операціями на множині*** $[0, M]$. Нехай $u, v \in [0, M]$. Адитивним генератором алгебричної *t*-норми є функція $t_a(u) = -\ln(\frac{u}{M})$, де $M > 0$. Оберненою до $t_a(u)$ є функція $t_a^{-1}(u) = M \cdot \exp(-u)$.

Операція додавання для $u, v \in [0, M]$ описуватиметься відповідно до виразу (5) алгебричною *t*-нормою

$$u \langle + \rangle_{t_a} v = T(u, v) = t_a^{-1}(t_a(\frac{u}{M}) + t_a(\frac{v}{M})) = M \cdot \exp(-(-\ln(\frac{u}{M}) - \ln(\frac{v}{m}))) =$$

$$= M \cdot \exp(\ln(\frac{uv}{M^2})) = \frac{u \cdot v}{M} \quad (26)$$

і нейтральним елементом для додавання є $\theta = M$.

Операція віднімання відповідно до виразу (7) визначатиметься як

$$u\langle -\rangle_{t_a} v = M\cdot(\frac{1}{M}\cdot(t_a^{-1}(t_a\,|\,(\frac{u}{M})-t_a(\frac{v}{M})\,|)))^{sign(v-u)} =$$
$$= M\cdot(\exp(|-(-\ln(\frac{u}{M})+\ln(\frac{v}{M}))\,|))^{sign(v-u)} = \qquad . \qquad (27)$$
$$= M\cdot(\exp(-\ln\left|(\frac{v}{u}\right|))^{sign(v-u)} = M\cdot(\frac{\min(u,v)}{\max(u,v)})^{sign(v-u)}$$

Протилежним елементом до u є елемент $w=\dfrac{M^2}{u}$, що верифікується рівнянням $u\langle +\rangle_{t_a} w=\theta\equiv M$.

Операція множення на дійсний скаляр $\alpha\in R$ відповідно до виразу (8) визначається як

$$\alpha\langle\times\rangle_{t_a} u = t_a^{-1}(\alpha\cdot t_\alpha(\frac{u}{M})) = M\cdot\exp(-\alpha\cdot(-\ln(\frac{u}{M}))) = M\cdot(\frac{u}{M})^{\alpha}. \qquad (28)$$

Дві арифметичні операції – додавання $\langle +\rangle_{t_a}$ (26) та множення на дійсний скаляр $\langle\times\rangle_{t_a}$ (28) – формують на множині *B* структуру векторного простору з ізоморфізмом

$$\varphi_{t_a}(u) = -M\cdot\ln(\frac{u}{M}) \qquad (29)$$

та оберненою до $\varphi_{t_a}(u)$ функцією

$$\varphi_{t_a}^{-1}(u) = M\cdot\exp(-\frac{u}{M}). \qquad (30)$$

Операція добутку. Беручи до уваги вирази (29)-(30), з формули (10) отримуємо для функції генератора алгебричної *t*-норми такий явний вираз операції добутку:

$$u\langle\cdot\rangle_{t_a} v = \varphi_{t_a}^{-1}(\varphi_{t_a}(u)\cdot\varphi_{t_a}(v)) = M\cdot\exp(-\frac{1}{M}(-M\cdot\ln(\frac{u}{M}))\cdot(-M\cdot\ln(\frac{v}{M}))) =$$
$$= M\cdot\exp^{-M\ln(\frac{u}{M})\cdot\ln(\frac{v}{M})} \qquad (31)$$

з нейтральним елементом $\varphi_{t_a}^{-1}(1) = M\cdot\exp(-\dfrac{1}{M})$.

Три операції – додавання (26), множення на скаляр (28) і добутку (31) – формують на множині $[0, M]$ структуру дійсної алгебри.

Порівняння отриманих виразів для додавання (26), віднімання (27) та множення на скаляр (28) з відповідними для алгебри з розділу 2 на множині $(0,\infty)$ – додавання (11), віднімання (12) та множення на скаляр (13) – засвідчує, що вони збігаються, а вирази для операції добутку (31) та (14) відрізняються знаком аргумента експоненційної функції. Це зумовлено тим, що знаки перед функцією адитивного генератора для алгебри на множині $[0, M]$ та $(0,\infty)$ протилежні.

