# МАТЕМАТИЧНЕ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

УДК 519.65

В. А. Андруник, П. С. Малачівський

## ЕРМІТОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ СУМОЮ ПОЛІНОМУ Й СТЕПЕНЕВОЇ ФУНКЦІЇ

There are established the necessary and sufficient conditions for existence of Hermite interpolation of function by sum of polynomial and degree with the reproduction of value of derivative function in the end points of interval. The algorithm for determining the parameters of such interpolation is proposed. The application of iterative method to accurate the value of degree index is proved.

**Keywords:** *Hermite interpolation, nonlinear approximation, interpolation by expression of degree.*

Визначено необхідні й достатні умови існування інтерполяції функції сумою поліному й степеневого виразу з відтворенням значення похідної функції в крайніх точках відрізка. Запропоновано алгоритм визначення параметрів такої інтерполяції. Обґрунтовано застосування ітераційного методу для уточнення показника степеня.

**Ключові слова:** *Ермітова інтерполяція, нелінійна інтерполяція, інтерполяція степеневим виразом.*

Складність інтерполяції сумою поліному й степеневого виразу

$$C_n(a;\ x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + Ax^p\ ,\quad x\ge 0\ ,\quad A\ne 0\ ,\quad p\ne k\ \ (k=\overline{0,\,n}) \tag{1}$$

з невідомими параметрами $a_i\ \ (i=\overline{0,\,n})$, $A$ і $p$ зумовлена тим, що така інтерполяція не завжди існує, а в разі її існування обчислення показника степеня досить трудомістке.

Наближення сумою поліному та степеневого виразу (1) використовують для опису різних фізичних залежностей [1, 2]. Умови існування інтерполяції виразом (1) визначено в праці [3]. У цій статті досліджено необхідні й достатні умови існування інтерполяції виразом (1) з відтворенням значення похідної функції в крайніх точках відрізка. Таку ермітову інтерполяцію функцій використовують для побудови неперервних і гладких сплайн-наближень [4].

**Існування інтерполяції сумою поліному й степеневого виразу з відтворенням значень похідної функції в крайніх точках відрізка**. Розглянемо неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ функції $f(x)$, що справджують нерівності

$$W^{(n)}>0\ ,\ W^{(n)}\ne W_r^{(n)}\ \ ,\ \ r=\overline{0,\,n}\,, \tag{2}$$

де

$$W^{(n)}=\frac{D_{n+1}(f;\ \ z_2,\ z_3,\dots,\ z_{n+3})}{D_{n+1}(f;\ \ z_1,\ z_2,\dots,\ z_{n+2})}\,, \tag{3}$$

$$W_r^{(n)}=\begin{cases}0, & \text{ÿêù î}\quad z_1=0\,,\\ \dfrac{D_{n+1}(l_r;\ \ z_2,\ z_3,\dots,\ z_{n+3})}{D_{n+1}(l_r;\ \ z_1,\ z_2,\dots,\ z_{n+2})}, & \text{ÿêù î}\quad z_1>0\,,\end{cases} \tag{4}$$

$$D_k(U;\ z_j,\ z_{j+1},...,z_{j+k}) = \frac{D_{k-1}(U;\ z_{j+1},\ z_{j+2},...,z_{j+k})}{D_{k-1}(s_{k-1};\ z_{j+1},\ z_{j+2},..,z_{j+k})} - \\ - \frac{D_{k-1}(U; z_j,\ z_{j+1},...,z_{j+k-1})}{D_{k-1}(s_{k-1}; z_j, z_{j+1},...,z_{j+k-1})}, \quad k = \overline{3,\ n+1}, \quad j = \overline{1,\ n-k+3}, \tag{5}$$

$$l_k(x) = x^k \ln(x), \qquad s_k(x) = x^k,$$

$$D_2(U;\ z_j, z_{j+1}, z_{j+2}) = \begin{cases} \dfrac{D_1(U;\ z_2, z_3)}{D_1(s_1;\ z_2, z_3)} - U'(z_1), & \text{ÿêù î} \quad j = 1; \\ \dfrac{D_1(U;\ z_{j+1}, z_{j+2})}{D_1(s_1;\ z_{j+1}, z_{j+2})} - \dfrac{D_1(U;\ z_j, z_{j+1})}{D_1(s_1;\ z_j, z_{j+1})}, & \text{ÿêù î} \quad 1 < j < n+1; \\ U'(z_{n+3}) - \dfrac{D_1(U;\ z_{n+1}, z_{n+2})}{D_1(s_1;\ z_{n+1}, z_{n+2})}, & \text{ÿêù î} \quad j = n+1, \end{cases} \tag{6}$$

$$D_1(U;\ z_j, z_{j+1}) = \begin{cases} U'(z_1), & \text{ÿêù î} \quad j = 1; \\ U(z_{j+1}) - U(z_j), & \text{ÿêù î} \quad 1 < j \le n+1; \\ U'(z_{n+3}), & \text{ÿêù î} \quad j = n+2, \end{cases} \tag{7}$$

де $U'(x)$ – похідна функції $U(x)$, $z_j$ $(j = \overline{2,\ n+2})$ – будь-які, впорядковані за зростанням числа з відрізка $[\alpha,\ \beta]$, $z_1 = z_2$, а $z_{n+3} = z_{n+2}$.

