УДК 517.988:519.632
DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.146-161

М. В. Сидоров, канд. фіз.-мат. наук

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КВАЗІФУНКЦІЙ ГРІНА-РВАЧОВА ДЛЯ ПОБУДОВИ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Проблема математичного моделювання нелінійних стаціонарних процесів теплопровідності приводить до необхідності ефективного розв'язання крайових задач для еліптичного рівняння з коефіцієнтом, нелінійно залежним від температури. У роботі розглянуто задачу Діріхле для рівняння теплопровідності зі степенево залежним від температури коефіцієнтом теплопровідності та нелінійною функцією потужності теплових джерел. Додатний розв'язок розглядуваної задачі запропоновано знаходити, використовуючи метод двобічних наближень, побудований на основі застосування методу квазіфункцій Гріна-Рвачова. Для цього було зроблено заміну невідомої функції з метою отримати нелінійну задачу для рівняння з оператором Лапласа. Ця задача за допомогою квазіфункції Гріна-Рвачова була замінена еквівалентним інтегральним рівняння Урисона. Дослідження цього рівняння було проведено методами нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах, зокрема, використовуючи теорію гетеротонних операторів В. І. Опойцева. Інтегральний оператор, що входить у рівняння Урисона, розглянуто як гетеротонний оператор, що діє у просторі неперервних функцій, напівупорядкованому конусом невід'ємних функцій. Це дозволило з'ясувати умови існування єдиного додатного розв'язку розглядуваної задачі та побудувати для його знаходження двобічний ітераційний процес. Цей процес розпочинається з кінців сильно інваріантного для гетеротонного оператора конусного відрізку і дозволяє будувати дві послідовності функцій, які наближають шуканий розв'язок знизу та зверху. Перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу є наявність зручної апостеріорної оцінки похибки наближеного розв'язку на кожній ітерації. Ефективність розробленого методу було проілюстровано обчислювальним експериментом у одиничному квадраті для випадку експоненціальної залежності потужності теплових джерел від температури. Результати експерименту наведено у вигляді графічної (лінії рівня та поверхня наближеного розв'язку) та числової (значення наближеного розв'язку у деяких точках області) інформації.

Ключові слова: *нелінійна теплопровідність, додатний розв'язок, квазіфункція Гріна-Рвачова, двобічний ітераційний метод, рівняння з гетеротонним оператором.*

Вступ. Проблема математичного моделювання процесів, що протікають у нелінійних середовищах, призводить до необхідності чисельного дослідження крайових та початково-крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними [16]. Для цього зазвичай використовуються сіткові методи [10], метод скінченних елементів [13, 15] або ітераційні методи з двобічним характером збіжності [1–4, 11]. При застосування двобічних ітераційних методів будується дві функціональні послідовності, які зверху та знизу наближають шуканий розв'язок. Тому на кожній ітерації ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки, а отже, і критерій закінчення ітерацій. Це робить, на нашу думку, саме двобічні методи найбільш привабливими для застосувань у прикладних дослідженнях.

Побудова методів двобічних наближень ґрунтується на використанні теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [5, 6] і зазвичай потребує переходу від вихідної нелінійної крайової задачі до еквівалентного інтегрального рівняння, ядром якого є функція Гріна відповідного диференціального оператора [1–4, 11]. Це значно звужує коло областей, для яких метод може бути практично реалізований, до областей, у яких є відомим аналітичний вираз для функції Гріна [7]. Усунути цей недолік можна завдяки використанню замість точної функції Гріна відповідної квазіфункції Гріна-Рвачова [8, 11].

Метою роботи є розробка двобічних ітераційних методів розв'язання задачі Діріхле для рівняння теплопровідності зі степенево залежним від температури коефіцієнтом теплопровідності та нелінійною функцією потужності теплових джерел.

Дана робота продовжує дослідження, розпочаті у [12], і поширює їх результати на області, геометрія яких може бути описана методом R -функцій.

1. Постановка задачі. Розглядатимемо нелінійну крайову задачу

$$-div(k(T)gradT) = f(x,T) \text{ у } \Omega, \tag{1}$$

$$T\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

$$T > 0 \text{ у } \Omega, \tag{3}$$

де $\Omega \subset R^m$ — обмежена область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $f(x,T)$ — неперервна за сукупністю змінних x, T та невід'ємна, якщо $x \in \Omega$, $T > 0$, функція, $k(T) = k_0 T^{\sigma}$, $\sigma > 0$ — параметри нелінійності середовища.

Задача (1), (2) є математичною моделлю процесу стаціонарної теплопровідності для випадку, коли коефіцієнт теплопровідності степенево залежить від температури, а в області Ω наявні джерела тепловиділення за нелінійним законом $f(x,T)$.

Аналітичне дослідження задач нелінійної теплопровідності проведено, наприклад, у [9].