3.3. ***Алгебра на основі адитивного генератора трикутної параметричної t-норми Гамахера з операціями на множині*** $[0, M]$**.** Нехай $u,v\in[0, M]$. Адитивний генератор параметричної *t*-норми Гамахера [11] є функцією $t_a(u) = -\dfrac{1}{p}\cdot\ln\dfrac{u}{p\cdot M+(1-p)u}$, де $M>0$ і $p>0$. Оберненою до $t_a(u)$ є функція

$$t_a^{-1}(u)=\frac{p\cdot M\cdot \exp(-pu)}{1-(1-p)\cdot\exp(-pu)}.$$

Операція додавання для $u,v\in[0,M]$ описуватиметься відповідно до виразу (5) параметричною *t*-нормою Гамахера

$$u\left\langle+\right\rangle_{t_a} v=T(u,v)=t_a^{-1}(t_a(\frac{u}{M})+t_a(\frac{v}{M}))=$$

$$=\frac{p\cdot M\cdot\exp[-p\cdot(-\frac{1}{p}\ln\frac{u}{p\cdot M+(1-p)u}-\frac{1}{p}\ln\frac{v}{p\cdot M+(1-p)v})]}{1-(1-p)\cdot\exp[-p\cdot(-\frac{1}{p}\ln\frac{u}{p\cdot M+(1-p)u}-\frac{1}{p}\ln\frac{v}{p\cdot M+(1-p)v})]}=$$

$$=\frac{u\cdot v}{p\cdot M+(1-p)\cdot(u+v-u\cdot v/M)} \qquad (32)$$

і нейтральним елементом для додавання є $\theta=M$.

Операція віднімання відповідно до виразу (7) визначатиметься як

$$u\left\langle-\right\rangle_{t_a} v=M\cdot(\frac{1}{M}\cdot(t_a^{-1}(t_a\,|\,(\frac{u}{M})-t_a(\frac{v}{M})\,|)))^{sign(v-u)}=$$

$$=M\cdot(\frac{1}{M}\cdot\frac{p\cdot M\cdot\exp[-p\cdot(-\frac{1}{p}\ln\frac{u}{p+(1-p)u}+\frac{1}{p}\ln\frac{v}{p+(1-p)v})]}{1-(1-p)\cdot\exp[-p\cdot(-\frac{1}{p}\ln\frac{u}{p+(1-p)\cdot u}+\frac{1}{p}\ln\frac{v}{p+(1-p)\cdot v})]})^{sign(v-u)}=$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\frac{M\cdot u\cdot(p+(1-p)\cdot v/M)}{v+u\cdot(p-1)+u\cdot v\cdot(1-p)/M},\ \text{ÿêù î}\ \ u<v,\\ M,\ \text{ÿêù î}\ \ u=v,\\ \frac{M\cdot v\cdot(p+(1-p)\cdot u/M)}{u+v\cdot(p-1)+u\cdot v\cdot(1-p)/M},\ \text{ÿêù î}\ \ u>v\end{array}\right\}=$$

$$=M\cdot(\frac{\min(u,v)\cdot(p+(1-p)\cdot\max(u,v)/M)}{\max(u,v)+\min(u,v)\cdot(p-1)+u\cdot v\cdot(1-p)/M})^{sign(v-u)}. \qquad (33)$$

Протилежним елементом до u є елемент $w=\frac{p\cdot M^2+(1-p)\cdot M\cdot u}{u+(1-p)\cdot(M-u)}$, що верифікується рівнянням $u\left\langle+\right\rangle_{t_a} w=\theta\equiv M$.

Операція множення на дійсний скаляр $\alpha\in R$ відповідно до виразу (8) визначатиметься як

$$\alpha\left\langle\times\right\rangle_{t_a} u=t_a^{-1}(\alpha\cdot t_\alpha(\frac{u}{M}))=\frac{p\cdot M\cdot\exp(-p\cdot(\frac{-\alpha}{p})\cdot\ln(\frac{u}{p\cdot M+(1-p)\cdot u}))}{1-(1-p)\cdot\exp(-p\cdot(\frac{-\alpha}{p})\cdot\ln(\frac{u}{p\cdot M+(1-p)\cdot u}))}=. \qquad (34)$$

$$=\frac{p\cdot M\cdot u^{\alpha}}{(p\cdot M+(1-p)\cdot u)^{\alpha}-(1-p)\cdot u^{\alpha}}$$

Дві арифметичні операції – додавання $\left\langle+\right\rangle_{t_a}$ (32) та множення на дійсний скаляр $\left\langle\times\right\rangle_{t_a}$ (34) – формують на множині *B* структуру векторного простору з ізоморфізмом

$$\varphi_{t_a}(u) = -\frac{M}{p}\cdot\ln\frac{u}{p\cdot M+(1-p)u} \tag{35}$$

та оберненою до $\varphi_{t_a}(u)$ функцією

$$\varphi_{t_a}^{-1}(u) = \frac{p\cdot M\cdot\exp(-\frac{p\cdot u}{M})}{1-(1-p)\cdot\exp(-\frac{p\cdot u}{M})}\,. \tag{36}$$