Необхідну й достатню умову існування інтерполяції функції $f(x)$ виразом (1) на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ з відтворенням значення похідної функції в крайніх точках відрізка сформулюємо у вигляді теореми.

**Теорема 1.** Нехай функція $f(x)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ і точки $x_j$ $(j = \overline{1,\ n+1})$ належать $[\alpha,\ \beta]$. Тоді необхідною та достатньою умовою існування інтерполяції функції $f(x)$ сумою поліному й степеневого виразу (1) для $(n \ge 1)$ на множині різних впорядкованих за зростанням точок $x_j$ $(j = \overline{1,\ n+1})$ з відтворенням значення похідної $f(x)$ в обох крайніх точках $x_1$ та $x_{n+1}$ є справдження нерівностей (2), в яких $z_j = x_{j-1}$ $(j = \overline{2,\ n+2})$, $z_1 = z_2 = x_1$, а $z_{n+2} = z_{n+3} = x_{n+1}$.

**Доведення.** Сума поліному й степеневого виразу (1) для значень параметра $p$, відмінних від 0, 1, ..., $n$, задовольняє умову теореми щодо існування ермітової інтерполяції сумою поліному й нелінійного виразу [5]. На підставі цієї теореми необхідною й достатньою умовою існування інтерполяції виразом (1) з від'ємним значенням параметра $p$ неперервно диференційовної функції $f(x)$ на множині точок $x_j$ $(j = \overline{1,\ n+1})$ з відтворенням значень похідної функції в обох крайніх точках відрізка є справдження нерівностей

$$0 < W^{(n)} < W_0^{(n)}. \tag{8}$$

Це випливає з того, що

$$\lim_{p \to -\infty} \omega_n(p) = 0, \qquad \lim_{p \to -0} \omega_n(p) = W_0^{(n)},$$

де

$$\omega_n(p) = D_{n+1}(\varphi;\ z_2, z_3, ..., z_{n+3}) \big/ D_{n+1}(\varphi;\ z_1, z_2, ..., z_{n+2}),\ \varphi(p; x) = x^p,$$

величину $W_0^{(n)}$ визначаємо за формулою (4), значення виразів $D_k(U;\ z_i, z_{i+1}, ..., z_{i+k})$ для $k = \overline{3,\ n+1}$, $j = \overline{1, n-k+3}$ – за формулою (5), а $D_2(U;\ z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+2})$ і $D_1(U;\ z_i, z_{i+1})$ – за формулами (6) і (7).

Аналогічно, у випадку значень параметра *p* з інтервалів $p \in (j-1,\ j)$, $j = \overline{1, n}$ необхідною й достатньою умовою існування інтерполяції виразом (1) функції $f(x)$ на множині точок $x_j$ $(j = \overline{1,\ n+1})$ з відтворенням значень похідної функції в обох крайніх точках відрізка є справдження нерівностей

$$W_{j-1}^{(n)} < W^{(n)} < W_j^{(n)}, \tag{9}$$

оскільки

$$\lim_{p \to j-1+0} \omega_n(p) = W_{j-1}^{(n)} \quad \text{і} \quad \lim_{p \to j-0} \omega_n(p) = W_j^{(n)}.$$

Якщо значення параметра *p* більше від *n* $(p \in (n, \infty))$, то необхідною й достатньою умовою існування інтерполяції функції $f(x)$ на множині точок $x_j$ $(j = \overline{1,\ n+1})$ з відтворенням значень похідної функції в обох крайніх точках відрізка є справдження нерівностей

$$W^{(n)} > W_n^{(n)}. \tag{10}$$

У цьому разі

$$\lim_{p \to n+0} \omega_n(p) = W_n^{(n)} \quad \text{і} \quad \lim_{p \to \infty} \omega_n(p) = \infty.$$

Отже, необхідною й достатньою умовою існування інтерполяції функції $f(x)$ на множині точок $x_j$ $(j = \overline{1,\ n+1})$ з відтворенням значень похідної функції в обох крайніх точках відрізка виразом (1) зі значенням параметра *p*, відмінним від 0, 1, ..., *n*, є виконання однієї з нерівностей (8), (9) або (10), що еквівалентно умові (2). **Теорему доведено.**

Подібні твердження справедливі також для інтерполяції неперервно диференційовної функції $f(x)$ виразом (1) на множині точок $x_j$ $(j = \overline{1,\ n+2})$ з відтворенням значень похідної функції в одній із крайніх точок $x_1$ або $x_{n+2}$.