Зробимо у задачі (1)–(3) заміну $T = \left[\frac{\sigma+1}{k_0} u \right]^{\frac{1}{1+\sigma}}$, де $u(x)$ — нова невідома функція. Тоді для функції u отримаємо задачу

$$-\Delta u = F(x, u) \text{ у } \Omega , \tag{4}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0 , \tag{5}$$

$$u > 0 , \tag{6}$$

де $F(x,u) = f\left(x, \left[\frac{\sigma+1}{k_0} u \right]^{\frac{1}{1+\sigma}} \right)$.

Відмітимо, що функція $F(x,u)$ є неперервною за сукупністю змінних x, u, та невід'ємною, якщо $x \in \Omega$, $u > 0$, оскільки такі властивості має функція $f(x,T)$.

2. Побудова двобічних наближень. Виділимо у банаховому просторі $C(\overline{\Omega})$ неперервних у $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$ функцій з нормою $\|u\| = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$ конус K_+ невід'ємних функцій. Відомо [5, 6], що конус K_+ у $C(\overline{\Omega})$ є нормальним (і навіть, гострим).

Введемо у просторі $C(\overline{\Omega})$ за допомогою конуса K_+ напівупорядкованість за правилом: для $u, v \in C(\overline{\Omega})$ $u \le v$, якщо $v - u \in K_+$, тобто

$$u \le v \text{, якщо } u(x) \le v(x) \text{ для всіх } x \in \overline{\Omega} .$$

Нехай межа $\partial\Omega$ області Ω складається зі скінченної кількості кусків ліній $\sigma_i(x) = 0$, $i = 1, 2, ..., r$, де кожна $\sigma_i(x)$ — елементарна функція. Тоді за допомогою методу *R*-функцій [8] можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу елементарну функцію $\omega(x)$, що описує геометрію області Ω, тобто має властивості:

а) $\omega(x) > 0$ у Ω;

б) $\omega(x) = 0$ на $\partial\Omega$;

в) $|\nabla\omega(x)| \ne 0$ на $\partial\Omega$.

Про таку функцію $\omega(x)$ казатимемо, що вона описує геометрію області Ω.

Також функція $\omega(x)$ може мати певні властивості диференційовності, завдяки використанню різних достатньо повних систем *R*-функцій [8].

Задача (4)–(6) у конусі K_+ еквівалентна інтегральному рівнянню Урисона [8, 11]

$$u(x) = \int_\Omega P(x,s,u(s))ds \,, \tag{7}$$

де

$$P(x,s,u(s)) = K(x,s)u(s) + G_{quasi}(x,s)F(s,u(s)),$$

$$K(x,s) = -\Delta_s q(x,s).$$

Тут $G_{quasi}(x,s)$ — квазіфункція Гріна-Рвачова, яка визначається формулою

$$G_{quasi}(x,s) = g(r) - \tilde{g}(x,s),$$

у якій $g(r)$ — фундаментальний розв'язок рівняння $-\Delta u = 0$ у R^m,

$$x = (x_1,...,x_m),\ s = (s_1,...,s_m),\ r = |x-s| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i - s_i)^2}\,,$$

$$\tilde{g}(x,s) = g\left(\sqrt{r^2 + 4\omega(x)\omega(s)}\right),$$

$\omega(x)$ — функція, що описує геометрію області Ω.

Фундаментальні розв'язки рівняння Лапласа $-\Delta u = 0$ мають вигляд

$$g(r) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} \text{ у } R^2,$$

$$g(r) = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{r} \text{ у } R^3,$$

$$g(r) = \frac{1}{|S_1|(m-2)}\cdot\frac{1}{r^{m-2}} \text{ у } R^m \ (m > 3),$$

де $|S_1|$ — площа одиничної сфери у R^m.

Отже, матимемо такі вирази для квазіфункції Гріна-Рвачова

$$G_{quasi}(x,s) = \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{1 + \frac{4\omega(x)\omega(s)}{r^2}} \text{ у } R^2,$$

$$G_{quasi}(x,s) = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\sqrt{r^2 + 4\omega(x)\omega(s)} - r}{r\sqrt{r^2 + 4\omega(x)\omega(s)}} \text{ у } R^3,$$

$$G_{quasi}(x,s) = \frac{1}{|S_1|(m-2)}\cdot\frac{(r^2 + 4\omega(x)\omega(s))^{\frac{m}{2}-1} - r^{m-2}}{r^{m-2}(r^2 + 4\omega(x)\omega(s))^{\frac{m}{2}-1}} \text{ у } R^m \ (m > 3).$$