Операція добутку за формулою (10) для функції адитивного генератора параметричної t-норми Гамахера матиме вигляд

$$u\langle\cdot\rangle_{t_a} v = \varphi_{t_a}^{-1}(\varphi_{t_a}(u)\cdot\varphi_{t_a}(v)) =$$

$$= \frac{p\cdot M\cdot\exp(\frac{-p}{M}\cdot\frac{(-M)}{p}\cdot\ln(\frac{u}{p\cdot M+(1-p)\cdot u})\cdot\frac{(-M)}{p}\cdot\ln(\frac{v}{p\cdot M+(1-p)\cdot v}))}{1-(1-p)\cdot\exp(\frac{-p}{M}\cdot\frac{(-1)}{p}\cdot\ln(\frac{u}{p\cdot M+(1-p)\cdot u})\cdot\frac{(-1)}{p}\cdot\ln(\frac{v}{p\cdot M+(1-p)\cdot v}))} =$$

$$= \frac{p\cdot M\cdot\exp(-\frac{M}{p}\cdot\ln(\frac{u}{p\cdot M+(1-p)\cdot u})\cdot\ln(\frac{v}{p\cdot M+(1-p)\cdot v}))}{1-(1-p)\cdot\exp(-\frac{M}{p}\cdot\ln(\frac{u}{p\cdot M+(1-p)\cdot u})\cdot\frac{1}{p}\cdot\ln(\frac{v}{p\cdot M+(1-p)\cdot v}))}\,. \tag{37}$$

Три операції – додавання (32), множення на скаляр (34) і добутку (35) – на множині $[0, M]$ формують структуру дійсної алгебри. Зазначимо, якщо $p=1$, то ця алгебра збігається з дійсною алгеброю на основі адитивного генератора алгебричної t-норми, для якої арифметичні операції описуються виразами (26), (28) і (31).

3.4. ***Алгебра на основі адитивного генератора з операціями на множині*** $(0,\infty)$**.** Нехай $u, v\in(0,\ \infty)$. За адитивний генератор вибираємо функцію $t_a(u) = = \frac{1}{p}\cdot\ln\frac{u}{p\cdot M+(1-p)\cdot u}$, де $M>0$ і $0<p\le 1$. Аналіз функції $t_a(u)$ свідчить, що тільки за значень $0<p\le 1$ вона є монотонною і неперервною на проміжку $(0,\infty)$. Тому виконання цієї умови щодо вибору можливих значень p є обов'язковим. Описаний вище вираз для функції $t_a(u)$ відрізняється тільки знаком від аналогічного виразу для адитивного генератора $t_a(u)$ параметричної t-норми Гамахера. Тому, за аналогією до випадку використання алгебричної t-норми (див. підрозділ 3.2) та відповідної їй алгебри на проміжку $(0,\infty)$ (див. розділ 2), аналітичні вирази для арифметичних операцій додавання (32), віднімання (33) та множення на дійсний скаляр (34) для алгебри на множині $[0, M]$ будуть ті ж самі. Операція ж добутку визначатиметься відповідно до функції $t_a(u)$ та виразу (19) як

$$u\langle\cdot\rangle_{t_a} v = \varphi_{t_a}^{-1}(\varphi_{t_a}(u)\cdot\varphi_{t_a}(v)) =$$

$$= \frac{p\cdot M\cdot\exp(\frac{p}{M}\cdot\frac{(-M)}{p}\cdot\ln(\frac{u}{p\cdot M+(1-p)\cdot u})\cdot\frac{(-M)}{p}\cdot\ln(\frac{v}{p\cdot M+(1-p)\cdot v}))}{1-(1-p)\cdot\exp(\frac{p}{M}\cdot\frac{(-1)}{p}\cdot\ln(\frac{u}{p\cdot M+(1-p)\cdot u})\cdot\frac{(-1)}{p}\cdot\ln(\frac{v}{p\cdot M+(1-p)\cdot v}))} =$$

$$= \frac{p\cdot M\cdot\exp(\frac{M}{p}\cdot\ln(\frac{u}{p\cdot M+(1-p)\cdot u})\cdot\ln(\frac{v}{p\cdot M+(1-p)\cdot v}))}{1-(1-p)\cdot\exp(\frac{M}{p}\cdot\ln(\frac{u}{p\cdot M+(1-p)\cdot u})\cdot\frac{1}{p}\cdot\ln(\frac{v}{p\cdot M+(1-p)\cdot v}))}\,. \tag{38}$$

Оберненою до $t_a(u)$ є функція $t_a^{-1}(u) = \dfrac{p \cdot M \cdot \exp(p \cdot u)}{1-(1-p) \cdot \exp(p \cdot u)}$.