**Теорема 2.** Нехай функція $f(x)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ і точки $x_j$ $(j = \overline{1,\ n+2})$ належать $[\alpha,\ \beta]$. Тоді необхідною та достатньою умовою існування інтерполяції функції $f(x)$ сумою поліному й степеневого виразу (1) на множині різних впорядкованих за зростанням точок $x_j$ $(j = \overline{1,\ n+2})$ з відтворенням значення похідної $f(x)$ в крайній лівій точці $x_1$ є справдження нерівностей (2), в яких

$$D_2(U;\ z_j, z_{j+1}, z_{j+2}) = \begin{cases} \dfrac{D_1(U;\ z_2, z_3)}{D_1(s_1;\ z_2, z_3)} - U'(z_1), & \text{ÿêù î} \quad j = 1; \\ \dfrac{D_1(U;\ z_{j+1}, z_{j+2})}{D_1(s_1;\ z_{j+1}, z_{j+2})} - \dfrac{D_1(U;\ z_j, z_{j+1})}{D_1(s_1;\ z_j, z_{j+1})}, & \text{ÿêù î} \quad 1 < j \le n+1, \end{cases} \tag{11}$$

$$D_1(U;\ z_j, z_{j+1}) = \begin{cases} U'(z_1), & \text{ÿêù î} \quad j = 1; \\ U(z_{j+1}) - U(z_j), & \text{ÿêù î} \quad 1 < j \le n+2, \end{cases} \tag{12}$$

де $U'(x)$ – похідна функції $U(x)$, $z_j = x_{j-1}$ $(j = \overline{2,\ n+3})$, а $z_1 = z_2 = x_1$.

**Теорема 3.** Нехай функція $f(x)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ і точки $x_j$ $(j = \overline{1,\ n+2})$ належать $[\alpha,\ \beta]$. Тоді необхідною й достатньою умовою існування інтерполяції функції $f(x)$ сумою поліному й степеневого виразу (1) на множині різних впорядкованих за зростанням точок $x_j$ $(j = \overline{1,\ n+2})$, яка відтворює значення похідної функції в крайній правій точці $x_{n+2}$, є справдження нерівностей (2), в яких

$$D_2(U;\ z_j, z_{j+1}, z_{j+2}) = \begin{cases} \dfrac{D_1(U;\ z_{j+1}, z_{j+2})}{D_1(s_1;\ z_{j+1}, z_{j+2})} - \dfrac{D_1(U;\ z_j, z_{j+1})}{D_1(s_1;\ z_j, z_{j+1})}, & \text{ÿêù î} \quad 1 \le j < n+1; \\ U'(z_{n+3}) - \dfrac{D_1(U;\ z_{n+1}, z_{n+2})}{D_1(s_1;\ z_{n+1}, z_{n+2})}, & \text{ÿêù î} \quad j = n+1, \end{cases} \tag{13}$$

$$D_1(U;\ z_j, z_{j+1}) = \begin{cases} U(z_{j+1}) - U(z_j), & \text{ÿêù î} \quad 1 \le j \le n+1; \\ U'(z_{n+3}), & \text{ÿêù î} \quad j = n+2, \end{cases} \tag{14}$$

де $U'(x)$ – похідна функції $U(x)$, $z_j = x_j$ $(j = \overline{1,\ n+2})$, а $z_{n+2} = z_{n+3} = x_{n+1}$.

Доведення цих теорем можна провести за тією самою схемою, що й доведення теореми 1, на підставі теореми щодо існування ермітової інтерполяції сумою поліному й нелінійного виразу [5].

Розглянемо умову (2). Значення виразу $W^{(n)}$ дорівнює $W_r^{(n)}$ ($r = 0, 1, ..., n$) для функцій $f(x)$, що мають вигляд

$$b_0 + Bx^r \ln(x), \quad x > 0, \tag{15}$$

де $b_0$ і $B$ – будь-які дійсні числа.