Узагальненим розв'язком задачі (4)–(6) називатимемо функцію $u^* \in K_+$, яка є розв'язком рівняння (7). Отже, розв'язком (узагальненим) вихідної задачі (1)–(3) вважатимемо функцію

$$T^* = \left[\frac{\sigma+1}{k_0} u^* \right]^{\frac{1}{1+\sigma}} . \tag{8}$$

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор T, який діє у $C(\overline{\Omega})$ за правилом, яке визначається правою частиною інтегрального рівняння (7):

$$T(u)(x) = \int_{\Omega} P(x, s, u(s)) ds . \tag{9}$$

Позначимо

$$K^+(x,s) = \max\{0, K(x,s)\}, \ K^-(x,s) = \max\{0, -K(x,s)\} .$$

Тоді $K^+(x,s) \geq 0$, $K^-(x,s) \geq 0$ при $x, s \in \Omega$ ($x \neq s$), причому

$$K(x,s) = K^+(x,s) - K^-(x,s), \ \left| K(x,s) \right| = K^+(x,s) + K^-(x,s),$$

і оператор T вигляду (9) набуде вигляду

$$T(u)(x) = \int_{\Omega} K^+(x,s) u(s) ds - \int_{\Omega} K^-(x,s) u(s) ds + \int_{\Omega} G_{quasi}(x,s) F(s, u(s)) ds . \tag{10}$$

Нехай функція $F(x,u)$ дозволяє діагональне подання $F(x,u) = \Phi(x,u,u)$, де неперервна за сукупністю змінних x, v, w функція $\Phi(x, v, w)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $x \in \Omega$. Тоді оператор T вигляду (10) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\begin{gathered} \hat{T}(v, w) = \int_{\Omega} K^+(x,s) v(s) ds - \\ - \int_{\Omega} K^-(x,s) w(s) ds + \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s) \Phi(s, v(s), w(s)) ds \end{gathered} \tag{11}$$

Зрозуміло, що оператори T і $\hat{T}$ є цілком неперервними.

Для гетеротонного оператора T виділимо у конусі K_+ сильно інваріантний конусний відрізок $< v^0, w^0 >$ умовами

$$\hat{T}(v^0, w^0) \geq v^0, \ \hat{T}(w^0, v^0) \leq w^0,$$

які для оператора $\hat{T}$, що визначається формулою (11), набудуть вигляду

$$\begin{gathered} \int_{\Omega} K^+(x,s) v^0(s) ds - \int_{\Omega} K^-(x,s) w^0(s) ds + \\ + \int_{\Omega} G_{quasi}(x,s) \Phi(s, v^0(s), w^0(s)) ds \geq v^0(x) \ \text{для всіх} \ x \in \overline{\Omega}, \end{gathered} \tag{12}$$

$$\int_{\Omega} K^{+}(x,s)w^{0}(s)ds - \int_{\Omega} K^{-}(x,s)v^{0}(s)ds + \\ +\int_{\Omega} G_{quasi}(x,s)\Phi(s,w^{0}(s),v^{0}(s))ds \le w^{0}(x) \text{ для всіх } x \in \overline{\Omega}. \qquad (13)$$

Далі сформуємо ітераційний процес за схемою

$$v^{(k+1)} = \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)}),\ w^{(k+1)} = \hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)}),\ k = 0,1,2,\dots,$$

$$v^{(0)} = v^{0},\ w^{(0)} = w^{0},$$

тобто

$$v^{(k+1)}(x) = \int_{\Omega} K^{+}(x,s)v^{(k)}(s)ds - \int_{\Omega} K^{-}(x,s)w^{(k)}(s)ds + \\ +\int_{\Omega} G_{quasi}(x,s)\Phi(s,v^{(k)}(s),w^{(k)}(s))ds, \qquad (14)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \int_{\Omega} K^{+}(x,s)w^{(k)}(s)ds - \int_{\Omega} K^{-}(x,s)v^{(k)}(s)ds + \\ +\int_{\Omega} G_{quasi}(x,s)\Phi(s,w^{(k)}(s),v^{(k)}(s))ds, \qquad (15)$$

$$k = 0,1,2,\dots,$$

$$v^{(0)}(x) = v^{0}(x),\ w^{(0)}(x) = w^{0}(x). \qquad (16)$$

Оскільки конусний відрізок $< v^{0}, w^{0} >$ є сильно інваріантним, а оператор T є гетеротонним, то послідовність $\{v^{(k)}(x)\}$ не спадає за конусом K_{+}, а послідовність $\{w^{(k)}(x)\}$ не зростає за конусом K_{+}. Далі, з нормальності конуса K_{+} і повної неперервності оператора $\hat{T}$ випливає існування границь $v^{*}(x)$ і $w^{*}(x)$ цих послідовностей. При цьому для послідовних наближень $\{v^{(k)}(x)\}$, $\{w^{(k)}(x)\}$ справджується такий ланцюг нерівностей:

$$v^{0} = v^{(0)} \le v^{(1)} \le \dots \le v^{(k)} \le \dots \le v^{*} \le w^{*} \le \dots \le w^{(k)} \le \dots \le w^{(1)} \le w^{(0)} = w^{0}.$$