Три операції – додавання (32), множення на скаляр (34) і добутку (38) – на множині $(0, \infty)$ формують структуру дійсної алгебри.

ВИСНОВКИ

Описано підхід конструювання алгебр з двома бінарними операціями додавання та множення на скаляр на множині $[0, M]$ та множині $(0, \infty)$, а також дійсних алгебр на цих же множинах. Основою цих алгебр є використання як виразів для реалізації операцій додавання строгих трикутних *t*-норм. Спільною рисою побудованих алгебр є те, що в основі адитивних генераторів функцій для реалізації відповідних операцій виступають функції логарифмічного типу. Простежено, що в цих алгебрах скаляр може набувати дійсні значення, тобто бути не тільки додатним, але також і від'ємним. Якщо для алгебри на множині $[0, M]$ існує відповідна алгебра на множині $(0, \infty)$, то вирази для операцій додавання та множення на скаляр є ідентичні в обох цих алгебрах. Властивості алгебр на множині $[0, M]$ відповідають властивостям аналогічних алгебр на множині $[0,1]$, тобто параметр M є тільки нормуючим коефіцієнтом. На прикладах доведено використання низки функцій логарифмічного типу для конструювання різних алгебр, що уможливлює моделювання середовищ та систем з різними властивостями у процесі опрацювання зображень.

1. *Воробель Р. А.* Алгебраїчна модель логарифмічної обробки зображень // Пр. XVI Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики". – Львів: Вид-во ЛНУ ім. Івана Франка, 2009. – С. 58–59.
2. *Воробель Р. А.* Визначення аналітичних функцій контрасту на основі трикутної норми Гамахера // Відбір і обробка інформації. – 2008. – 28(104). – С. 103–109.
3. *Воробель Р. А.* Конструювання алгебр логарифмічного типу // Там же. – 2010. – 32(108). – С. 131–143.
4. *Воробель Р. А.* Логарифмічна обробка зображень. Ч. 1: Базова модель // Там же. – 2009. – 31(107). – С. 26–35.
5. *Воробель Р. А.* Логарифмічна обробка зображень. Ч. 2: Узагальнена модель // Там же. – 2009. – 31(107). – С. 36–46.
6. *Alsina C., Frank M. J., Schweizer B.* Associative functions. Triangular norms and copulas. New Jersey. – World Scientific. – 2006. – 237 p.
7. *Florea C., Vertan C.* Piecewise linear approximation of logarithmic image processing models for dynamic range enhancement. Buletinul Stiintific al Universitatii Politechnica Bucuresti. – 2009. – 12 p.
8. *Jourlin M., Pinoli J.-C.* A model for logarithmic image processing // Département de Mathématiques, No 3, Université de Saint-Etienne. – 1985. – Décembre.
9. *Jourlin M., Pinoli J.-C.* A model for logarithmic image processing // J. Microscopy. – 1988. – **149**, Pt. 1. – P. 21–35.
10. *Jourlin M., Pinoli J.-C.* Logarithmic image processing // Advances in Imaging and Electron Physics. – 2001. – **115**. – P. 129–196.
11. *Klement E. P., Mesiar R., Pap E.* Triangular Norms. – Dordrecht: Kluwer AP. – 2000. – 385 p.
12. *Pătraşcu V., Buzuloiu V.* Image Dynamic Range Enhancement in the Context of Logarithmic Models // The 11^{th} European Signal Proc. Conf., EUSIPCO. – 2002. – **3**. – P. 251–254, September 3–6, 2002, Toulouse, France.
13. *Pinoli J. C., Debayle J.* Logarithmic adaptive neighborhood image processing (LANIP): introduction, connections to brightness perception, and application issues // EURASIP J. Advances in Signal Processing. – 2007. – Vol. 2007, Article ID 36105 (doi: 10.1155/2007/36105, 22 p.).
14. *Vorobel R.* Universal algebra construction // XIII Int. Scientific Kravchuk Conf. 13–15 May, 2010. – Kyiv. – Conference Material. – **2**. – P. 41.
15. *Vorobel R.* Logarithmic typy image processing algebras // 2010 Int. Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves. Kharkov, Ukraine, June 21–26, 2010. Session C16. IEEE Catalog Number: CFP10780-CDR, ISBN: 978-1-4244-7898-9.

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка
НАН України, Львів

Одержано
21.09.2010