В [5] визначено, що нерівності $W^{(n)} > 0$ задовольняють функції $f(x)$, $n$-на похідна яких строго монотонна на відрізку $[\alpha,\ \beta]$. Тому необхідній і достатній умові (2) існування інтерполяції сумою поліному та степеневого виразу (1) на множині точок $x_j$ $(j = \overline{1,\ n+1})$ з відтворенням значень похідної функції в обох крайніх точках й на множині точок $x_j$ $(j = \overline{1,\ n+2})$ з відтворенням значень похідної функції в одній з крайніх точок задовольняють, зокрема, функції $f(x)$ неперервно диференційовні до $n$-го порядку $(f(x) \in C^n[\alpha, \beta])$, $n$-на похідна яких строго монотонна на $[\alpha,\ \beta]$, за винятком функцій вигляду (15) для $r = \overline{0, n}$.

**Визначення параметрів ермітової інтерполяції сумою поліному й степеневого виразу.** Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови теорем 1, 2 і 3 на відрізку $[\alpha,\ \beta]$, то параметри $a_i (i = \overline{0,\ n})$ і $A$ ермітової інтерполяції $f(x)$ виразом (1) визначаються за формулами

$$A = D_{n+1}(f;\ z_1,\ z_2, ...,\ z_{n+2}) / D_{n+1}(\varphi;\ z_1,\ z_2, ...,\ z_{n+2}); \tag{16}$$

$$a_k = \frac{D_k(f;\ z_1,\ z_2, ...,\ z_{k+1}) - \sum\limits_{i=k+1}^{n} a_i D_k(s_i;\ z_1, z_2, ..., z_{k+1}) - AD_k(\varphi;\ z_1, z_2, ..., z_{k+1})}{D_k(s_k;\ z_1,\ z_2, ...,\ z_{k+1})},$$

$$k=\overline{1,\quad n}\,; \tag{17}$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left(f(z_2)+f(z_3)-\sum_{i=1}^{n}a_i(z_2^i+z_3^i)-A(\varphi(p;\ z_2)+\varphi(p;\ z_3))\right), \tag{18}$$

в яких $\varphi(p;\,x)=x^p$ , вирази $D_k(U;\ z_i,\ z_{i+1},...,z_{i+k})$ для $k=\overline{3,\ n+1}$, $j=\overline{1,\,n-k+3}$ визначаємо за формулою (5), а $D_2(U;\ z_i,z_{i+1},z_{i+2},z_{i+2})$ і $D_1(U;\ z_i,z_{i+1})$ залежно від точок ермітового інтерполювання − за відповідними формулами (6) та (7), (11) і (12) або (13) та (14).

Значення параметра р визначаємо як розв'язок рівняння

$$\omega_n(p)=W^{(n)}\,, \tag{19}$$

де

$$\omega_n(p)=D_{n+1}(\varphi;\ \ z_2\,,\,z_3,...,\,z_{n+3})\big/D_{n+1}(\varphi;\ \ z_1,\,z_2,...,\,z_{n+2})\,,$$

$\varphi(p;\,x)=x^p$ , а значення $W^{(n)}$ визначаємо за формулою (5) з врахуванням точок ермітового інтерполювання.

Рівняння (19) розв'язуємо з врахуванням того, що у випадку справдження нерівності

$$W_0^{(n)}<W^{(n)}<W_n^{(n)}\,, \tag{20}$$

його розв'язок знаходиться в одному з інтервалів $(k,\ k+1)$, де $k=0,1,...,\ n-1$. Тому спочатку необхідно перевірити, чи не належить корінь рівняння одному з цих інтервалів. Якщо значення параметра *p* належить одному з цих інтервалів, то його можна уточнити за методом хорд чи ділення навпіл. У протилежному випадку значення параметра *p* належить одному з інтервалів $(-\infty,0)$ або $(n,\infty)$ .

З доведення теореми щодо існування ермітової інтерполяції наближення сумою поліному й нелінійного виразу [5] випливає, що ліва частина рівняння (19) для $\varphi(p;\,x)=x^p$ є степеневою функцією, яка має такий вигляд:

$$\omega_n(p)=K(\zeta_2/\zeta_1)^{p-n-1}, \tag{21}$$

де

$$K=(\tau_3-\tau_2)/\tau_2-\tau_1\,,\quad \zeta_1\in(z_1,\ z_{n+2})\,,\quad \zeta_2\in(z_2,\ z_{n+3})\,,\quad \tau_i\in(z_i,\ z_{i+n+1})\,.$$

Враховуючи степеневий характер залежності лівої частини рівняння (19) від *p*, його розв'язок доцільно шукати як корінь рівняння

$$g_n(p)=V^{(n)}, \tag{22}$$

де $g_n(p)=\ln(\omega_n(p))$ ; $V^{(n)}=\ln(W^{(n)})$ .