Функції v^{*} і w^{*} є розв’язком системи рівнянь

$$v^{*} = \hat{T}(v^{*}, w^{*}),\ w^{*} = \hat{T}(w^{*}, v^{*}),$$

тобто системи

$$v(x) = \int_{\Omega} K^{+}(x,s)v(s)ds - \int_{\Omega} K^{-}(x,s)w(s)ds + \\ +\int_{\Omega} G_{quasi}(x,s)\Phi(s,v(s),w(s))ds, \qquad (17)$$

$$w(x) = \int_{\Omega} K^{+}(x,s)w(s)ds - \int_{\Omega} K^{-}(x,s)v(s)ds + \\ + \int_{\Omega} G_{quasi}(x,s)\Phi(s, w(s), v(s))ds. \quad (18)$$

Як відомо [6], умовою виконання рівності $v^* = w^*$ є те, що система (17), (18) не має на сильно інваріантному конусному відрізку $< v^0, w^0 >$ розв'язків (v, w) таких, що $v \neq w$. Тоді інтегральне рівняння (9) (а отже, і крайова задача (1)-(3)) має єдиний додатний розв'язок, до якого двобічно збігається ітераційний процес (14)-(16). Отже, справджується така теорема.

Теорема 1. Нехай $< v^0, w^0 >$ — сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (10) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (11) і система рівнянь (17), (18) не має на $< v^0, w^0 >$ розв'язків таких, що $v \neq w$. Тоді ітераційний процес (14)–(16) збігається у нормі простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (4)–(6), причому має місце ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \ldots \leq v^{(k)} \leq \ldots \leq u^* \leq \ldots \leq w^{(k)} \leq \ldots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0. \quad (19)$$

Зауважимо, що ланцюг нерівностей (19) як раз і характеризує ітераційний процес (14)–(16) як метод двобічних наближень.

Умовою, яка забезпечить рівність $v^* = w^*$, є умова існування такого $\gamma \in (0;1)$, що

$$\left\| \hat{T}(v,w) - \hat{T}(w,v) \right\| \leq \gamma \left\| v - w \right\|$$

для всіх $v, w \in < v^0, w^0 >$ [14].

Нехай існує таке число $L > 0$, що функція $\Phi(x, v, w)$ для всіх чисел v, w таких, що $0 < v, w < M_0$, де $M_0 = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} w^0(x)$, і для всіх $x \in \Omega$ задовольняє нерівність

$$\left| \Phi(x, w, v) - \Phi(x, v, w) \right| \leq L \left| w - v \right|. \quad (20)$$

Розглянемо різницю $\hat{T}(v,w)(x) - \hat{T}(w,v)(x)$:

$$\hat{T}(w,v)(x) - \hat{T}(v,w)(x) = \int_{\Omega} [K^{+}(x,s) + K^{-}(x,s)][w(s) - v(s)]ds + \\ + \int_{\Omega} G_{quasi}(x,s)[\Phi(s, w(s), v(s)) - \Phi(s, v(s), w(s))]ds.$$

Тоді з урахуванням нерівності (20) отримаємо оцінку

$$\left\|\hat{T}(w,v)-\hat{T}(v,w)\right\| = \max_{x\in\bar{\Omega}}\left|\hat{T}(w,v)(x)-\hat{T}(v,w)(x)\right| \le$$
$$\le (M_1+LM)\cdot \max_{x\in\bar{\Omega}}\left|w(x)-v(x)\right| = (M_1+LM)\left\|w-v\right\|,$$

де

$$M = \max_{x\in\bar{\Omega}}\int_{\Omega} G_{quasi}(x,s)ds\,, \tag{21}$$

$$M_1 = \max_{x\in\bar{\Omega}}\int_{\Omega}[K^+(x,s)+K^-(x,s)]ds\,. \tag{22}$$

Отже,

$$\left\|\hat{T}(w,v)-\hat{T}(v,w)\right\| \le \gamma\left\|w-v\right\|,$$

де $\gamma = M_1 + LM$.

Тоді рівність $v^* = w^*$ матиме місце, якщо $\gamma = M_1 + LM < 1$, і справджується теорема.

Теорема 2. Нехай $< v^0, w^0 >$ — сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (10) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (11) і має місце умова (20), причому $\gamma = M_1 + LM < 1$, де сталі M і M_1 визначаються рівностями (21), (22) відповідно. Тоді ітераційний процес (14)–(16) двобічно збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв’язку u^* крайової задачі (4)–(6).

Якщо виконано k ітерацій, то за наближений розв’язок крайової задачі (4)–(6) слід взяти функцію

$$u^{(k)}(x) = \frac{w^{(k)}(x)+v^{(k)}(x)}{2}\,. \tag{23}$$

Тоді для похибки наближеного розв’язку (23) ми матимемо апостеріорну оцінку:

$$\left\|u^* - u^{(k)}\right\| \le \frac{1}{2}\max_{x\in\bar{\Omega}}(w^{(k)}(x)-v^{(k)}(x))\,. \tag{24}$$

Наявність оцінки вигляду (24) є безумовною перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу.

Якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{x\in\bar{\Omega}}(w^{(k)}(x)-v^{(k)}(x)) < 2\varepsilon$$

і тоді з точністю ε можна вважати, що $u^*(x) \approx u^{(k)}(x)$.

Отже, за виконання умов теореми 1 чи теореми 2 вихідна крайова задача (1)–(3) також має єдиний додатний розв’язок, який за функцією $u^*(x)$ визначається рівністю (8). Тоді, якщо з точністю ε $u^*(x) \approx u^{(k)}(x)$, то

$$T^*(x) \approx \left[\frac{\sigma+1}{k_0} u^{(k)}(x)\right]^{\frac{1}{1+\sigma}}.$$

3. Результати обчислювального експерименту. Для обчислювального експерименту оберемо у (1)–(3) $f(x,T) = e^{T\sqrt{T}} + 3e^{-T\sqrt{T}}$, $k_0 = 1$, $\sigma = \frac{1}{2}$, тобто розглянемо задачу

$$-div(\sqrt{T}\, gradT) = e^{T\sqrt{T}} + 3e^{-T\sqrt{T}} \text{ у } \Omega, \tag{25}$$

$$T\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{26}$$

$$T > 0 \text{ у } \Omega, \tag{27}$$

у одиничному квадраті ($m = 2$)

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_1, x_2 < 1\}.$$

У задачі (25)–(27) зробимо заміну , де — нова невідома функція. Це призведе до задачі

$$-\Delta u = e^{\frac{3}{2}u} + 3e^{-\frac{3}{2}u} \text{ у } \Omega, \tag{28}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{29}$$

$$u > 0 \text{ у } \Omega. \tag{30}$$

У задачі (25)-(27) зробимо заміну $T = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{u^2}$, де u — нова невідома функція. Це призведе до задачі

$$u(x) = \int_\Omega K(x,s)u(s)ds + \int_\Omega G_{quasi}(x,s)\left[e^{\frac{3}{2}u(s)} + 3e^{-\frac{3}{2}u(s)}\right]ds, \tag{31}$$

де

$$G_{quasi}(x,s) = \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{1 + \frac{4\omega(x)\omega(s)}{r^2}},$$

$$K(x,s) = -\frac{\partial^2}{\partial s_1^2}\tilde{g}(x,s) - \frac{\partial^2}{\partial s_2^2}\tilde{g}(x,s),$$

$$\tilde{g}(x,s) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(x)\omega(s)}},$$

$$\omega(x) = [x_1(1-x_1)] \wedge_0 [x_2(1-x_2)] \equiv$$

$$\equiv x_1(1-x_1)+x_2(1-x_2)-\sqrt{x_1^2(1-x_1)^2+x_2^2(1-x_2)^2}\ .$$

Функції $F(x,u)=e^{\frac{3}{2}u}+3e^{-\frac{3}{2}u}$ додатна та неперервні за сукупністю змінних, якщо $u>0$, і дозволяє діагональне подання за допомогою функції

$$\Phi(x,v,w)=e^{\frac{3}{2}w}+3e^{-\frac{3}{2}v}\ .$$

Тоді з рівнянням (31) пов'яжемо гетеротонний оператор

$$T(u)(x)=\int_{\Omega}K(x,s)u(s)ds+\int_{\Omega}G_{quasi}(x,s)\left[e^{\frac{3}{2}u(s)}+3e^{-\frac{3}{2}u(s)}\right]ds\ , \quad (32)$$

для якого супровідний оператор має вигляд

$$\hat{T}(v,w)(x)=\int_{\Omega}K^{+}(x,s)v(s)ds-\int_{\Omega}K^{-}(x,s)w(s)ds+$$
$$+\int_{\Omega}G_{quasi}(x,s)\left[e^{\frac{3}{2}v(s)}+3e^{-\frac{3}{2}w(s)}\right]ds\ ,$$

де

$$K^{+}(x,s)=\max\{0,K(x,s)\}\ ,\ K^{-}(x,s)=\max\{0,-K(x,s)\}\ .$$

Тепер для оператора T вигляду (33) сильно інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді $<v^0,w^0>$, де $v^0(x)=\alpha u_0(x)$, $w^0(x)=\beta u_0(x)$, $0<\alpha<\beta$, а $u_0(x)=\int_{\Omega}G_{quasi}(x,s)ds$.