Розв'язок рівняння (22) в інтервалах $(-\infty,0)$ і $(n,\infty)$ можна уточнити за ітераційним методом Ньютона

$$p_{i+1}=p_i-\frac{g_n(p_i)-V^{(n)}}{g_n'(p_i)}\,,\quad i=0,1,2,.... \tag{23}$$

де

$$g_n'(p)=\frac{D_{n+1}(\overline{\varphi};\ z_2,\ z_3,...,\ z_{n+4})}{D_{n+1}(\varphi;\ z_2,\ z_3,...,z_{n+4})}-\frac{D_{n+1}(\overline{\varphi};\ z_1,\ z_2,...,\ z_{n+3})}{D_{n+1}(\varphi;\ z_1,\ z_2,...,\ z_{n+3})}\,; \tag{24}$$

$$\overline{\varphi}(p;\,x)=x^p\ln(x)\,;\quad \varphi(p;z)=z^p\,;$$

$$p_0 = \begin{cases} -p^*, & \text{ÿêù î} \quad W^{(n)} < \tilde{W}_0^{(n)}; \\ n+1+p^*, & \text{ÿêù î} \quad W^{(n)} > W_n^{(n)} \end{cases}; \tag{25}$$

$$p^* = \left|\ln W^{(n)}\right| \Big/ (\ln(z_{n+4} + z_2) - \ln(z_{n+3} + z_1)).$$

Початкове значення наближення $p_0$ (25) до шуканого кореня рівняння (19) визначено, виходячи з вигляду (21) лівої частини рівняння. В разі такого вибору значення $p_0$ його знак завжди однаковий зі знаком шуканого розв'язку. Однаковість знаків необхідна для забезпечення стійкості ітераційного методу (23), тому що функція $g_n(p)$ має розриви в точках $p = 0, 1, \ldots, n$ і перехід проміжних значень $p_i$ через одну з цих точок може порушити збіжність методу (23). При цьому знаки проміжних значень $p_i$ (23) завжди будуть однаковими зі знаком шуканого розв'язку і відповідно проміжні значення функції $g_n(p)$ також будуть одного знаку.

Попередня перевірка умови (20) і вибір початкового значення $p_0$ за формулою (22) забезпечують обминання зазначених точок розриву лівої частини рівняння (22) під час знаходження його розв'язку за ітераційною схемою (23). Застосування запропонованої комбінації ітераційних методів для розв'язування рівняння (19) забезпечує достатньо швидку їх збіжність, зокрема, ітераційний процес (23) для тестових прикладів збігався за три-чотири ітерації.

**ВИСНОВКИ**

Необхідною й достатньою умовою існування ермітової інтерполяції сумою поліному й степеневого виразу (1) неперервно диференційованої функції $f(x)$ є виконання нерівностей (2) на множині точок $x_j$ $(j = \overline{1,\ n+1})$ у випадку відтворення значень похідної функції в обох крайніх точках й на множині точок $x_j$ $(j = \overline{1,\ n+2})$ – відтворення значень похідної функції в одній з крайніх точок. Цим нерівностям задовольняють, зокрема, функції $f(x)$ $(f(x) \in C^n[\alpha, \beta])$, $n$-на похідна яких строго монотонна на $[\alpha,\ \beta]$, за винятком функцій вигляду (15). Параметри $a_i$ $(i = \overline{0,\ n})$ і $A$ такої інтерполяції визначаються за формулами (16)–(18). Значення параметра р є коренем трансцендентного рівняння (19), розв'язок якого залежно від виконання нерівностей (20) можна обчислити за ітераційною схемою (23) або методу ділення навпіл.


1. *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами. – К: Наук. думка, 1989. – 272 с.
2. *Kobayashi Y. Ohkita M., Inoue M.* Fractional power approximations of elliptic integrals and Bessel functions // Math. Comput. Simulation. – 1978. – **20**, № 4. – P. 285–290.
3. *Андруник В., Малачівський П.* Інтерполяція сумою поліному й нелінійного виразу // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 11. – С. 9–18.
4. *Малачівський П., Пізюр Я., Андруник В.* Неперервне й гладке рівномірне сплайн-наближення температурної характеристики сенсора та його чутливості // Вимірювальна техніка та метрологія. – 2007. – № 67. – С. 24–30.
5. *Скопецький В. В. Малачівський П. С.* Ермітова інтерполяція сумою поліному й нелінійного виразу // Доповіді НАН України. – 2010. – № 10. – С. 42–47.



*Центр математичного моделювання*
*Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача*
*НАН України, Львів*



*Одержано*
*07.09.2010*