Для обраних функцій v^0, w^0 система нерівностей (12), (13) призводить до наступної системи нерівностей для визначення сталих α, β: для всіх $x\in\overline{\Omega}$

$$\alpha\int_{\Omega}K^{+}(x,s)u_0(s)ds-\beta\int_{\Omega}K^{-}(x,s)u_0(s)ds+$$
$$+\int_{\Omega}G_{quasi}(x,s)\left[e^{\frac{3}{2}\alpha u_0(s)}+3e^{-\frac{3}{2}\beta u_0(s)}\right]ds\ge\alpha u_0(x)\ ,$$
$$\beta\int_{\Omega}K^{+}(x,s)u_0(s)ds-\alpha\int_{\Omega}K^{-}(x,s)u_0(s)ds+$$
$$+\int_{\Omega}G_{quasi}(x,s)\left[e^{\frac{3}{2}\beta u_0(s)}+3e^{-\frac{3}{2}\alpha u_0(s)}\right]ds\le\beta u_0(x)\ .$$

Якщо $0<v,w<M_0$, де $M_0=\beta\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}u_0(x)$, то

$$\left|\Phi(x,v,w)-\Phi(x,w,v)\right| =$$

$$= \left| \left(e^{\frac{3}{2}v} + 3e^{-\frac{3}{2}w} \right) - \left(e^{\frac{3}{2}w} + 3e^{-\frac{3}{2}v} \right) \right| \le \frac{3}{2}\left(3 + e^{\frac{3}{2}M_0} \right) |v-w| .$$

Ітераційний процес (14)–(16) для розглядуваної задачі має вигляд

$$v^{(k+1)}(x) = \int_\Omega K^+(x,s)v^{(k)}(s)ds - \int_\Omega K^-(x,s)w^{(k)}(s)ds +$$
$$+\int_\Omega G_{quasi}(x,s)\left[e^{\frac{3}{2}v^{(k)}(s)} + 3e^{-\frac{3}{2}w^{(k)}(s)} \right] ds,\ k = 0,1,2,..., \tag{33}$$

$$w^{(k+1)}(x) = \int_\Omega K^+(x,s)w^{(k)}(s)ds - \int_\Omega K^-(x,s)v^{(k)}(s)ds +$$
$$+\int_\Omega G_{quasi}(x,s)\left[e^{\frac{3}{2}w^{(k)}(s)} + 3e^{-\frac{3}{2}v^{(k)}(s)} \right] ds,\ k = 0,1,2,..., \tag{34}$$

$$v^{(0)}(x) = \alpha u_0(x),\ w^{(0)}(x) = \beta u_0(x) . \tag{35}$$

Знайдено, що системі нерівностей для визначення сталих α, β задовольняють значення $\alpha = 2,2$, $\beta = 8,3$. Далі знаходимо

$$M = \max_{x\in\bar\Omega} \int_\Omega G_{quasi}(x,s)ds = 0,04093 ,$$

$$M_1 = \max_{x\in\bar\Omega} \int_\Omega [K^+(x,s) + K^-(x,s)]ds = 0,70819 ,$$

$$M_0 = \beta \max_{x\in\bar\Omega} u_0(x) = 0,33972 ,$$

$$L = \frac{3}{2}\left(3 + e^{\frac{3}{2}M_0} \right) = 6,99690 ,$$

$$\gamma = M_1 + LM = 0,995 .$$

Отже, $\gamma < 1$ і за теоремою 2 послідовні наближення, які формуються за схемою (33)–(35) двобічно збігаються до розв'язку задачі (28)–(30).

Оберемо $\varepsilon = 10^{-4}$. Обрана точність була досягнута на п'ятнадцятій ітерації. В таблиці 1 наведено значення $\varepsilon^{(k)} = \max_{x\in\bar\Omega} \frac{1}{2}\left| w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x) \right|$ оцінки похибки наближеного розв'язку $u^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, ..., 15$. Розглядаючи відношення $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}}$, $k = 0,1,...,14$, за даними табл. 1, отримаємо, що $\dfrac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} \approx 0,616$, що свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з відповідним показником. На рис. 1 наведено графіки перерізів верхніх $w^{(k)}(x)$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(x)$ (штрихована лінія) наближень при $x_2 = 0,5$ для $k = 0, 2, 4, 6$.

Таблиця 1

Значення оцінки похибки наближеного розв'язку

k	0	1	2	3	4	5
$\varepsilon^{(k)}$	$0,12 \cdot 10^{0}$	$0,82 \cdot 10^{-1}$	$0,52 \cdot 10^{-1}$	$0,33 \cdot 10^{-1}$	$0,20 \cdot 10^{-1}$	$0,12 \cdot 10^{-1}$
k	6	7	8	9	10	11
$\varepsilon^{(k)}$	$0,77 \cdot 10^{-2}$	$0,47 \cdot 10^{-2}$	$0,29 \cdot 10^{-2}$	$0,18 \cdot 10^{-2}$	$0,11 \cdot 10^{-2}$	$0,68 \cdot 10^{-3}$
k	12	13	14	15		
$\varepsilon^{(k)}$	$0,42 \cdot 10^{-3}$	$0,26 \cdot 10^{-3}$	$0,13 \cdot 10^{-3}$	$0,99 \cdot 10^{-4}$		

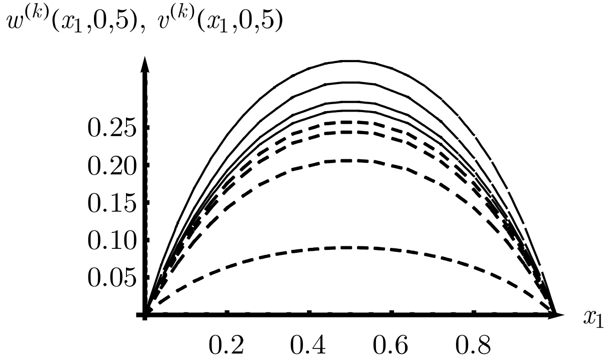

Рис. 1. *Графіки перерізів верхніх $w^{(k)}(x)$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(x)$ (штрихована лінія) наближень при $x_2 = 0$ для $k = 0, 2, 4, 6$*

За наближений розв'язок задачі (28)–(30) візьмемо функцію $u^{(15)}(x) = \dfrac{1}{2}(v^{(15)}(x) + w^{(15)}(x))$. Тоді

$$T^* \approx T^{(15)} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{[u^{(15)}]^2}\ .$$

На рис. 2 і 3 наведені поверхня та лінії рівня (з кроком 0,05) наближеного розв'язку $T^{(15)}(x)$ відповідно, а у таблиці 2 значення $T^{(15)}(x)$ в точках $(0,2i; 0,2j)$, $i, j = 0,1,2,3,4,5$.

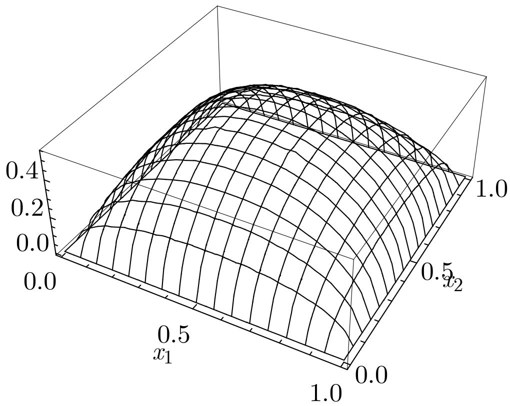

Рис. 2. *Поверхня наближеного розв'язку* $T^{(15)}(x)$

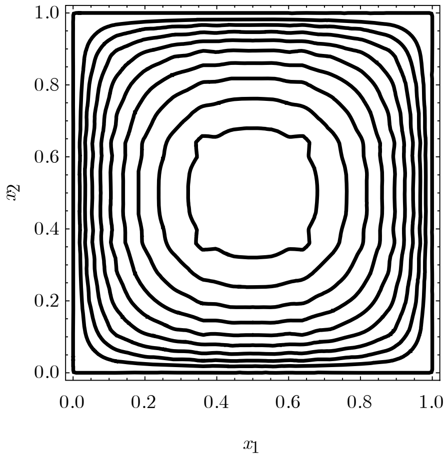

Рис. 3. *Лінії рівня наближеного розв'язку* $T^{(15)}(x)$

Таблиця 2

Значення наближеного розв'язку в точках
$(0,2i;\, 0,2j)$, $i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$T^{(15)}(0,2i,\, 0,2j)$	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$j = 0$	0	0	0	0	0	0
$j = 1$	0	0,3346	0,4093	0,4093	0,3346	0
$j = 2$	0	0,4093	0,5166	0,5166	0,4093	0
$j = 3$	0	0,4093	0,5166	0,5166	0,4093	0
$j = 4$	0	0,3346	0,4093	0,4093	0,3346	0
$j = 5$	0	0	0	0	0	0

Висновки. У роботі вперше для наближеного розв’язання задачі нелінійної теплопровідності з нелінійним коефіцієнтом теплопровідності, степенево залежним від температури, та нелінійною функцією потужності теплових джерел застосовано метод двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова. Обчислювальний експеримент, проведений для тестової задачі, продемонстрував можливості та ефективність цього метода. Результати роботи можуть бути використані у математичному моделюванні процесів у нелінійних середовищах та розповсюджені на відповідні нестаціонарні задачі, завдяки комбінації запропонованого метода і метода прямих Роте.

Список використаних джерел:

1. Колосов А. И. Конструктивное исследование краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений / А. И. Колосов, С. В. Колосова, М. В. Сидоров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2012. — № 2. — С. 50–57.
2. Колосова С. В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена / С. В. Колосова, В. С. Луханин, М. В. Сидоров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2015. — № 3. — С. 107–120.
3. Колосова С. В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений / С. В. Колосова, В. С. Луханин, М. В. Сидоров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2013. — № 1. — С. 35–42.
4. Колосова С. В. Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью / С. В. Колосова, М. В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. — 2013. — № 3 (62). — С. 28–31.
5. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. — М. : Физматгиз, 1962. — 394 с.
6. Опойцев В. И. Нелинейные операторы в пространствах с конусом / В. И. Опойцев, Т. А. Хуродзе. — Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. — 246 с.
7. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. — М. : Физматлит, 2001. — 576 с.
8. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые её приложения / В. Л. Рвачев. — Киев : Наук. думка, 1982. — 552 с.
9. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. — Москва : Наука, 1987. — 480 с.
10. Самарский А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — 2-е изд. — Москва : Научный мир, 2003. — 316 с.
11. Сидоров М. В. Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв’язання нелінійних крайових задач / М. В. Сидоров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2017. — № 2. — С. 250–259.

12. Сидоров М. В. Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності / М. В. Сидоров // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. — 2017. — Вип. 16. — С. 157–167.
13. Afrouzi G. A. A Numerical Method for Finding Positive Solution of Dirichlet Problem with a Weight Function / G. A. Afrouzi, S. Mahdavi, Z. Naghizadeh // Journal of Information and Computing Science. — 2006. — Vol. 1. — № 3. — P. 168–172.
14. Guo D. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications / D. Guo, V. Lakshmikantham // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. — 1987. — Vol. 11. — № 5. — P. 623–632.
15. Chen G. Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations / G. Chen, J. Zhou, W.-M. Ni // Int. J. Bifurcation Chaos. — 2000. — Vol. 10. — № 7. — P. 1565–1612.
16. Pao C. V. Nonlinear parabolic and elliptic equations / C. V. Pao. — New York : Plenum Press, 1992. — 794 p.

THE APPLICATION OF THE GREEN-RVACHEV QUASIFUNCTION METHOD FOR CONSTRUCTING TWO-SIDED APPROXIMATIONS TO THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR A NONLINEAR HEAT EQUATION

The problem of mathematical modeling of nonlinear stationary heat conduction processes leads to the necessity for an effective solution of boundary value problems for an elliptic equation with a coefficient that is nonlinearly dependent on temperature. In this paper, the Dirichlet problem for the heat equation with a nonlinear function of power of heat sources and a heat conductivity coefficient with power law dependence on temperature, is considered. To find a positive solution of the problem under consideration it is proposed the using of the two-sided approximations method, constructed on the basis of the application of the Green-Rvachev's quasi-function method. For this, the unknown function was replaced in order to obtain a nonlinear problem for the equation with the Laplace operator. This problem was replaced by the equivalent Uryson integral equation using the Green-Rvachev's quasi-function. The investigation of this equation was carried out by methods of nonlinear analysis in semi-ordered spaces, in particular, using the theory of heterotone operators by V.I. Opoĭcev. An integral operator entering the Uryson equation is considered as a heterotone operator acting in the space of continuous functions, which is semi-ordered by a cone of non-negative functions. This made it possible to find out the conditions for the existence of a unique positive solution of the problem under consideration and to construct a two-sided iterative process to search out it. This process begins at the ends of a strongly invariant for a heterotone operator cone segment and allows one to build two sequences of functions that approximate the desired solution from below and above. The advantage of the constructed two-sided iterative process is the availability of a convenient a posteriori error estimate for the approximate solution at each iteration. The efficiency of the developed method was illustrated by a computational experiment in a unit square for the case of the exponential dependence of the power of thermal sources on temperature. The results of the experiment are presented in the form of graphical (contour lines and the surface of an approximate solution) and numerical (values of an approximate solution at some points in the area) information.

Key words: *nonlinear heat conductivity, positive solution, Green-Rvachev's quasi-function, two-sided iterative method, equation with heterotone operator.*

Отримано: 14.11.2018

УДК 517.944
DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.161-172

Н. Г. Хома*, канд. фіз.-мат. наук,
С. Г. Хома–Могильська*, канд. фіз.-мат. наук,
Л. Г. Хохлова,** канд. фіз.-мат. наук

*Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль,
** Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ У СМУЗІ

Крайові періодичні задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних, зокрема гіперболічних рівнянь, є складним та неоднозначним об'єктом дослідження. Крайові задачі з даними на всій границі області, а також задачі з нелокальними (в тому числі інтегральними) умовами для гіперболічних рівнянь в обмежених областях є, взагалі кажучи, умовно коректними. Деякі автори пов'язують розв'язність таких задач із проблемою малих знаменників та використовують при розв'язанні методи нелінійного функціонального аналізу, теорії неявних функцій, варіаційні методи. Інші ж при дослідженні крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку використовують аналітичні методи та у своїх роботах будують інтегральні оператори і розв'язок шукають у спеціально визначених просторах неперервно диференційованих функцій для конкретних випадків періодичності.

У даній роботі знайдено аналітичну формулу функції $v(x, t)$, яка є розв'язком крайової 2π-періодичної за часовою змінною задачі у класі непарних функцій, для яких виконується умова $f(t) = -f(\pi - t)$. Встановлені властивості даної функ-

